

ἀριθμῶν. Περιλαμβάνει αὕτη προσέτι πλῆθος ιδιοτήτων, αἵτινες ἐφευρέθησαν ἀπὸ τὰς ἐρεῦνας, εἰ ὅπριαι ἔπρεπε νὰ ἐκτελεσθῶσι διὰ νὰ φθάσωσιν εἰς μεθόδους τοῦ ὑπολογίζεσθαι, καὶ νὰ εὐκολύνωσι τούτων τὴν χρῆσιν.

Θέλόμεν δὲ ἐκθέσει κατὰ διαδοχὴν τὰς ἐργασίας ταύτας, ἀνακαλοῦντες εἰς τὴν μνήμην μας (ἀρ. 2), ὅτι διὰ νὰ καταστήσωμεν τὰς μεθόδους ἀνεξαρτήτους ἀπὸ πᾶν εἶδος ζητήματος, πρέπει νὰ θεωρήσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς ὡς ἀριθμοὺς ἀφηρημένους· μ' ὅλον τοῦτο εἰς τὰς ἐφαρμογὰς τὰς διωρισμένας πρὸς γύμνασιν τῶν ἀρχαρίων θέλομεν ἀναπτύξει καὶ ζητήματα μὲ ἀριθμοὺς διακεκριμένους.

Διὰ νὰ ἐξακολουθήσωμεν δὲ κανονικῶς, τουτέστι διατρέχοντες πρότερον τὴν ἀπλουστέραν ὁδὸν, καὶ μετὰ ταῦτα τὴν σύνθετον, ἐκθέτομεν πρῶτον τὰς ἐπάνω εἰς τοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς γινομένας πράξεις.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

Πράξεις ἐπὶ τῶν ἀκεραίων  
Ἀριθμῶν.

Περὶ τῆς Προσθέσεως.

§. 10. Τὸ νὰ συνάψωμεν ἢ νὰ προσθέσωμεν πολλοὺς ἀριθμοὺς μεταξύτων, εἶναι νὰ τοὺς ἐνώσωμεν ὅλους εἰς ἓνα μόνον, ἢ νὰ σχηματίσωμεν ἄλ-

λον ἀριθμὸν περιέχοντα τόσας μονάδας, ὅσαι εἰς ἕκαστον τῶν διαφορτικῶν τούτων ἀριθμῶν εὐρίσκονται.

Τὸ ἐξαγόμενον ταύτης τῆς πράξεως καλεῖται κεφάλαιον ἢ ὅλον ἢ ἀθροισμα.

Ἡ πρόσθεσις τῶν ἀριθμῶν ἐνὸς μόνου ψηφίου δὲν παριστάνει καμμίαν δυσκολίαν. Ἡ νεολαία ἐξ ἀπαλῶν ὀνύχων συνειθίζει νὰ τὴν κάμνη διὰ τῶν δακτύλων, καὶ οὕτως ἐγχαράττει τὰ ἐξαγόμενα εἰς τὴν μνήμην.

Οὕτως ἄς προσθεῶσιν οἱ ἀριθμοὶ 5, 7, 4, 8 καὶ 6· λέγουσι 5 καὶ 7 κάμνον 12, καὶ 4 κάμνον 16 καὶ 8 κάμνον 24 καὶ 6 κάμνον 30. Λοιπὸν 30 εἶναι τὸ ζητούμενον κεφάλαιον.

Εὐρίσκομεν παρομοίως ὅτι 42 εἶναι τὸ κεφάλαιον τῶν ἀριθμῶν 7, 9, 6, 5, 8, 7.

Μᾶς προβάλλουν δὲ ἤδη νὰ προσθέσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς 7453 καὶ 1534. Ἀφ' οὗ γράψωμεν τοὺς δύο ἀριθμοὺς, ὡς ἐδῶ βλέπομεν, 7453 καὶ ὑπογραμμίσωμεν, λέγομεν ἀρχίζοντες 1534 ἀπὸ τὰς ἀπλᾶς μονάδας, 3 καὶ 4 κάμνον 7, τὸ ὁποῖον γράφομεν ὑπὸ τὰς μονάδας· περνῶντες μετὰ ταῦτα εἰς τὰς δεκάδας, λέγομεν 3 καὶ 5 κάμνον 8, τὸ ὁποῖον γράφομεν ὑπὸ τὰς δεκάδας, ἔπειτα 5 καὶ 4 κάμνον 9, τὸ ὁποῖον γράφομεν ὑπὸ τὰς ἑκατοντάδας· τέλος πάντων 7 καὶ 1 κάμνον 8, τὸ ὁποῖον γράφομεν ὑπὸ τὰς χιλιάδας.

Ὁ ἀριθμὸς 8987 ὁ εὐρεθεὶς ἀπ' αὐτὴν τὴν πρᾶξιν εἶναι τὸ ζητούμενον κεφάλαιον τῶν δεδομένων ἀριθμῶν, ἐπειδὴ περιέχει τὰς ὁποίας αὐτοὶ ἔχουν μονάδας, δεκάδας, ἑκατοντάδας καὶ χιλιάδας.

Ἄς προσθέσωμεν ἀκόμη τοὺς τέσσαρας ἀριθμοὺς 5047, 859, 3507, 846· τοὺς γράφομεν ἐδῶ εἰς

τὸ πλευρὸν, καὶ λέγομεν ἀρχίζοντες ἀπὸ τὰς μονάδας :  
 7 καὶ 9 κάμνουν 16 καὶ 7 κάμνουν 23 καὶ 6 κάμνουν  
 29· γράφομεν τὰς 9 ἀπλᾶς μονάδας ὑπὸ 5047  
 τὴν πρώτην στήλην, καὶ κρατοῦμεν τὰς 859  
 δύο δεκάδας διὰ νὰ τὰς ἐνώσωμεν μετὰ τὰ ψη- 3507  
 φία τῆς ἀκολουθοῦσας στήλης, ἐπειδὴ καὶ αὐ- 846  
 τὰ παρασταίνον δεκάδας. 10256

Περνώμεντες εἰς ταύτην τὴν στήλην, λέγομεν, 2  
 τὰ κρατηθέντα καὶ 4 κάμνουν 6 καὶ 5 κάμνουν 11  
 καὶ 0 κάμνουν 11 καὶ 4 κάμνουν 15, γράφομεν 5  
 εἰς τὴν τάξιν τῶν δεκάδων, καὶ κρατοῦμεν 1 ἑκατον-  
 τὰδα, τὴν ὁποίαν φέρομεν εἰς τὴν στήλην τῶν ἑκατον-  
 τὰδων.

Ἐργαζόμενοι εἰς ταύτην τὴν στήλην, ὡς καὶ  
 εἰς τὰς προηγουμένας εὐρίσχομεν 22 ἑκατοντάδας ἢ 2 ἑκα-  
 τοντάδας, τὰς ὁποίας γράφομεν ὑπὸ τὰς ἑκατοντάδας,  
 καὶ 2 χιλιάδας τὰς ὁποίας κρατοῦμεν, διὰ νὰ τὰς  
 φέρωμεν εἰς τὴν στήλην τῶν χιλιάδων.

Τέλος πάντων 2 τὰ κρατηθέντα καὶ 5 κάμνουν  
 7 καὶ 3 κάμνουν 10· θέτομεν 0 ὑπὸ τὴν στήλην τῶν  
 χιλιάδων καὶ τὴν 1 δεκάδα χιλιάδος γράφομεν ὑπὸ  
 τὴν ἐννοουμένην στήλην τῶν δεκάδων χιλιάδος. Ἐχο-  
 μεν λοιπὸν τὸ ζητούμενον κεφάλαιον 10259.

Γενικὸς Κανὼν. Διὰ νὰ προσθέσωμεν πολ-  
 λούς ἀριθμούς μεταξὺ των γράφομεν αὐτοὺς τὸν ἕνα  
 ὑπὸ τὸν ἄλλον οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες τῆς αὐτῆς  
 τάξεως νὰ εὐρίσκονται εἰς τὴν αὐτὴν στήλην, καὶ ὑπο-  
 γραμμίζομεν, προσθέτομεν ἔπειτα διαδοχικῶς ὅσα  
 ψηφία συνθέτουν ἐκάστην κατὰ κάθετον στήλην, ἀρ-  
 χίζοντες ἀπὸ τὴν στήλην τῶν ἀπλῶν μονάδων, περ-  
 νῶμεντες δὲ εἰς τὰς ἀριστεράς αὐτῆς στήλας, ὑπογρά-  
 φομεν τὸ κεφάλαιον ἐκάστης στήλης, ἂν τοῦτο ἐκ-  
 φράζεται μετὰ ἕν μόνον ψηφίον, ἂν ὅμως ὑπερβαίῃ

τὸ θ, εἰς τὴν ὁποίαν περίστασιν ἐκφράζεται μὲ πῆλη φηψία, τῶν ὁποίων τὸ εἰς τὰ δεξιὰ τελευταῖον ἐκφράζει τὰς μονάδας αὐτῆς τῆς στήλης, καὶ τὰ ἄλλα, τὰ ὁποῖα εἶναι εἰς τὰ ἀριστερὰ τὰς δεκάδας τῆς αὐτῆς τάξεως, γράφομεν μόνον τὸ ψηφίον τῶν μονάδων ὑπὸ τὴν στήλην, τὰς δὲ δεκάδας κρατοῦμεν διὰ τὰ τὰς προσθέσωμεν μὲ τὰ ψηφία τῆς ἀμέσου ἀριστερᾶς στήλης, καὶ ὅταν ἐκτελέσωμεν τὴν αὐτὴν πράξιν εἰς ὅλας τὰς στήλας, θέλομεν εὖρε ὑπὸ τὴν γραμμὴν τὸ ζητούμενον κεφάλαιον, ἐπειδὴ τοῦτο θέλει προκύψει ἐκ τῆς ἐνώσεως τῶν μονάδων, δεκάδων, ἑκατοντάδων κ. τ. λ. αἱ ὁποῖαι ἐμβαίνουν εἰς τοὺς προτεθέντας ἀριθμούς.

§. 11. Παρατήρησις. Ἐὰν τὸ μεγαλύτερον κεφάλαιον τῶν εἰς ἐκάστην στήλην περιεχομένων ψηφίων ἦτον θ, ἀδιαφόρως ἀρχίζομεν τὴν πράξιν ἀπὸ τὴν πρόσθεσιν τῶν ἀπλῶν μονάδων, ἢ τῶν μονάδων ἀνωτέρου εἴδους· ἀλλ' ἐπειδὴ συμβαίνει συχνότερα νὰ ὑπερβαίνωσι τὸ θ πολλὰ τοιαῦτα κεφάλαια, εἰς ἀρχίζομεν ἀπὸ τ' ἀριστερὰ, ἢ θέλαμεν ὑποχρεόνεσθαι συχνὰ νὰ γυρίζωμεν ὀπίσω, διὰ τὰ διορθώνωμεν ψηφίον τι, τὸ ὁποῖον εἶχαμεν γράψει, καὶ νὰ τὸ αὐξάνωμεν ἀπὸ τόσας μονάδας, ὅσας ἠθέλαμεν λαμβάνει δεκάδας ἀπὸ τὰς μονάδας τῆς ἀκολουθοῦσας στήλης, ὅταν εἰς αὐτὴν ἐργαζώμεθα. Ἴδου λοιπὸν διατὶ πάντοτε πρέπει ν' ἀρχίζομεν καλλίτερα ἀπὸ τὰ δεξιὰ καὶ ὄχι ἀπὸ τ' ἀριστερὰ.

### Περὶ τῆς ἀφαιρέσεως.

§. 12. Τὸ ν' ἀφαιρέσωμεν ἀριθμὸν ἀπὸ ἄλλον, συνίσταται εἰς τὸ νὰ ζητήσωμεν τὴν ὑπεροχὴν τοῦ μεγαλύτερου ἐπὶ τοῦ μικροτέρου. Τὰ ἐξαγόμενα τὰς

της τῆς πράξεως καλεῖται ὑπόλοιπον, ὑπεροχή, ἢ διαφορά. Ὄταν οἱ δεδομένοι ἀριθμοὶ ἔχωσιν ἓν μόνον ψηφίον, ἢ ἀφαίρεσις εἶναι εὐκόλος, ὡς ἡ διαφορά τοῦ 9 ἀπὸ 6 εἶναι 3, ἢ ἀφαιρουμένου 6 ἀπὸ 9 μένουν 3· παρομοίως 5 ἀπὸ 7 μένουν 2.

Δυναμέθα εὐκόλως νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀριθμὸν ἐκφραζόμενον μὲ ἓν μόνον ψηφίον ἀπὸ ἄλλον μὴ ὑπερβαίνοντα τὸ εἴκοσιν, ὡς ἀφαιρουμένου 7 ἀπὸ 13 μένουν 6, ἐπειδὴ 7 καὶ 6 κάμνουν 13· παρομοίως 9 ἀπὸ 17 μένουν 8, ἐπειδὴ 8 καὶ 9 κάμνουν 17.

Αὗται αἱ πράξεις, αἱ ὁποῖαι ὑποθέτουν μόνον τὴν γύμνασιν τῆς μνήμης ἐπάνω εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν μὲ ἓν μόνον ψηφίον ἀριθμῶν, θέλουν μᾶς χρησιμεύσει ὡς βάσις εἰς τὴν ἀφαίρεσιν τῶν μὲ πολλά ψηφία ἀριθμῶν.

Ἄς ἀφαιρέσωμεν κατὰ πρῶτον 5467 ἀπὸ 8789.

Τεθέντος τοῦ μικροτέρου ἀριθμοῦ ὑπὸ τὸν μείζονα, καὶ ὑποσημειωθείσης τῆς ὀριζοντίου γραμμῆς, λέγομεν ἀρξάμενοι ἐκ τῶν ἀπλῶν μονάδων, 7 ἀπὸ 9 μένουν 2, τὸ ὅποῖον γράφομεν  $\begin{array}{r} 8789 \\ \underline{\phantom{8789}} \\ 5467 \end{array}$  ὑπὸ τὴν στήλην τῶν μονάδων· περνῶντες εἰς τὰς δεκάδας λέγομεν 6 ἀπὸ 8 μένουν  $\begin{array}{r} 8789 \\ \underline{\phantom{8789}} \\ 5467 \\ \underline{\phantom{5467}} \\ 3322 \end{array}$  2, τὸ ὅποῖον γράφομεν ὑπὸ τὴν τάξιν τῶν δεκάδων, ἐκτελοῦμεν τὸ αὐτὸ ἐπὶ τῶν ἑκατοντάδων καὶ χιλιάδων· 4 ἀπὸ 7 μένουν 3, 5 ἀπὸ 8 μένουν 3, τὸ ὅποῖον δίδει τέλος πάντων 3322 τὸ ζητούμενον ὑπόλοιπον.

Τῷ ὄντι ἐκ τῆς ἰδίας φύσεως τῶν ἐκτελουμένων πράξεων βλέπομεν, ὅτι ὁ μεγαλύτερος ἀριθμὸς περιέχει περισσότερον παρὰ τὸν δεύτερον 2 ἀπλᾶς μονάδας, πλεόν 2 δεκάδας, πλεόν 3 ἑκατοντάδας, πλεόν 3 μονάδας χιλιάδος, καὶ διὰ τοῦτο ὑπερβαίνει τὸν μικρότερον κατὰ 3322.

Ἄς λάβωμεν διὰ δεύτερον παράδειγμα νὰ εὔρωμεν τὴν ὑπάρχουσαν διαφορὰν μεταξὺ τῶν δύο ἀριθμῶν 83456, καὶ 28784.

Θέτοντες τοὺς δύο τούτους ἀριθμοὺς ὡς εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα λέγομεν κατὰ πρῶτον, 4 ἀπὸ 6, μένουσιν 2, τὸ ὁποῖον γράφομεν ὑπὸ τὰς 83456

μονάδας.

28784

54672

Ἄλλα περνῶντες εἰς τὴν στήλην τῶν δεκάδων ἀπαντῶμεν δυσκολίαν· ὁ κάτω χαρακτήρ εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν ἄνω, καὶ διὰ τοῦτο εἶναι ἀδύνατον νὰ ἀφαιρεθῇ. Διὰ νὰ ἐξαλείψωμεν ταύτην τὴν δυσκολίαν, δανειζόμεθα νοερῶς ἀπὸ τὸν χαρακτήρα τῶν ἑκατοντάδων μίαν ἑκατοντάδα, ἣτις κάμνει δέκα δεκάδας, τὰς ὁποίας ἐνόησαντες μὲ τὰς ὁποίας ἔχομεν πέντε δεκάδας, λαμβάνομεν 15 δεκάδας, καὶ λέγομεν 8 ἀφαιρουμένου ἀπὸ τὰ 15, μένουσιν 7, τὸ ὁποῖον γράφομεν ὑπὸ τὴν στήλην τῶν δεκάδων.

Περνῶντες εἰς τὴν στήλην τῶν ἑκατοντάδων παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ ἄνω χαρακτήρ 4 πρέπει νὰ ἐλαττωθῇ ἀπὸ 1, ἐπειδὴ ἐδανείσθημεν ταύτην τὴν μονάδα εἰς τὴν προτέραν ἀφαίρεσιν· τότε λέγομεν 7 ἀπὸ 3 εἶναι ἀδύνατον νὰ ἀφαιρεθῇ, ἀλλὰ δανειζόμενοι ὡς ἀνωτέρω μίαν χιλιάδα, ἰσοδυναμοῦσαν μὲ ὅσα ἑκατοντάδας, καὶ οὕτω σχηματίζοντες 13 ἑκατοντάδας. ἔπειτα ἀφαιροῦντες 7 ἀπὸ 13, γράφομεν τὸ ὑπόλοιπον 6 ὑπὸ τὴν τάξιν τῶν ἑκατοντάδων.

Περνῶντες δὲ εἰς τὰς χιλιάδας, καὶ μὴ δυναμένοι νὰ ἀφαιρέσωμεν 8 ἀπὸ 2, ἀλλ' 8 ἀπὸ 12, ἔχομεν 4, τὸ ὁποῖον γράφομεν ὑπὸ τὴν τάξιν τῶν χιλιάδων.

Τέλος πάντων ἐπειδὴ ὁ χαρακτήρ 8 τῶν δεκάδων τῶν χιλιάδων πρέπει, ἐπειδὴ ἐδανείσθημεν, νὰ

ἐκφρασθῆ δια 7, λέγομεν 2 ἀπὸ 7 μένου 5· οὕτω τὸ ζητούμενον ὑπόλοιπον ἢ ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μείζονος ἀριθμοῦ ἐπὶ τοῦ ἐλάσσονος εἶναι 54672.

Διὰ τὰ καταλάβωμεν τίνι τρόπῳ διὰ τούτου τοῦ μέτρου φθάνομεν εἰς τὸ ζητούμενον, ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι ἐν ᾧ ἐκτελοῦμεν τὰς εἰδικὰς ἀφαιρέσεις δυνάμεθα νὰ διατάξωμεν τοὺς δύο ἀριθμοὺς κατὰ τὸν ἀκόλουθον τρόπον.

	δεκάδες	χιλιάδος	χιλιάδες	ἐκατοντάδος	δεκάδες	μονάδες.
α	ος ἀριθμός.	7	12	13	15	6
β	ος ἀριθμός.	2	8	7	8	4
		5	4	6	7	2

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι ὁ ἀνωτέρω ἀριθμὸς περιέχει περισσότερο παρά τὸν κάτω ἀριθμὸν, 2 μονάδας, 7 δεκάδας, 6 ἐκατοντάδας, 4 χιλιάδας καὶ 5 δεκάδας χιλιάδος, ἢ τὸν ὑπερβαίνει κατὰ 54672. — Ἐστω τρίτον παράδειγμα νὰ ἀφαιρέσωμεν 158429 ἀπὸ 300405. Ἐπειδὴ 9, ψηφίον τῶν μονάδων τοῦ κάτω ἀριθμοῦ εἶναι μεγαλύτερον παρά τὸ ἀνταποκρινόμενον ψηφίον 5 τοῦ ἄνω ἀριθμοῦ, πρέπει νὰ δανεισθῶμεν μίαν δεκάδα ἀπὸ τὸ πρῶτον εἰς τ' ἀριστερὰ ψηφίον, ἀλλ' ἐπειδὴ τοῦτο εἶναι 0, πρέπει νὰ συντρέξωμεν εἰς τὸ ψηφίον 4 τῶν ἐκατοντάδων, ἀπὸ τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν 1 μονάδα, ἥτις ἰσοδυναμεῖ μὲ δέκα δεκάδας, καὶ ἐπειδὴ ἔχομεν ἀνάγκην ἀπὸ μίαν μόνην δεκάδα παραιτοῦμεν 9 ἄνω τοῦ 0· μετὰ ταῦτα προσθέτομεν τὴν 1 δεκάδα ἢ τὰς 10 μονάδας μὲ τὰς 5 μονάδας, καὶ οὕτως ἔχομεν 15· λέγομεν 9 ἀπὸ 15 μένου 6, τὸ ὁποῖον γράφομεν ὑπὸ τὰς μονάδας.

Περνώντες εἰς τὰς δεκάδας, λέγομεν, 2 ἀπὸ 9 μένου 7. Διὰ δὲ τὰς ἑκατοντάδας, ἐπειδὴ τὸ ἄνω ψηφίον 4 δὲν ἀξίζει πλέον παρὰ 3, ἐξ αἰτίας τοῦ δανείσματος, διὰ τὸ ὅποσον δὲν δυνάμεθα νὰ ἀφαιρέσωμεν 4 ἀπὸ τὸ 3, δανειζόμεθα ἀπὸ τὸ πρῶτον ψηφίον κατὰ τὰ ἀριστερά· ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ ψηφίον τοῦτο, καὶ τὸ εἰρισκόμενον εἰς τὰ ἀριστερά του εἶναι μηδενικά, δανειζόμεθα μίαν μονάδα ἀπὸ τὸ σημαντικὸν ψηφίον 3· αὕτη ἡ μονὰς ἰσοδυναμεῖ μὲ 10 τῆς ἀκολουθοῦς τάξεως, καὶ 100 τῆς τάξεως τῶν χιλιάδων, καὶ ἐπειδὴ ἔχομεν ἀνάγκην ἀπὸ μίαν μονάδα ταύτης τῆς τάξεως, παραιτοῦμεν 99, τὰς ὁποίας γράφομεν ἐπάνω τῶν δύο μηδενικῶν· προσθέτοντες δὲ μίαν χιλιάδα εἰς τὰς ἑκατοντάδας σχηματίζομεν 13, καὶ λέγομεν 4 ἀπὸ τὰ 13 μένου 9, τὰς ὁποίας γράφομεν ὑπὸ τὴν στήλην τῶν ἑκατοντάδων.

Εἰς τὰς ἀκολουθοῦσας δύο ἀφαιρέσεις, ἐπειδὴ ἕκαστον τῶν μηδενικῶν πληροῦται μὲ ἐν 9, λέγομεν 8 ἀπὸ 9 μένει 1, καὶ 5 ἀπὸ 9 μένου 4.

Περνώντες δὲ εἰς τὴν πρώτην ἐν ἀριστερᾷ στήλην λέγομεν 1 ἀπὸ 2 (ἐπειδὴ τὸ ψηφίον 3 ἐλαττοῦται ἀπὸ 1) μένει 1· καὶ οὕτως ἔχομεν τὸ ζητούμενον ὑπόλοιπον 141976.

Τῷ ὄντι, εἰς παρατηρήσωμεν τίνι τρόπῳ ὁ μεγαλύτερος ἀριθμὸς ἀνελύθη, δυνάμεθα νὰ διατάξωμεν, ὡς ἀκολουθεῖ, τὴν πράξιν.

	ἑκατοντάδες χιλιάδος·	δεκάδες χιλιάδος·	χιλιάδες·	ἑκατοντάδες·	δεκάδες·	μονάδες·
$4^{ος}$ ἀριθμός.	2	9	9	13	9	15
$3^{ος}$ ἀριθμός.	1	5	8	4	2	9
	1	4	1	9	7	6

Λοιπὸν ὁ ἄνω ἀριθμὸς ὑπερβαίνει τὸν κάτω ἀριθμὸν ἀπὸ 6 μονάδας, 7 δεκάδας, 9 ἑκατοντάδας, 1



χιλιάδα, 4 δεκάδας χιλιάδος, 1 εκατοντάδα χιλιάδος ἢ 141976.

Γενικός Κανών. Διὰ τὰ ἐκτελέσωμεν τὴν ἀφαίρεσιν δύο ἀριθμῶν θέτομεν τὸν μικρότερον ἀριθμὸν ὑπὸ τὸν μεγαλύτερον οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες τῆς ἰδίας τάξεως νὰ εὐρίσκονται εἰς τὴν αὐτὴν στήλην, μετὰ ταῦτα ὑπογραμμίζομεν, καὶ ἀφαιροῦμεν διαδοχικῶς τὰς μονάδας ἀπὸ τὰς μονάδας, τὰς δεκάδας ἀπὸ τὰς δεκάδας, τὰς εκατοντάδας ἀπὸ τὰς εκατοντάδας κ. τ. λ. καὶ γράφομεν τὰ μερικὰ ὑπόλοιπα, τὸ ἓν εἰς τὰ ἀριστερὰ τοῦ ἄλλου· ὁ δὲ σχηματιζόμενος ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τοιούτων ὑπολοίπων ἀριθμὸς εἶναι τὸ ὅλον ζητούμενον ὑπόλοιπον.

Ὅταν τὸ κάτω ψηφίον ᾖναι μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ ἄνω αὐτοῦ, αὐξάνομεν νοερῶς κατὰ 10 μονάδας, καὶ ἐλαττοῦμεν τὸ ψηφίον τὸ ὁποῖον εὐρίσκεται εἰς τὰ ἀριστερά του· κατὰ μονάδα.

Ἐὰν ἀμέσως εἰς τὰ ἀριστερὰ τοῦ ἄνω ψηφίου μικροτέρου ἀπὸ τὸ κάτω ἀντικείμενον εὐρίσκεται ἓν ἢ πολλὰ μηδενικά, αὐξάνομεν πάντοτε νοερῶς τὸ ἄνω ἀπὸ 10 μονάδας, ὅμως εἰς τὰς ἀκολουθούσας ἀφαιρέσεις μεταχειριζόμεθα τὰ μηδενικά ὡς 9, καὶ ἐλαττοῦμεν ἀπὸ μίαν μονάδα τὸ ἄνω σημαντικὸν ψηφίον τὸ ἀμέσως εἰς τὰ ἀριστερὰ τῶν μηδενικῶν εὐρισκόμενον.

Εὐρίσκομεν κατὰ τὴν κοινὴν μέθοδον ὅτι εἰναι

ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ . . . . .	603000401
ἀφαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν . . . . .	305724787
τὸ ἀποτέλεσμα τῆς πράξεως εἶναι	297275614

§. 13. Πρώτη Παρατήρησις. Ἐὰν ἕκαστον ψηφίον τοῦ κάτω ἀριθμοῦ εἶναι μικρότερον παρὰ τὸ τοῦ ἀνταποκρινομένου ψηφίου, εἶναι τὸ αὐτὸ νὰ ἀρχίσωμεν τὴν ἀφαίρεσιν ἢ ἀπὸ τὰ ἀριστερὰ ἢ ἀπὸ τὰ δεξιὰ.

ἀλλ' ἐπειδὴ ἀκολουθεῖ πολλάκις ἐν τῶν κάτω ψηφίων νὰ ὑπερβαίνη τὸ ἄνω ψηφίον, ἢ μερικὴ ἀφαίρεσις ἐκτελεῖται μὲ δανεισμὸν ἀπὸ τὸ ἄνω ψηφίον, ἢ ἀπὸ ἄλλο κατὰ τ' ἀριστερὰ ἐκείνου, ἐπὶ τοῦ ὁποῖου ἐργαζόμεθα· διὰ τοῦτο πρέπει νὰ ἀρχίζωμεν ἀπὸ τὰ ἀριστερὰ, διὰ νὰ ἠμπορῶμεν πάντοτε νὰ δανειζώμεθα, ὅταν ἡ ἀνάγκη τὸ καλέσῃ.

§. 14. Δευτέρα Παρατήρησις. Βλέπομεν, ὅτι εἶναι τὸ αὐτὸ εἴτε ἂν ἐλαττώσωμεν ἀπὸ μίαν μονάδα τὸ ψηφίον ἐκ τοῦ ὁποῖου ἐδανείσθημεν, εἴτε ἂν παραιτήσωμεν τὸ ψηφίον, ὡς εὐρίσκεται, αὐξάνοντες ὅμως τὸ κάτω αὐτοῦ ἀνταποκρινόμενον ψηφίον ἀπὸ μίαν μονάδα· οὗτος ὁ τρόπος τῆς πράξεως εἶναι ἐν γενεῖ πλεον σύντομος εἰς τὰς ἐφαρμογὰς.

Οὕτως εἰς τὸ τελευταῖον παράδειγμα, ἀφ' οὗ εἶπωμεν διὰ τὰς ἀπλᾶς μονάδας 7 ἀπὸ 11 μένουν 4, ἀντὶ νὰ εἶπωμεν διὰ τὰς δεκάδας 8 ἀπὸ τὰ 9 μένουν 1, λέγομεν 9 ἀπὸ 10 μένει 1, παρομοίως ἀντὶ νὰ εἶπωμεν διὰ τὰς ἑκατοντάδας 7 ἀπὸ 13 μένουν 6, λέγομεν 8 ἀπὸ 14 μένουν 6, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Ὅμως ὅταν πράττωμεν ταύτην τὴν μεταβολὴν, πρέπει νὰ παρατηρῶμεν μὲ ἀκρίβειαν νὰ μὴν αὐξάνωμεν τὸ κάτω ψηφίον, παρὰ ὅταν εἰς τὴν προτέραν ἀφαίρεσιν, ἐδανείσθημεν.

## Βάσανοι τῆς Προσθέσεως καὶ Ἀφαιρέσεως.

§. 15. Καλεῖται βάσανος μιᾶς ἀριθμητικῆς πράξεως πρᾶξις τις ἄλλη, τὴν ὁποίαν κάμνομεν διὰ νὰ βεβαιώσωμεν τὴν ἀκρίβειαν τῆς πρώτης.

Τὴν βάσανον τῆς προσθέσεως κάμνομεν, προσθέτοντες ἐκ νέου, πλὴν ἀρχίζοντες ἀπὸ τὰ ἀριστερὰ, τοὺς ἀριθμοὺς, τοὺς ὁποίους εἶχαμεν προσθέσει, καὶ ἀθροίζοντες τὰ ψηφία τὰ εὕρισκόμενα εἰς τὴν πρώτην ἐν ἀριστερᾷ στήλῃν, τὰ ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸ μέρος τὸ ἀνταποκρινόμενον εἰς τὸ ὅλον κεφάλαιον, καὶ γράφομεν ὑπ' αὐτοῦ τὸ ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον ἀνάγομεν νηθεῶς εἰς δεκάδας τοῦ ἀκολουθοῦ ψηφίου, διὰ τὰ τὰς ἐνώσωμεν μὲ τὰς μονάδας ταύτης τῆς τάξεως εἰς τὸ ὅλον κεφάλαιον. Κάμνομεν παρομοίως τὸ μερικὸν κεφάλαιον τῆς δευτέρας στήλης εἰς τὰ ἀριστερὰ, καὶ τὸ ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸ μέρος τοῦ ὅλου κεφαλαίου, τὸ ὁποῖον εἰς αὐτὸ ἀνταποκρίνεται· ἔξακολουθοῦμεν δὲ οὕτως ἕως εἰς τὴν τελευταίαν στήλῃν, τῆς ὁποίας τὸ ὅλον κεφάλαιον ἀφαιρούμενον δὲν πρέπει νὰ ἀφίγη κανὲν ὑπόλοιπον.

Οὕτως ἀφ' οὗ εὐρήκαμεν, ὅτι οἱ τέσσαρες ἀριθμοί

$$\begin{array}{r}
 5047 \\
 859 \\
 3507 \\
 846 \\
 \hline
 \text{ἔχουσι κεφάλαιον } 10259 \\
 \hline
 2128
 \end{array}$$

διὰ τὰ δοκιμάσωμεν τὸ ἐξαγόμενον 10259, προσθέτομεν τοὺς ἰδίους ἀριθμοὺς ἀρχίζοντες ἀπὸ τὰ ἀριστερὰ, καὶ λέγομεν: 5 καὶ 3 κάμνου 8 χιλιάδες, αἱ ὁποῖαι ἀφαιρούμενα ἀπὸ τὰς 10 χιλιάδας δίδουσιν ὑπόλοιπον 2 χιλιάδας, αἱ ὁποῖαι ὁμοῦ μὲ τὰς δύο ἑκατοντάδας κάμνου 22 ἑκατοντάδες, μετὰ ταῦτα: 8 καὶ 5 κάμνου 13 καὶ 8 κάμνου 21, τὰς ὁποίας ἀφαι-

ρουντες από τὰς 22, ἔχομεν υπόλοιπον μίαν ἑκατοντάδα, ἣτις ἐνωμένη μετὰ τὰς 5 δεκάδας σχηματίζει 15 δεκάδας, 4 καὶ 5 κάμνου 9 καὶ 4 κάμνου 13. λοιπὸν 13 ἀπὸ τὰς 15 μένου 2, τὸ ὁποῖον συναπτόμενον μετὰ τὸ 9 σχηματίζει τὸ 29, τέλος πάντων 7 καὶ 9 κάμνου 16 καὶ 4 κάμνου 23 καὶ 6 κάμνου 29· 29 ἀπὸ 29 μένει μηδέν· λοιπὸν ἡ πράξις εἶναι ὀρθή.

Ἡ Βάσανος τῆς ἀφαιρέσεως γίνεται, ὅταν προσθεῖται εἰς τὸν μικρότερον ἀριθμὸν τὸ υπόλοιπον, τὸ ὁποῖον ἐπροσδιορίσαμεν διὰ τῆς πράξεως· καὶ εἶναι φανερόν, ὅτι πρέπει νὰ ξαναεῦρωμεν τὸν μεγαλύτερον ἀριθμὸν, ἐπειδὴ τὸ υπόλοιπον τοῦτο ἄλλο δὲν εἶναι, παρὰ ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μεγαλητέρου ἐπὶ τοῦ μικροτέρου.

Οὕτως εἰς τὸ παράδειγμα . 83456  
 ἀφ' οὗ ἤυραμεν, ὅτι 54672 28784  
 εἶναι ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μεγαλητέ- 54672 υπόλοιπον  
 ρον ἀριθμοῦ ἐπὶ τοῦ μικροτέ- 83456 βάσανος.  
 ρου, εἰάν προσθέσωμεν αὐτὴν εἰς τὸν ἀριθμὸν 28784,  
 πρέπει νὰ εῦρωμεν 83456, καθὼς τῶ ὄντι ἀκο-  
 λουθεῖ.

§. 10. Ἴδου καὶ νέα παραδείγματα προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως μετὰ τὰς βασάνους των.

Π ρ ο σ θ έ σ ε ι ς .

83054	700548
256870	897597
748759	6588
90874	69764
130909	407300
8746	987846
<u>1319212</u>	<u>1207047</u>
824888	<u>4276690</u>
	824888

Ε.Υ.Δ. της Κ.τ.Π.  
 ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

Ἀφαιρέσεις.

4073050002	20004001003
2803767080	8405128605
1269282976	11598872398
4073050002	20004001003

**Πρόβλημα.** Εἷς τραπεζίτης εἶχεν εἰς τὸ κιβώτιόν του ποσότητα 65750 φράγκων, ἀλλ' ἔκαμε πολλάς πληρωμάς· διότι ἔδωκεν εἰς ἕνα ἄνθρωπον 13259 φράγκα, εἰς ἄλλον 18704 φράγκα, καὶ εἰς ἄλλον πάλιν 22050 φράγκα, παρομοίως εἰς ἕνα τέταρτον 9850, καὶ ἐπισυμεῖ γὰ μάρτη τὴν τοῦ κιβωτίου ὑστερον ἀφ' ὅλας ταύτας τὰς πληρωμάς κατάστασιν.

**Λύσις.** Ἀφοῦ ἐνώσωμεν τὰ τέσσαρα ἀθροίσματα τὰ διαδοχικῶς πληρωμένα, ἀφαιροῦμεν τὸ κεφάλαιον ἀπὸ τὴν ποσότητα, τὴν ὁποίαν εἶχε, καὶ τὸ ἐξαγόμενον ἐκ ταύτης τῆς ἀφαιρέσεως θέλει εἶναι ἡ ποσότης τῶν χρημάτων, ἣτις τοῦ ἔμεινεν εἰς τὸ κιβώτιον.

Πίναξ τῶν πράξεων.

13259	65750	Ποσότης τῶν χρημ., τὴν ὁποίαν εἶχε.
18704	63863	Κεφάλαιον, τὸ ὁποῖον ἐπλήρωσε.
22050	1887	Εἶναι ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον τοῦ ἔμεινε.
9850		
63863		
2120		

λοιπὸν μένουσιν εἰς τὸν τραπεζίτην 1887 φράγκα.

Βλέπομεν, ὅτι εἰς τὴν ἐκτέλεσιν τῆς ἄνω εἰρημέ-  
νης προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως, ἐθεωρήσαμεν τοὺς  
δεδομένους ἀριθμούς, ὡς ἀφηρημένους, μ' ὅλον ὅτι  
ἐξεύρομεν, ὅτι εἶναι ἀριθμοὶ συγκεκριμένοι, καὶ τοῦ-  
το ἐκ τῆς ἐκφράσεως τοῦ προβλήματος, ἀλλὰ φθά-  
σαντες εἰς τὸ ἐξαγόμενον 1887, ἐδώκαμεν εἰς αὐτὸ  
τὸ ὄνομα τοῦ εἶδους τῶν μονάδων, τὰς ὁποίας οἱ ἀριθ-  
μοὶ ἐπαρρησίαζον εἰς τὴν ἐκφρασιν τοῦ ζητήματος· οὗ-  
τω πρέπει πάντοτε νὰ κάμνωμεν, ὅταν θέλωμεν νὰ  
ἐφαρμόσωμεν τὰς πράξεις τῶν ἐργασιῶν εἰς ζητήματα  
γεννώμενα ἀπὸ τὰς χρεῖας τῆς κοινωνίας. Ἐπειδὴ δὲ  
αὗται αἱ πράξεις εἶναι ἀνεξάρτητοι ἀπὸ τὴν φύσιν τῶν  
ἀριθμῶν, θεωροῦμεν αὐτοὺς ὡς ἀφηρημένους· ἀρκεῖ  
νὰ δώσωμεν μετὰ ταῦτα εἰς τὸ τελικὸν ἐξαγόμενον τὸ  
ὄνομα τῆς μονάδος, τὴν ὁποίαν παριστάνει ἡ ἐκφρα-  
σις τοῦ ζητήματος.

### Περὶ Πολλαπλασιαμοῦ.

§. 17. Τὸ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμὸν τινα  
ἐπ' ἄλλον, εἶναι νὰ (ἀρ. 9.) συνθέσωμεν τρίτον ἀριθ-  
μὸν μὲ τὸν πρῶτον, ὡς ὁ δεύτερος συντίθεται μὲ  
τὴν μονάδα. Λοιπὸν, εἴαν οἱ δύο δεδομένοι ἀριθμοὶ  
ᾄναι ἀκέρατοι, εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν αὐτῶν πρέ-  
πει νὰ λάβωμεν τὸν πρῶτον τοσάκις, ὅσας μονάδας  
ἔχει ὁ δεύτερος.

Καλεῖται γινόμενον, τὸ ἐξαγόμενον ἐνὸς πολλα-  
πλασιαμοῦ, πολλαπλασιαστέος ὁ ἀριθμὸς, ὅστις πρέ-  
πει νὰ πολλαπλασιασθῇ, καὶ πολλαπλασιαστής ἐκεῖ-  
νος ἐπὶ τὸν ὁποῖον πολλαπλασιάζομεν, ἢ ἐκεῖνος, ὅστις  
παρασταίνει ποσάκις πρέπει νὰ ληφθῇ ὁ πρῶτος· οἱ  
δύο ἀριθμοὶ ὁμοῦ καλοῦνται παράγοντες τοῦ γινομένου.