

Βλέπομεν, ὅτι εἰς τὴν ἐκτέλεσιν τῆς ἄνω εἰρημέ-  
νης προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως, ἐθεωρήσαμεν τοὺς  
δεδομένους ἀριθμούς, ὡς ἀφηρημένους, μ' ὅλον ὅτι  
ἐξεύρομεν, ὅτι εἶναι ἀριθμοὶ συγκεκριμένοι, καὶ τοῦ-  
το ἐκ τῆς ἐκφράσεως τοῦ προβλήματος, ἀλλὰ φθά-  
σαντες εἰς τὸ ἐξαγόμενον 1887, ἐδώκαμεν εἰς αὐτὸ  
τὸ ὄνομα τοῦ εἶδους τῶν μονάδων, τὰς ὁποίας οἱ ἀριθ-  
μοὶ ἐπαρρησίαζον εἰς τὴν ἐκφρασιν τοῦ ζητήματος· οὗ-  
τω πρέπει πάντοτε νὰ κάμνωμεν, ὅταν θέλωμεν νὰ  
ἐφαρμόσωμεν τὰς πράξεις τῶν ἐργασιῶν εἰς ζητήματα  
γεννώμενα ἀπὸ τὰς χρεῖας τῆς κοινωνίας. Ἐπειδὴ δὲ  
αὗται αἱ πράξεις εἶναι ἀνεξάρτητοι ἀπὸ τὴν φύσιν τῶν  
ἀριθμῶν, θεωροῦμεν αὐτοὺς ὡς ἀφηρημένους· ἀρκεῖ  
νὰ δώσωμεν μετὰ ταῦτα εἰς τὸ τελικὸν ἐξαγόμενον τὸ  
ὄνομα τῆς μονάδος, τὴν ὁποίαν παριστάνει ἡ ἐκφρα-  
σις τοῦ ζητήματος.

### Περὶ Πολλαπλασιαμοῦ.

§. 17. Τὸ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμὸν τινα  
ἐπ' ἄλλον, εἶναι νὰ (ἀρ. 9.) συνθέσωμεν τρίτον ἀριθ-  
μὸν μὲ τὸν πρῶτον, ὡς ὁ δεύτερος συντίθεται μὲ  
τὴν μονάδα. Λοιπὸν, εἴαν οἱ δύο δεδομένοι ἀριθμοὶ  
ᾗναι ἀκέρατοι, εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν αὐτῶν πρέ-  
πει νὰ λάβωμεν τὸν πρῶτον τοσάκις, ὅσας μονάδας  
ἔχει ὁ δεύτερος.

Καλεῖται γινόμενον, τὸ ἐξαγόμενον ἐνὸς πολλα-  
πλασιαμοῦ, πολλαπλασιαστέος ὁ ἀριθμὸς, ὅστις πρέ-  
πει νὰ πολλαπλασιασθῇ, καὶ πολλαπλασιαστής ἐκεῖ-  
νος ἐπὶ τὸν ὁποῖον πολλαπλασιάζομεν, ἢ ἐκεῖνος, ὅστις  
παρασταίνει ποσάκις πρέπει νὰ ληφθῇ ὁ πρῶτος· οἱ  
δύο ἀριθμοὶ ὁμοῦ καλοῦνται παράγοντες τοῦ γινομένου.

Κυρίως εἰπεῖν ὁ πολλαπλασιασμός ἄλλο δὲν εἶναι, εἰμὴ πρόσθεσις· ἐπειδὴ, διὰ νὰ εὐρώμεν τὸ ἐξαγόμενον, ἀρκεῖ νὰ θέσωμεν τὸν πολλαπλασιαστὴν ὑπὸ τὸν ἑαυτὸν τοῦ τόσας φοραῖς, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ πολλαπλασιαστής, μετὰ ταῦτα νὰ προσθέσωμεν ὅλους τούτους τοὺς ἀριθμοὺς ἀναμεταξύτων, ἀλλ' ἡ τοιαύτη ἐργασία ἤθελεν εἶναι ἐπίπονος, εἰάν ὁ πολλαπλασιαστής ἦτο σύνθετος ἐκ πολλῶν ψηφίων. Ἐζήτησαν λοιπὸν νὰ τὴν εὐκολύνωσι, καὶ εἰς ταύτην τὴν συντομίαν συνίσταται ὁ πολλαπλασιασμός.

§. 18. Ἐν ὅσω οἱ δύο παράγοντες ἐκφράζονται δι' ἐνὸς ψηφίου, τὸ γινόμενον λαμβάνεται διὰ τῆς διαδοχικῆς προσθέσεως τοῦ ἀριθμοῦ εἰς τὸν ἑαυτὸν τοῦ· οὕτως διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν 7 ἐπὶ 5, λέγομεν 7 καὶ 7 κάμνουν 14 καὶ 7 κάμνουν 21 καὶ 7 κάμνουν 28 καὶ 7 κάμνουν 35· καὶ ἐπειδὴ ὁ τελευταῖος ἀριθμὸς εἶναι τὸ ἐξαγόμενον τῆς προσθέσεως 5 ἀριθμῶν ἴσων μὲ 7, διὰ τοῦτο ἐκφράζει τὸ γινόμενον τοῦ 7 ἐπὶ τὸν 5.

Οἱ ἀρχάριοι πρέπει νὰ γυμνασθῶσι κατὰ πρῶτον εἰς τοιοῦτου εἶδους πολλαπλασιασμοὺς, ἐπειδὴ πρέπει νὰ ἐντυπώσωσι τὰ γινόμενα εἰς τὴν μνήμην τους, εἰάν θέλωσι μετὰ ταῦτα νὰ λαμβάνωσι μὲ εὐκολίαν τὰ γινόμενα ἀριθμῶν γραφομένων μὲ πολλὰ ψηφία· μ' ὅλον τοῦτο ἕως οὗ νὰ γυμνασθῶσι, πρέπει νὰ ἔχωσιν ὑπ' ὄψιν τὸν Πυθαγορικὸν καλούμενον πίνακα, ἢ πίνακα πολλαπλασιασμοῦ, ὁ ὁποῖος φέρει τὸ ὄνομα τοῦ ἐφευρεστοῦ, ἢ καὶ τοῦ πρώτου ἐκείνου, ὅστις ἐκοινολόγησε τὴν χρῆσίν του:

## Πίναξ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Ὅριζόντιον μέρος.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Κάθετον μέρος.

Ἡ πρώτη ὀριζόντιος ζώνη τούτου τοῦ πίνακος σχηματίζεται, ὅταν προσθέτεται ἓν εἰς τὸν ἑαυτὸν του, ἕως εἰς τὸ 9.

Ἡ δευτέρα, ὅταν προσθέτονται 2 εἰς τὸν ἑαυτὸν του, ἢ τρίτη 3 καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Παρατηροῦμεν προσέτι, ὅτι δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν τὸν πίνακα διὰ καθέτων στηλῶν· ἐκάστη κάθετος στήλη σχηματίζεται ἐκ τῶν ἰδίων ἀριθμῶν, ὡς ἡ ὀριζόντιος ζώνη· οὕτως ἡ ἕκτη ὀριζόντιος ζώνη σχηματίζεται ἐκ τῶν ἀριθμῶν 6, 12, 18 . . . . . 54, ἢ ἕκτη κατακάθετος στήλη περιλαμβάνει τοὺς ἰδίους ἀριθμοὺς 6, 12, 18 . . . . 54.

Τούτου τεθέντος, διὰ νὰ εὔρωμεν διὰ μέσου τούτου τοῦ πίνακος τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν, ἀπὸ τοὺς ὁποίους ἕκαστος γράφεται δι' ἑνὸς ψηφίου, ζητοῦμεν τὸν πολλαπλασιαστὸν εἰς τὴν πρώτην ὀριζόντιον ζώνην καὶ ἀναχωροῦντες ἐκ τοῦ τοιούτου ἀριθμοῦ, καταβαί-

νομεν κατὰ κάθετον ἕως νὰ φθάσωμεν ἀντικρὺ εἰς τὸν πολλαπλασιαστήν, ὅστις εὐρίσκεται εἰς τὴν πρώτην κάθετον στήλην, ὁ δὲ περιεχόμενος ἀριθμὸς εἰς τὸ τετραγωνίδιον εἶναι τὸ γινόμενον.

Π. χ. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον τοῦ 8 ἐπὶ 5, καταβαίνομεν ἕστερον ἀπὸ τὸ 8 λαμβανόμενον ἐπὶ τῆς πρώτης ὀριζοντίου ζώνης, ἕως ἀντικρὺ τοῦ 5, λαμβανομένου εἰς τὴν πρώτην κάθετον στήλην, καὶ ὁ ἀριθμὸς 40 ὁ περιεχόμενος εἰς τὸ τετραγωνίδιον εἶναι τὸ γινόμενον ὅπου ἐζητοῦμεν.

Ἐμπορούσαμεν παρομοίως νὰ λάβωμεν 8 εἰς τὴν πρώτην κάθετον στήλην, καὶ νὰ διευθυνθῶμεν ὀριζοντίως ἕως ὑπὸ τὸ 5 λαμβανόμενον ἐπὶ τῆς πρώτης ὀριζοντίου ζώνης, καὶ ἠθέλαμεν εὖρει παρομοίως τὸ ζητούμενον γινόμενον 40.

§. 19. Ἄς ὑποθέσωμεν τώρα, ὅτι ὁ μὲν πολλαπλασιαστὸς ἐκφράζεται διὰ πολλῶν ψηφίων· ὁ δὲ πολλαπλασιαστὴς ἔχει ἓν μόνον.

Ἄς πολλαπλασιασθῇ 8459 ἐπὶ 7.

Ἐδυνάμεθα (ἀρ. 17) νὰ λάβωμεν τὸ ἐξαγόμενον γράφοντες τὸν ἓνα ὑπὸ τὸν ἄλλον ἑπτὰ ἀριθμούς ἴσους μὲ τὸν 8459 . . . . .	8459
καὶ μετὰ ταῦτα νὰ προσθέσωμεν διαδοχικῶς τὰς ἀπλᾶς μονάδας, δεκάδας, ἑκατοντάδας κ. τ. λ. τὸ προκύπτον ἠθέλ᾽ εἶναι 59213.	8459

Ἄλλὰ βλέπομεν, ὅτι εἶναι τὸ αὐτὸ,	8459
ὡς νὰ λάβωμεν διαδοχικῶς 7 φοραῖς τὰς	8459
9 μονάδας τοῦ πολλαπλασιαστέου, 7	59213
φοραῖς τὰς 5 δεκάδας κ. τ. λ. καὶ νὰ κάμωμεν τὸ ἄθροισμα ὅλων τούτων τῶν γινομένων.	

Οὕτως, ἀφ' οὗ διατάξωμεν τὸν 8459  
 πολλαπλασιαστήν 7 ὑπὸ τὸν πολλαπλα- 7  
 σιαστέον, ὡς ἐδῶ βλέπομεν, καὶ ὑπο- 59213  
 γραμμίσωμεν, λέγομεν κατὰ πρῶτον 7 φοραῖς 9 κά-  
 μνου 63 (ὄρα τὸν πίνακα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ) ἢ  
 6 δεκάδας καὶ 3 μονάδας, θέτομον 3 ὑπὸ τὰς μονά-  
 δας, καὶ βαστοῦμεν τὰς 6 δεκάδας, διὰ γὰρ τὰς ἐνώ-  
 σωμεν μὲ τὸ γινόμενον τῶν δεκάδων τοῦ πολλαπλασια-  
 στέου ἐπὶ 7.

Λέγομεν μετὰ ταῦτα, 7 φοραῖς 5 κάμνου 35  
 καὶ 6 τὰ κρατηθέντα κάμνου 41 δεκάδας, ἢ 4 ἑκα-  
 τοντάδας καὶ μίαν δεκάδα, γράφομεν 1, εἰς τὴν τάξιν  
 τῶν δεκάδων, καὶ κρατοῦμεν τὰς 4 ἑκατοντάδας.

7 φοραῖς 4 κάμνου 28, καὶ 4 τὰ κρατηθέν-  
 τα κάμνου 32 ἑκατοντάδας, ἢ 3 χιλιάδας καὶ 2 ἑκα-  
 τοντάδας, γράφομεν 2 εἰς τὴν τάξιν τῶν ἑκατοντά-  
 δων, καὶ κρατοῦμεν 3.

Τέλος πάντων 7 φοραῖς 8 κάμνου 56 καὶ 3 τὰ  
 κρατηθέντα κάμνου 59· θέτομεν 9 ὑπὸ τῶν χιλιά-  
 δων, καὶ πρὸ αὐτοῦ 5 δεκάδας χιλιάδος, ἐπειδὴ δὲν  
 ἔχομεν πλέον ἄλλα ψηφία γὰρ πολλαπλασιάσωμεν.

Εὐρίσκομεν οὕτω 59213 τὸ ζητούμενον γινόμε-  
 νον.

Ἐντεῦθεν βλέπομεν, ὅτι διὰ γὰρ πολλαπλασιά-  
 σωμεν ἀριθμὸν ἐκ πολλῶν ψηφίων ἐπὶ ἀριθμὸν ἐξ ἐνὸς  
 μόνου, πρέπει γὰρ πολλαπλασιάσωμεν διαδοχικῶς τὰς  
 μονάδας, δεκάδας, ἑκατοντάδας κ. τ. λ. τοῦ πολλα-  
 πλασιαστέου ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστήν, καὶ γὰρ γρά-  
 ψωμεν τὰ διαφορετικὰ μερικὰ γινόμενα εἰς τὴν ἀνή-  
 κουσαν τάξιν, προσέχοντες εἰς κάθε μερικὸν πολλα-  
 πλασιασμὸν γὰρ βαστοῦμεν τὰς δεκάδας, διὰ γὰρ τὰς  
 ἐνόσωμεν μὲ τὰς δεκάδας, τὰς ἑκατοντάδας μὲ τὰς  
 ἑκατοντάδας κ. τ. λ.

Ἔστω δεύτερον παράδειγμα γὰ  $37008$   
 πολλαπλασιασθῆ  $37008$  ἐπὶ  $9$ .  $9$

Λέγομεν κατὰ πρῶτον  $9$  φοραῖς  $8$  κά-  $333072$   
 μινουν  $72$ , γράφομεν  $2$  ὑπὸ τὴν τάξιν τῶν μονάδων,  
 καὶ κρατοῦμεν  $7$ .

Μετὰ ταῦτα  $9$  φοραῖς  $0$ , δίδουν  $0$ , καὶ ἐπειδὴ  
 εἰς τὴν πρώτην πρᾶξιν ἐκρατήσαμεν  $7$  δεκάδας, πρέπει  
 γὰ τὰς γράψωμεν εἰς τὴν τάξιν τῶν δεκάδων.

$9$  φοραῖς  $0$  κάμνουν  $0$ , ὅθεν γράφομεν  $0$  εἰς  
 τὴν τάξιν τῶν ἑκατοντάδων, ἐπειδὴ δὲν ὑπάρχουσι,  
 καὶ πρέπει ἤδη γὰ βαστάξωμεν τὸν τόπον.

Μετὰ ταῦτα  $9$  φοραῖς  $7$  κάμνουν  $63$ , γράφο-  
 μεν  $3$ , καὶ βαστοῦμεν  $6$ .

Τέλος πάντων  $9$  φοραῖς  $3$  κάμνουν  $27$ , καὶ  $6$   
 τὰ κρατηθέντα κάμνουν  $33$ , γράφομεν  $3$  καὶ πρὸ αὐ-  
 τοῦ τὰ ἄλλα  $3$ .

Οὕτω τὸ ζητούμενον γινόμενον εἶναι  $333072$ .

§. 20. Πρὶν περάσωμεν εἰς τὴν περίστασιν, εἰς  
 τὴν ὁποίαν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι σύνθετος ἐκ δύο  
 ἢ περισσοτέρων ψηφίων, θέλομεν δεῖξει τὸ μέσον, διὰ  
 τοῦ ὁποίου κατασταίνομεν ἓνα ἀριθμὸν  $10$ ,  $100$ ,  
 $1000$  . . . . . φοραῖς μεγαλύτερον, τουτέστι γὰ  
 πολλαπλασιάζωμεν αὐτὸν ἐπὶ  $10$ ,  $100$ ,  $1000$  κτλ.

Ἐκ τῆς θεμελιώδους ἀρχῆς τῆς ἀριθμῆσεως  
 (ἀρ. 5) προκύπτει φανερά, ὅτι εἰς τὴν  $0$  εἰς  
 τὰ δεξιὰ ἀριθμοῦ ἤδη γεγραμμένου, ἕκαστον σημαν-  
 τικὸν ψηφίον αὐτοῦ, ἐν ᾧ προχωρεῖ μίαν τάξιν πρὸς  
 τὰ ἀριστερά, ἐκφράζει μονάδας  $10$  φοραῖς μεγαλητέ-  
 ρας τῶν προτέρων· παρομοίως θέτουτες δύο  $0$  εἰς τὰ  
 δεξιὰ του, τὸν κατασταίνομεν  $100$  φοραῖς μεγαλητέ-  
 ρον· ἐπειδὴ ἕκαστον σημαντικὸν ψηφίον ἐκφράζει μο-  
 νάδας  $100$  φοραῖς μεγαλητέρας, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Λοιπὸν διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ὅποιονδήποτε ἀκέραιον ἀριθμὸν ἐπὶ 10, 100, 1000 κτλ. ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν εἰς τὰ δεξιά του ἓν, δύο, τρία μηδενικά.

Οὕτως τὸ γινόμενον τοῦ 439 ἐπὶ 10, 100, 1000, 10000 καὶ ἑξαξῆς, εἶναι 4390, 43900, 439000, 4390000 καὶ ἑξαξῆς.

§. 21. Ἄς θεωρήσωμεν τώρα τὴν περίστασιν, καθ' ἣν ὁ πολλαπλασιαστὴς καὶ ὁ πολλαπλασιαστῆς εἶναι σύνθετοι ἐκ πολλῶν ψηφίων.

Πρόκειται νὰ πολλαπλασιασθῇ	87468
ἐπὶ	5847
	612276
	3498720
	69974400
	437340000
	511425396

Γράφωμεν τὸν πολλαπλασιαστὴν ὑπὸ τὸν πολλαπλασιαστῆν οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες τῆς ἰδίας τάξεως νὰ εὐρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν στήλην, καὶ ὑπογραμμίζωμεν. Μετὰ ταῦτα παρατηροῦμεν, ὅτι νὰ πολλαπλασιάσωμεν 87468 ἐπὶ 5847 ἄλλο δὲν εἶναι, παρὰ νὰ λάβωμεν τὸν πολλαπλασιαστῆν 7 φοραῖς πλέον 40 φοραῖς, πλέον 800 : φοραῖς, πλέον 5000 φοραῖς, καὶ νὰ ἐνάσωμεν μετὰ ταῦτα τὰ μερικὰ γινόμενα.

Ἡμποροῦμεν ἐξ ἀρχῆς νὰ εὕρωμεν κατὰ τὸν κανόνα τοῦ ἀριθ. 19 τὸ γινόμενον τοῦ 87468 ἐπὶ 7, ὅθεν εὐρίσκομεν 612276.

Ἄλλὰ τίνι τρόπῳ προσδιορίζομεν ἐκεῖνο τῶν 87468 ἐπὶ 40;

Ὡς ἐννοήσωμεν πρὸς ὀλίγην ὥραν, ὅτι ἐγράψαμεν 40 ἀριθμούς ἴσους ἕκαστον μὲ 87468 τὸν ἕνα ὑπὸ τὸν ἄλλον, καὶ ὅτι κάμνομεν τὴν πρόσθεσιν ὅλων αὐτῶν· οὕτως θέλομεν ἔχει τὸ ζητούμενον γινόμενον· ἀλλ' εἶναι φανερόν, ὅτι οἱ 40 ἀριθμοὶ σχηματίζουν 10 τμήματα ἀπὸ 4 ἀριθμούς ἴσους ἕκαστον μὲ 87468, ἀλλὰ τέσσαρες ἀριθμοὶ ἴσοι ἕκαστος μὲ 87468 δίδουσι 4 φορές 87468 γινόμενον, τὸ ὁποῖον δυνόμεθα νὰ σχηματίσωμεν κατὰ τὸν κανόνα τοῦ ἀρ. 19, καὶ ἴσον μὲ 349872. Πολλαπλασιάζοντες δὲ τὸ γινόμενον τοῦτο ἐπὶ 10, ἤτοι (ἀρ. 20) προσθέτοντες ἐν 0 εἰς τὰ δεξιὰ του, λαμβάνομεν 3498720, γινόμενον τοῦ 87468 ἐπὶ 40.

Βλέπομεν λοιπὸν, ὅτι αὕτη ἡ δευτέρα πρᾶξις ἀπαιτεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν πολλαπλασιαστὴν ἐπὶ τοῦ ψηφίου 4, τὸ ὁποῖον θεωρεῖται ὡς νὰ ἐκφράξη ἀπλᾶς μονάδας, νὰ γράψωμεν ἐν 0 εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ γινομένου, καὶ νὰ θέσωμεν, ὡς ἀνωτέρω βλέπομεν, τὸ οὕτω ληφθὲν ἐξαγόμενον 3498720 ὑπὸ τὸ πρῶτον μερικὸν γινόμενον.

Παρομοίως διὰ νὰ ἐκτελέσωμεν τὸν πολλαπλασιασμόν τῶν 87468 ἐπὶ 800, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν 87468 ἐπὶ 8, ἐκ τοῦ ὁποῖου συνάγομεν 699744, καὶ μετὰ ταῦτα νὰ προσθέσωμεν δύο 00 εἰς τὸ γινόμενον, τὸν ὁποῖον θέτομεν ὑπὸ τὰ δύο προηγούμενα γινόμενα· τῶ ὄντι 800 ἀριθμοὶ ἴσοι μὲ 87468, καὶ θεμένοι ὁ εἰς ὑπὸ τὸν ἄλλον σχηματίζουν 100 τμήματα ἀπὸ 8 ἀριθμούς ἴσους ἕκαστον μὲ 87468, ἢ 100 ἀριθμούς ἴσους μὲ τὸ γινόμενον τῶν 87468 ἐπὶ 8, τουτέστι 69974400 . . .

Ἀποδεικνύομεν δι' ὁμοίου συλλογισμοῦ, ὅτι διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 5000 ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν 87468 ἐπὶ 5, καὶ νὰ προσθέσωμεν τρία



μηδενικά εἰς τὰ δεξιά τοῦ γινομένου, καὶ νὰ γράψωμεν τὸ ἐξαγόμενον 437340000 ὑπὸ τὰ τρία πρῶτα γινόμενα.

Προσθέτοντες ἤδη τὰ τέσσαρα μερικὰ γινόμενα, εὐρίσκομεν τέλος πάντων τὸ ὅλον γινόμενον 511425396.

Σ. Κ. Συνειθίζου ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον νὰ μὴ γράψωσι τὰ μηδενικά εἰς τὰ δεξιά τῶν μερικῶν γινόμενων ἐπὶ τὰ ψηφία τῶν δεκάδων, ἑκατοντάδων, χιλιάδων, καὶ ἑφεξῆς, ἀλλὰ γράφουσιν ἕκαστον μερικὸν γινόμενον ὑπὸ τὸ προηγούμενον, προχωροῦντες μίαν τάξιν πρὸς τὰ ἀριστερά, σχετικῶς πρὸς τὸ γινόμενον τοῦτο, τουτέστι κάμνοντες νὰ τεθῇ τὸ τελευταῖον ψηφίου εἰς τὴν αὐτὴν ἐκείνην τάξιν, τὴν ὁποίαν κρατεῖ τὸ ψηφίου ἐπὶ τοῦ ὁποίου πολλαπλασιάζομεν.

Γενικὸς Κανὼν. Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμὸν πολλῶν ψηφίων ἐπὶ ἄλλον ἀριθμὸν πολλῶν ψηφίων, πολλαπλασιάζομεν κατὰ πρῶτον τὸν πολλαπλασιαστὴν ἐπὶ τὸ ψηφίου τῶν μονάδων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, κατὰ τὸν κανόνα τοῦ ἀρ. 19· πολλαπλασιάζομεν παρομοίως ὅλον τὸν πολλαπλασιαστὴν διαδοχικῶς ἐπὶ τὸ ψηφίου τῶν δεκάδων, ἐπὶ ἐκεῖνο τῶν ἑκατοντάδων, καὶ ἑφεξῆς, θεωρουμένων ὡς ἀπλῶν μονάδων, καὶ γράφομεν τὰ μερικὰ γινόμενα, τὸ ἓν ὑπὸ τὸ ἄλλο, οὕτως ὥστε ἕκαστον νὰ προχωρῇ μίαν τάξιν πρὸς τὰ ἀριστερά σχετικῶς πρὸς τὸ πρὸ αὐτοῦ, μετὰ ταῦτα προσθέτοντες τὰ γινόμενα, ἔχομεν τὸ ὅλον ζητούμενον γινόμενον.

§. 22. Συχνὰ μερικὰ ψηφία τοῦ πολλαπλασιαστοῦ εἶναι μηδενικά, καὶ τότε πρέπει νὰ διορθώσωμεν τὴν διάταξιν τῶν μερικῶν γινόμενων.

Ἔστω νὰ πολλαπλασιασθῇ . . .	870497
ἐπὶ . . . . .	500407
	<hr/>
	6093479
	3481988
	<hr/>
	4352485
	<hr/>
	435602792279

Πολλαπλασιάζομεν κατὰ πρῶτον ὅλον τὸν πολλαπλασιαστέον ἐπὶ 7, καὶ μᾶς δίδει γινόμενον 6093479.

Ἦδη ἐπειδὴ δὲν εὐρίσκονται δεκάδες εἰς τὸν πολλαπλασιαστὴν περνοῦμεν εἰς τὸν 4, ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, καὶ ἔχομεν γινόμενον 3481988, καὶ ἐπειδὴ αὐτὸ ἐκφράζει ἑκατοντάδας, τὸ θέτομεν ὑπὸ τὸ πρῶτον γινόμενον, προχωροῦντες δύο τάξεις κατὰ τὰ ἀριστερά.

Παρομοίως ἐπειδὴ δὲν ὑπάρχουσι χιλιάδες, οἷτε δεκάδες χιλιάδος εἰς τὸν πολλαπλασιαστὴν, πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 5, ψηφίον ἑκατοντάδων χιλιάδας, καὶ γράφομεν τὸ γινόμενον 4352485 ὑπὸ τὸ ἀνωτέρω προχωροῦντες τρεῖς τάξεις κατὰ τὰ ἀριστερὰ σχετικῶς πρὸς τὸ πρὸ αὐτοῦ γινόμενον.

Ἐν γένει ὅταν εὐρίσκωνται ἐν ἡ περισσότερα μηδενικά μεταξὺ δύο σημαντικῶν ψηφίων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ προχωροῦμεν τὸ ἀνταποκρινόμενον γινόμενον κατὰ τὸ σημαντικὸν ψηφίον, τὸ ὁποῖον εὐρίσκεται εἰς τὰ ἀριστερὰ τῶν μηδενικῶν, τόσας τάξεις πλέον μίαν κατὰ τὰ ἀριστερὰ σχετικῶς εἰς τὸ προηγούμενον γινόμενον, τὸ ὁποῖον ἔχει ἐν τῷ μέσῳ μηδενικά. Ἐπομένως διὰ νὰ ἀποφύγωμεν κάθε σφάλμα, τὸ ὁποῖον ἢμπορεῖ νὰ ἀκολουθήσῃ, πρέπει νὰ βεβαιωνώμεθα εἰς κάθε πράξιν, εἰάν τὸ τελευταῖον ψηφίον τοῦ μερικοῦ γινομένου εὐρίσκεται εἰς τὴν στήλην τῶν μονάδων τῆς



νά τὰς ἐνώσωμεν μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἀμέσως ἀριστεροῦ ψηφίου· ὅμως θέλομεν συναΐξει τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον ἀπὸ ὁποιονδήποτε ψηφίου τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, ἀρχίζοντες τὴν πρᾶξιν ὡς εἰς τὸ ἀκόλουθον παράδειγμα.

Ἀρχίσωμεν ἐδῶ τὸν πολλαπλασιασμόν ἐκ τῶν ψηφίων τῶν ἑκατοντάδων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ,	5704
ἀλλὰ εἰς τὸν ἀκόλουθον πολλαπλασιασμόν τῶν δεκάδων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστέον τὸ γινόμενον τάττεται μίαν τάξιν πρὸς τὰ δεξιὰ	487
σχετικῶς πρὸς τὸ πρῶτον μερικὸν γινόμενον.	<hr style="width: 100%; border: 0.5px solid black;"/>
Παρομοίως τὸ τρίτον γινόμενον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ ἐπὶ τὰς μονάδας τοῦ πολλαπλασιαστοῦ τάττεται μίαν τάξιν πρὸς τὰ δεξιὰ,	22816
ὅταν γραφθῇ ὑποκάτω εἰς τὸ δεύτερον μερικὸν γινόμενον, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.	45632
Ἡ συνήθεια μόνη εἶν' αἰτία γὰρ κάμνωμεν τὸν πολλαπλασιασμόν, ἀρχίζοντες ἀπὸ τὰ δεξιὰ εἰς τὰ ἀριστερά· διότι τοῦτο εἶναι καὶ φυσικώτερον καὶ εὐκολώτερον.	30928
§. 25. Τελειόνομεν τὸν πολλαπλασιασμόν μὲ τὴν ἐκθεσιν μερικῶν ιδιοτήτων, τὰς ὁποίας συχνὰ θέλομεν μεταχειρισθῆ.	<hr style="width: 100%; border: 0.5px solid black;"/>
1 <sup>ο</sup> . Ἄς πολλαπλασιασθῇ ὁ ἀριθμὸς 345 ἐπὶ τὸν 72, ὅστις εἶναι ἴσος μὲ 8 φόραϊς 9· λέγω ὅτι τὸ νὰ πολλαπλασιάσωμεν 345 ἐπὶ 72 καταντᾷ εἰς τὸ νὰ πολλαπλασιάσωμεν 345 ἐπὶ 9, καὶ τὸ ἐξαγόμενον ἐπὶ 8.	2777848

Ἡ συνήθεια μόνη εἶν' αἰτία γὰρ κάμνωμεν τὸν πολλαπλασιασμόν, ἀρχίζοντες ἀπὸ τὰ δεξιὰ εἰς τὰ ἀριστερά· διότι τοῦτο εἶναι καὶ φυσικώτερον καὶ εὐκολώτερον.

§. 25. Τελειόνομεν τὸν πολλαπλασιασμόν μὲ τὴν ἐκθεσιν μερικῶν ιδιοτήτων, τὰς ὁποίας συχνὰ θέλομεν μεταχειρισθῆ.

1<sup>ο</sup>. Ἄς πολλαπλασιασθῇ ὁ ἀριθμὸς 345 ἐπὶ τὸν 72, ὅστις εἶναι ἴσος μὲ 8 φόραϊς 9· λέγω ὅτι τὸ νὰ πολλαπλασιάσωμεν 345 ἐπὶ 72 καταντᾷ εἰς τὸ νὰ πολλαπλασιάσωμεν 345 ἐπὶ 9, καὶ τὸ ἐξαγόμενον ἐπὶ 8.

Διὰ νὰ δώσωμεν τὴν λόγον ταύτης τῆς προτάσεως χωρὶς νὰ ἐκτελέσωμεν τὸν ὑπολογισμόν, ἀρκεῖ νὰ μεταχειρισθῶμεν συλλογισμόν τινα ἀνάλογον μὲ τὸν τοῦ ἀρ. 21. Τὸ νὰ πολλαπλασιάσωμεν 345 ἐπὶ 72,

συνίσταται εἰς τὸ νὰ κάμωμεν τὸ ἄθροισμα 72 ἀριθμῶν ἴσων μὲ 345 · ἀλλ' οἱ 72 ἀριθμοὶ γραφθέντες ὁ εἷς ὑπὸ τὸν ἄλλον, σχηματίζουσιν ὀκτώ τμήματα ἀπὸ 9 ἀριθμοῦς, καθεὶς τῶν ὁποίων εἶναι ἴσος μὲ 345 · λοιπὸν ἀφ' οὗ πολλαπλασιάζωμεν 345 ἐπὶ 9, πρέπει νὰ λάβωμεν τὸ γινόμενον τοῦτο 8 φοραῖς · οὕτως τὸ νὰ πολλαπλασιάζωμεν 345 ἐπὶ τὸ γινόμενον 72 τῶν δύο παραγούτων 9 καὶ 8, καταντᾶ εἰς τὸ νὰ πολλαπλασιάζωμεν 345 ἐπὶ 9, καὶ τὸ ἐξαγόμενον ἐπὶ 8.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ 9 εἶναι ἀφ' ἐαυτοῦ ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τοῦ 3 ἐπὶ τοῦ 3, δυνάμεθα ἀκόμη νὰ εἰπώμεν, ὅτι τὸ νὰ πολλαπλασιάζωμεν 345 ἐπὶ 72, καταντᾶ εἰς τὸ νὰ πολλαπλασιάζωμεν 345 κατὰ πρῶτον ἐπὶ 3, καὶ τὸ ληφθὲν ἐξαγόμενον ἐπὶ 3, καὶ τέλος πάντων τὸ νέον ἐξαγόμενον ἐπὶ 8.

Ὁ συλλογισμὸς οὗτος, ὅστις δύναται νὰ ἐφαρμοσθῆ καὶ εἰς ἄλλους ἀριθμοῦς, ἀποτελεῖ τὴν ἀκόλουθον γενικὴν ιδιότητα. Τὸ νὰ πολλαπλασιάζωμεν ἀριθμὸν ἐπὶ γινόμενον ἀποτελεσθὲν ἤδη ἐκ δύο ἢ περισσοτέρων παραγόντων, ἄλλο δὲν εἶναι, εἰμὴ ἡ διαδοχικὴ τούτου πολλαπλασίασις ἐφ' ἕκαστον τῶν παραγόντων.

§. 26. 2<sup>ον</sup>. Εἰς πολλαπλασιασμὸν τινὰ δύο παραγόντων εἶναι ἀδιάφορον νὰ λάβωμεν τὸν πρῶτον ὡς πολλαπλασιαστέον, καὶ τὸν δεύτερον οἷς πολλαπλασιαστήν, ἢ τὸ ἀνάπαλιν · ἢ μὲ ἄλλας λέξεις τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν εἶναι τὸ αὐτὸ, καθ' ὁποίαν τάξιν ἐκτελέσωμεν τὸν πολλαπλασιασμόν.

Οὕτως τὸ γινόμενον τῶν 459 ἐπὶ 237 εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν 237 ἐπὶ 459.

Τῶ ὄντι ἄς ἐννοή- 1, 1, 1, 1, 1, . . . . .  
 σωμεν τὴν μονάδα γυγραμ- 1, 1, 1, 1, 1, . . . . .  
 μένην 459 φοραῖς εἰς τὴν 1, 1, 1, 1, 1, . . . . .  
 αὐτὴν ὀριζόντιον γραμ- 1, 1, 1, 1, 1, . . . . .  
 μὴν, καὶ ἄς σχηματίσω- . . . . .  
 μεν 237 τοιαύτας γραμ- . . . . .  
 μάς, εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ κεφάλαιον τῶν περιεχομένων  
 μονάδων εἰς τὸν παρόντα πίνακα εἶναι ἴσον μὲ τόσαις  
 φοραῖς 459 μονάδας μιᾶς ὀριζοντίου ζώνης, ὅσαι μο-  
 νάδες εὐρίσκονται εἰς μίαν τῶν καθέτων στηλῶν, ἢ  
 εἰς 237, τουτέστι τὸ κεφάλαιον τοῦτο εἶναι ἴσον μὲ  
 τὸ γινόμενον τῶν 459 ἐπὶ 237· ἀλλὰ δυνάμεθα νὰ  
 εὐρωμεν παρομοίως, ὅτι αὐτὸ εἶναι ἴσον μὲ τόσαις  
 φοραῖς τὰς 237 μονάδας μιᾶς καθέτου στήλης, ὅσας  
 μονάδας ἔχει μία ὀριζόντιος ζώνη, ἢ τόσας, ὅσας  
 ἔχει ὁ ἀριθμὸς 459, τουτέστι εἶναι ἴσον μὲ τὰ γι-  
 νόμενον τῶν 237 ἐπὶ 459, καὶ ἐφεξῆς.

Ἐὰν ἡ φύσις ἐνὸς ζητήματος μᾶς φέρῃ εἰς τὸν  
 πολλαπλασιασμόν τοῦ ἀριθμοῦ 75 ἐπὶ 5642, κατὰ  
 τὴν ἤδη ἀποδειχθεῖσαν πρότασιν, ἄγομεν ταύτην τὴν  
 πράξιν εἰς τὸ γινόμενον τῶν 5642 ἐπὶ 75, ἐπειδὴ  
 τότε δὲν ἔχομεν παρὰ δύο μόνον μερικὰ γινόμενα νὰ  
 σχηματίσωμεν, ἐν ᾧ εἰς τὴν πρώτην περίστασιν ἔμελλε  
 νὰ σχηματίσωμεν τέσσαρα.

Αὐτὴν τὴν πρότασιν θέλομεν ἀποδείξει δι' ὑποϊ-  
 σινητέου ἀριθμοῦ παραγόντων (Κεφ. ε' ὄν, ἀρ. 127.)

Περὶ Διαιρέσεως.

§. 27. Τὸ νὰ διαιρῶμεν ἀριθμὸν δι' ἀριθμοῦ εἶναι  
 (ἀρ. 9) τὸ νὰ εὐρίσκωμεν τρίτον τινα ἀριθμὸν, ὅστις  
 πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν δεύτερον ν' ἀποτελῇ τὸν  
 πρῶτον, ἢ καὶ κατ' ἄλλον τρόπον, θεθέντος ἐνός γιν-

Ε.Υ.Δ. 2005 Κ.Π.Π.  
 ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006