Κάμνομεν τότε $A = 30000$, $\nu = 7$, $\psi = 6$,

καὶ ὁ τύπος γίνεται $\alpha = \frac{30000}{(1,06)^7}$.

ὅθεν ἐφαρμόζοντες τοὺς λογαρίθμους, ἔχομεν

λογ. α = λογ. 30000 — 7 λογ. 1,06.

Ἔχομεν . . . . . λογ. 30000 = 4,77712·

προσέτι . λογ. 1,06 = 0,02531

ὅθεν . 7 λογ. 1,06 = 0,17717 . . — 0,17717

λοιπὸν . . . . λογ. α = 4,29995

καὶ ἐπομένως α = 19950 φρ.

Ἀναζητοῦντες δὲ τὴν παροῦσαν τιμὴν τῶν 30000 κατὰ τὸν κανόνα τῆς ἁπλῆς ὑφαιρέσεως (ὑφαίρ. ἐσωτερικῶς, ἰδὲ ἀρ. 228) εὑρίσκομεν, 21126,76 ἐξαγόμενον διαφέρον τοῦ προηγουμένου κατὰ 1176,76.

Δὲν ἐκτείνομεν περαιτέρω τὰς ἐφαρμογὰς τῶν λογαριθμικῶν πινάκων· τὰ προηγούμενα μᾶς εἶναι ἱκανὰ διὰ νὰ καταλάβωμεν τὴν μεγάλην αὐτῶν ὠφέλειαν.

Λογάριθμοι τῶν Κλασμάτων.

§. 274. Εἰς τὰ προηγούμενα ζητήματα ἐθεωρήσαμεν μόνον τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, ἢ τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν, μεγαλητέρων παρὰ τὴν μονάδα. Οἱ λογάριθμοι οὗτοι ἀποτελοῦν μέρος τοῦ πίνακος, τὸν σχηματισμὸν τοῦ ὁποίου ἐδείξαμεν (ἀρ. 261 καὶ 262), ἢ διὰ μέσου τούτων λαμβάνονται εὐκόλως, ὅταν οἱ ἀνταποκρινόμενοι ἀριθμοὶ ἦναι ἀκέραιοι καὶ ὑπερβαίνουν τῶν πινάκων τὰ ὅρια, ἢ ὅταν ἦναι κλασματικοί.

Ἠξεύρομεν δὲ ὅτι εἰς τὸ σύστημα τοῦ Βριγγίου οἱ λογάριθμοι ὅλων τῶν ἀριθμῶν, περὶ τῶν ὁποίων ὡμιλήσαμεν, περιλαμβάνονται μεταξὺ τοῦ 0 καὶ 1, 1 καὶ 2, 2 καὶ 3, 3 καὶ 4 . . . . δηλαδὴ ὅτι οἱ λογάριθμοι τῶν μεταξὺ τῆς μονάδος καὶ τοῦ ἀπείρου περιεχομένων ἀριθμῶν περιέχονται αὐτοὶ οἱ ἴδιοι μεταξὺ τοῦ 0 καὶ τοῦ ἀπείρου· οὕτως ὥστε δὲν ὑπάρχει ἀριθμὸς τόσον μικρὸς ἢ τόσον μέγας ἔχων σχέσιν μὲ τὴν μονάδα, ὁ ὁποῖος νὰ μὴ θεωρηθῇ, ὡς ὁ λογάριθμος ἀριθμοῦ μεγαλητέρου τῆς μονάδος.

Φυσικὰ λοιπὸν πρέπει νὰ ζητήσωμεν ἂν τὰ κλάσματα ἔχωσι λογαρίθμους, καὶ ἂν ἔχωσι πῶς τοὺς ἐκφράζουν.

Πρὸς ἐπίλυσιν τῶν ζητημάτων τούτων ἂς ἐπαναλάβωμεν τὴν δεκαπλῆν πρόοδον,

$\div\!\div$ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 . . . . . .,

καὶ ἂς παρατηρήσωμεν, ὅτι καθεῖς ὅρος εἶναι ἴσος μὲ τὸν προηγούμενόν του πολλαπλασιασθέντα ἐπὶ 10· καὶ ἀντιστρόφως καθεῖς ὅρος εἶναι ἴσος μὲ τὸν ἀκόλουθόν του, διαιρεθέντα διὰ 10. Ἑπομένως ἐὰν προεκτείνωμεν τὴν πρόοδον ταύτην κάτω τοῦ πρώτου ὅρου 1, διαιρουμένου διαδοχικῶς διὰ τῶν διαφόρων δυνάμεων τοῦ 10, δηλαδὴ διὰ 10, 100, 1000 . . . . ἐκ τοῦ ὁποίου ἔχομεν τὰ κλάσματα $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ . . . . ἐξάγομεν τὴν νέαν ταύτην πρόοδον,

$$\div\!\div \;\ldots\; \frac{1}{10000} : \frac{1}{1000} : \frac{1}{100} : \frac{1}{10} : 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 \;\ldots,$$

τὴν ὁποίαν ἠμποροῦμεν νὰ ὑποθέσωμεν ἀρχίζουσαν ἀπὸ κλάσμα τι $\frac{1}{10^{\nu}}$ τόσον, ὅσον θέλομεν μικρόν.

Ἀπὸ ἄλλο μέρος, ἂς ἐπαναλάβωμεν τὴν κατὰ διαφοράν,

$\div$ 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9 . . . .,

καὶ ἂς παρατηρήσωμεν, ὅτι καθεῖς ὅρος εἶναι ἴσος μὲ τὸν πρὸ ἑαυτοῦ, αὐξημένον ἀπὸ 1, καὶ ἀντιστρόφως καθεῖς ὅρος εἶναι ἴσος μὲ τὸν μεθ' ἑαυτὸν, ἠλαττωμένον ἀπὸ 1. Τούτου τεθέντος, ἂς ἐξακολουθήσωμεν τὴν πρόοδον ταύτην εἰς τ' ἀριστερὰ τοῦ πρώτου ὅρου 0 (ἢ κάτω τοῦ 0), ἀφαιροῦντες διαδοχικῶς 1, 2, 3, 4 . . . . ἀπὸ τὸν πρῶτον ὅρον. Ἐντεῦθεν προκύπτουν τὰ ἐξαγόμενα — 1, — 2, — 3, 4, ... καὶ ἐξ αὐτῶν ἡ νέα αὕτη κατὰ διαφορὰν πρόοδος,

$$\div \; \ldots \; -4 \,.\, -3 \,.\, -2 \,.\, -1 \,.\, 0 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \ldots,$$

τὴν ὁποίαν ἠμποροῦμεν νὰ ὑποθέσωμεν ἀρχίζουσαν ἀπὸ ὁποιονδήποτε ὅρον — ν, ὄντα ἀκέραιον ἀριθμὸν, καὶ τόσον, ὅσον θέλομεν, μεγάλον.

Ἐντεῦθεν λαμβάνομεν τὸ σύστημα τῶν δύο προόδων

$$\div\div \; \ldots \; \frac{1}{10000} : \frac{1}{1000} : \frac{1}{100} : \frac{1}{10} : 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : ;$$

$$\div \; \ldots \; -4 \,.\, -3 \,.\, -2 \,.\, 1 \,.\, 0 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \ldots ,$$

ἑκάστη τῶν ὁποίων διαιρεῖται εἰς δύο μέρη, ἀριθμουμένων ἐν ταὐτῷ καὶ τῶν ὅρων 1 καὶ 0.

Τὸ πρῶτον μέρος τῶν δύο προόδων, θεωρούμενον ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιὰ, εἶναι σύνθετον ἀπὸ ὅρους, οἱ ὁποῖοι περιλαμβάνουν ὅλους τοὺς παρὰ τὴν μονάδα μεγαλητέρους ἀριθμοὺς, καὶ τοὺς λογαρίθμους αὐτῶν· (οἱ λογάριθμοι οὗτοι, ὡς ἤδη ἐπαρατηρήθη, εἶναι ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ, οἱ περιεχόμενοι μεταξὺ τοῦ 0 καὶ τοῦ ἀπείρου).

Τὸ δεύτερον μέρος, θεωρούμενον ἐκδεξιῶν πρὸς τ' ἀριστερὰ, εἶναι σύνθετον ἀπὸ ὅρους, οἱ ὁποῖοι περιλαμβάνουν ὅλους τοὺς παρὰ τὴν μονάδα μικροτέρους ἀριθμοὺς, ὡς καὶ τοὺς λογαρίθμους αὐτῶν, οἱ ὁποῖοι εἶναι οἱ ἴδιοι λογάριθμοι τοῦ πρώτου μέρους, ἔχοντες πρὸ ἑαυτῶν τὸ σημεῖον —, τὸ ὁποῖον συντείνει εἰς τὸ νὰ διακρίνωμεν τοὺς λογαρίθμους τῶν παρὰ τὴν μονάδα μεγαλητέρων ἀριθμῶν, ἀπὸ τοὺς λογαρίθμους τοὺς ἀνταποκρινομένους εἰς μικροτέρους παρὰ τὴν μονάδα ἀριθμούς.

§. 275. Σ. Κ. Διὰ νὰ καταλάβωμεν καλὰ πῶς οἱ λογάριθμοι ὅλων τῶν ἀριθμῶν οἱ περιλαμβανόμενοι μεταξὺ τοῦ 1 καὶ $\frac{1}{10}$, τοῦ $\frac{1}{10}$ καὶ $\frac{1}{100}$ . . . . διαφέρουν μόνον κατὰ τὸ σημεῖον —, ἀπὸ τοὺς λογαρίθμους τοὺς περιλαμβανομένους μεταξὺ τοῦ 1 καὶ 10, τοῦ 10 καὶ 100 . . . . ἂς θεωρήσωμεν λόγου χάριν τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ περιλαμβανόμενον μεταξὺ 1 καὶ $\frac{1}{10}$, ὥστε νὰ ἦναι $\alpha < \beta$, ἀλλὰ $\beta < 10\,\alpha$.

Ἐπειδὴ $\frac{\alpha}{\beta}$ βάλλεται ὑπὸ τὴν μορφὴν $\dfrac{1}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)}$, ἕπεται, ὅτι $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι τὸ περιλαμβανόμενον μεταξὺ 1 καὶ $\frac{1}{10}$ κλάσματος, τὸ ὁποῖον ἀνταποκρίνεται εἰς τὸν κλασματικὸν ἀριθμὸν $\frac{\beta}{\alpha}$, ὅς τις περιλαμβάνεται μεταξὺ 1 καὶ $\frac{1}{10}$ κλάσματος, τὸ ὁποῖον ἀνταποκρίνεται εἰς τὸν κλασματικὸν ἀριθμὸν $\frac{\beta}{\alpha}$, ὅς τις περιλαμβάνεται μεταξὺ τοῦ 1 καὶ 10· καὶ πρόκειται νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι

$$\lambda o\gamma.\ \frac{\alpha}{\beta} = -\lambda o\gamma.\ \frac{\beta}{\alpha}.$$

Τῷ ὄντι ἠμποροῦμεν πάντοτε νὰ θεωρῶμεν $\frac{\beta}{\alpha}$, ὡς ἕνα τῶν ἀναλογικῶν μέσων, τοὺς ὁποίους ἔπρεπε νὰ ἐμβάλωμεν μεταξὺ 1 καὶ 10 διὰ νὰ σχηματίσωμεν ὅλους τοὺς ἀριθμοὺς, οἱ ὁποῖοι περιέχονται εἰς αὐτούς. Οὕτω λοιπὸν, καλουμένου μ τοῦ ὁλικοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἀναλογικῶν μέσων, οἱ ὁποῖοι ἐμβάλλονται μεταξὺ 1 καὶ 10, ν δὲ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ὅρων, οἱ ὁποῖοι περιέχονται μεταξὺ τοῦ πρώτου ὅρου 1, καὶ τοῦ ὅρου $\frac{\beta}{\alpha}$, προκύπτει (ἀρ. 249)

$$\frac{\beta}{\alpha}=1\times(\sqrt[\mu+1]{10})^{\nu}=(\sqrt[\mu+1]{10})^{\nu}.$$

Προσέτι ὁ ἐμβαλλόμενος μεταξὺ τοῦ 0 καὶ 1 διαφορικὸς μέσος, ὁ ὁποῖος ἀνταποκρίνεται εἰς τὸν ἀναλογικὸν μέσον $\frac{\beta}{\alpha}$ ἐκφράζεται (ἀρ. 243) διὰ

$$0+\frac{1}{\mu+1}\times\nu=\frac{\nu}{\mu+1}.$$

Οὕτω λοιπὸν ἔχομεν λογ. $\frac{\beta}{\alpha}$ ἢ λογ. $(\sqrt[\mu+1]{10})^{\nu}=\frac{\nu}{\mu+1}$, ἐξαγόμενον σύμφωνον μὲ τὰς ἰδιότητας τῶν ἀρ. 259 καὶ 260.

Παρατηροῦμεν ἤδη, ὅτι διὰ νὰ ἐξακολουθήσωμεν τὴν πρόοδον

$$\div\div\ 1:\sqrt[\mu+1]{10}:(\sqrt[\mu+1]{10})^{2}\ \ldots\ldots\ (\sqrt[\mu+1]{10})^{\nu}\ \ldots\ldots$$

10 . . . ., ἀριστερόθεν τοῦ πρώτου ὅρου 1, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὴν 1 διὰ τῆς $\bar{1}^{ης}$, $\bar{2}^{ας}$, $\bar{3}^{ης}$ . . . .

δυνάμεως τοῦ $\sqrt[\mu+1]{10}$, καὶ ἔχομεν διὰ τὸν $(\nu+1)^{\text{ον}}$. ὅρον τῆς νέας ταύτης προόδου,

$$\frac{1}{(\sqrt[\mu+1]{10})^{\nu}} \text{ ἢ } \frac{1}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)}, \text{ καὶ ἑπομένως } \frac{\alpha}{\beta}.$$

Προσέτι διὰ νὰ ἐξακολουθήσωμεν τὴν κατὰ διαφορὰν πρόοδον,

$$\div\, 0 . \frac{1}{\mu+1} . \frac{2}{\mu+1} \; . \; . \; . \; . \; . \; \frac{\nu}{\mu+1} . \; . \; . \; . \; 1,$$

ἀριστερόθεν τοῦ 0, πρέπει κατὰ διαδοχὴν ν' ἀφαιρῶμεν $\frac{1}{\mu+1}$, $\frac{2}{\mu+1}$, $\frac{3}{\mu+1}$ . . . . ., ὅθεν διὰ τὸν $(\nu+1)^{\text{ον}}$. ὅρον τῆς προόδου κατὰ διαφορὰν, δηλαδὴ διὰ λογ. $\frac{\alpha}{\beta}$, ἔχομεν $-\frac{\nu}{\mu+1}$, ἢ λογ. $\frac{\beta}{\alpha}$. Λοιπὸν τέλος πάντων λογ. $\frac{\alpha}{\beta} = -$ λογ. $\frac{\beta}{\alpha}$.

Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι ὁ λογάριθμος ἑνὸς κλάσματος εἶν' ἴσος μὲ τὸν λογάριθμον τοῦ κλάσματος, ἀντεστραμμένου, ἔχοντα τὸ σημεῖον. —

Οὕτω λογ. $\frac{3}{4} = -$ λογ. $\frac{4}{3} = -$ (λογ. 4 — λογ. 3).

λογ. $\frac{23}{47} = -$ λογ. $\frac{47}{23} = -$ (λογ. 47 — λογ. 23).

Ὅθεν λαμβάνεται ὁ κανών. Ἀφαίρεσε τὸν μικρότερον λογάριθμον ἀπὸ τὸν μεγαλήτερον, καὶ λάβε τὸ ἐξαγόμενον μὲ σημεῖον —.

§. 276. Μετὰ τὰς γνώσεις ταύτας, ἂς κάμωμεν καί τινας ἐφαρμογάς.

$1^{ον}$. Ζητεῖται διὰ λογαρίθμων ἡ τιμὴ τοῦ γινομένου $\frac{3}{7}\times\frac{5}{12}\times\frac{11}{13}$.

Ἔχομεν (ἀρ. 56) $\frac{3}{7}\times\frac{5}{12}\times\frac{11}{13}=\frac{3\times5\times11}{7\times12\times13}$· ὅθεν (ἀρ. 257.) $\lambda o\gamma.\left(\frac{3}{7}\times\frac{5}{12}\times\frac{11}{13}\right)=-\lambda o\gamma.\frac{7\times12\times13}{3\times5\times11}$.
$=-$(λογ. 7+λογ. 12+λογ. 13 — λογ. 3 — λογ. 5 — λογ. 11)
ἢ μεταχειριζόμενοι τὰ ἀριθμητικὰ συμπληρώματα,
$=-$(λογ. 7 + λογ. 12 + λογ. 13 + συμπ. λογ. 3 + συμπ. λογ. 5 + συμπ. λογ. 11 — 30). Ἐκτελοῦντες δὲ τὴν ἐντὸς τῆς παρενθέσεως δεικνυομένην ἐργασίαν, γνωρίζομεν ὅτι

$$\lambda o\gamma.\left(\frac{3}{7}\times\frac{5}{12}\times\frac{11}{13}\right)=-0{,}82074.$$

Καὶ καλοῦντες x τὸν ἀριθμὸν, ὅςτις ἀνταποκρίνεται εἰς 0,82074, ἔχομεν (ἀρ. 275) $-0{,}82074=$ λογ. $\frac{1}{x}$.

Πρέπει λοιπὸν νὰ προσδιορίσωμεν x.

Ἀλλὰ κατὰ τὴν συσταθέντα κανόνα ἀρ. 268 εὑρίσκομεν

0,82074 = λογ. 6,6181· ὅθεν $x=6,\ 6181$

ἑπομένως $\frac{1}{x}$, εἴτε ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς ἔχει τιμὴν

$\frac{1}{6{,}6181}=0{,}1511.$

Κανὼν Γενικός. Διὰ νὰ εὕρωμεν εἰς ποῖον ἀριθμὸν ἀνταποκρίνεται λογάριθμός τις ἔχων τὸ σημεῖον —, ζητοῦμεν πρῶτον εἰς ποῖον ἀριθμὸν ἀνήκει ὁ λογάριθμος, μὴ θεωρουμένου τοῦ σημείου του, ἔπειτα διαιροῦμεν τὴν μονάδα διὰ τοῦ οὕτω ληφθέντος ἀριθμοῦ, καὶ τὸ πηλίκον, εἰς δεκαδικὰ μεταφερόμενον, εἶναι ὁ ζητηθεὶς ἀριθμός.

Ἠμποροῦμεν ἀκόμη νὰ ὑπολογισθῶμεν ὡς ἀκολούθως.

Βάλλομεν — 0,82074 ὑπὸ τὴν μορφὴν 4 — 0,82074 — 4· δηλαδὴ προσθέτομεν εἰς τὸν προτεθέντα λογάριθμον καὶ ἀφαιροῦμεν 4 μονάδας· ἐντεῦθεν προκύπτει

$$-0{,}82074 = 3{,}17926 - 4.$$

Ἀλλ' ἔχομεν κατὰ τοὺς πίνακας, 3,17926 = λογ. 1511, ὅθεν 3,17926 — 4 = λογ. 1511 — λογ. 10000 (ἀρ. 265),

καὶ ἑπομένως,

$$-0{,}82074 = \text{λογ.}\ \frac{1511}{10000} = \text{λογ.}\ 0{,}1511.$$

Τὸ τελευταῖον τοῦτο μέσον εἶναι ἐν γένει ἁπλούστερον, καὶ μάλιστα ἀκριβέστερον παρὰ τὸ πρῶτον, ἐπειδὴ εἰς τὴν ὁποίαν ἐλάβομεν τιμὴν τοῦ $\frac{1}{x}$, μὴ ὄντος τοῦ x ἀκριβοῦς διαιρέτου, δὲν ἠμποροῦμεν νὰ λάβωμεν ἰδέαν καθαρὰν προσεγγίσεως, ἐν ᾧ τὸ δεύτερον μέσον μᾶς δίδει ἀκριβῶς τὴν τιμὴν μεῖον 0,0001.

Ἂς προσδιορίσωμεν ἀκόμη τὸν ἀνταποκρινόμενον ἀριθμὸν εἰς τὸν λογάριθμον — 2,35478.

Κατ' ἀρχάς, ἐπειδὴ ὁ λογάριθμος οὗτος περιλαμβάνεται μεταξὺ — 2 καὶ — 3, ὁ ἀνταποκρινόμενος ἀριθμὸς περιλαμβάνεται μεταξὺ $\frac{1}{100}$ καὶ $\frac{1}{1000}$· ἀλλὰ διὰ νὰ λάβωμεν τὴν τιμὴν αὐτοῦ κατὰ τὸ δεύτερον μέσον, βάλλομεν τὸν λογάριθμον ὑπὸ τὴν μορφὴν $6 - 2{,}35478 - 6 = 3{,}64522 - 6$.

Ἀλλ' ἔχομεν . . . . $3{,}64522 =$ λογ. $4417{,}9$,

λοιπὸν $6 - 2{,}35478 - 6$ ἢ $- 2{,}35478 =$ λογ. $\dfrac{4417{,}9}{1000000}$.

ἢ $- 2{,}35478 =$ λογ. $0{,}0044179$.

Αὐτὰ τὰ παραδείγματα εἶναι ἱκανὰ νὰ μᾶς δείξωσιν, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ, οἱ ὁποῖοι ἀνταποκρίνονται εἰς λογαρίθμους ἔχοντας τὸ σημεῖον —, ἠμποροῦν νὰ λαμβάνωνται μὲ μεγαλήτεροι βαθμοὶ προσεγγίσεως.

Τὸ δεύτερον μέσον συνίσταται προφανῶς εἰς τὸ νὰ ἀφαιροῦμεν τὸν προτεθέντα λογάριθμον ἀπὸ 4 μονάδας περισσότερον ἀφ' ὅσας ἔχει τὸ χαρακτηριστικὸν, νὰ προσδιορίζωμεν τὸν ἀνταποκρινόμενον ἀριθμὸν εἰς τὸ οὕτω λαμβανόμενον ἀποτέλεσμα, καὶ ἔπειτα νὰ διαιρῶμεν τὸν ἀριθμὸν τοῦτον διὰ τῆς μονάδος ἀκολουθημένης ἀπὸ τόσα μηδενικὰ, ὅσας μονάδας ἐλάβομεν πρὸς ἐκτέλεσιν τῆς ἀφαιρέσεως.

$\overline{2}^{ον}$. Ζητεῖται ἡ $\overline{11}^{η}$ δύναμις τοῦ κλάσματος $\dfrac{13}{15}$. Ἔχομεν

$$\text{λογ.}\left(\frac{13}{15}\right)^{11} = \text{λογ.}\left(\frac{1}{\frac{15}{13}}\right)^{11} = -\,\text{λογ.}\left(\frac{15}{13}\right)^{11} = -\left(11\,\text{λογ.}\,\frac{15}{13}\right).$$

Ἀλλὰ λογ. $\frac{15}{13} = 0{,}06215$· ὅθεν $11 \times$ λογ. $\frac{15}{13} = 0{,}68365$, καὶ ἑπομένως,

λογ. $\left(\frac{13}{15}\right)^{11} = -0{,}68365 =$ λογ. $0{,}2072$.

Οὕτω 0,2072 εἶναι ὁ ζητούμενος ἀριθμός.

$\overline{3}^{ον}$. Ζητεῖται ἡ $\overline{7}^{η}$ ῥίζα τοῦ $\frac{2}{3}$. Ἔχομεν

$$\text{λογ.}\sqrt[7]{\frac{2}{3}} = \text{λογ.}\frac{1}{\sqrt[7]{\frac{3}{2}}} = -\text{λογ.}\sqrt[7]{\frac{3}{2}} = -\left(\frac{1}{7}\text{λογ.}\frac{3}{2}\right)$$

Ἀλλὰ λογ. $\frac{3}{2} = 0{,}17609$, ἐκ τοῦ ὁποίου $\frac{1}{7}$ λογ. $\frac{3}{2} = 0{,}02515.$,

Λοιπὸν λογ. $\sqrt[7]{\frac{2}{3}} = -\ 0{,}02515 =$ λογ. $0{,}94374$, καὶ ἑπομένως,

$$\sqrt[7]{\frac{2}{3}} = 0{,}94374.$$

§. 277. Σχόλιον. Εἰς τὴν ἀναζήτησιν τῶν λογαρίθμων τῶν κλασμάτων ἀπαντήσαμεν ἰδιαιτέρους τινὰς ἀριθμοὺς καλουμένους εἰς τὴν Ἄλγεβραν, ἀρνητικοὺς ἀριθμοὺς, εἰς διάκρισιν τῶν λεγομένων θετικῶν ἢ ἀπολύτων ἀριθμῶν· Εἰς τὴν θεωρίαν τῶν λογαρίθμων εἶναι οἱ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ τόσον ἀναγκαῖοι, ὅσον καὶ οἱ θετικοὶ, ἐπειδὴ χωρὶς αὐτῶν δὲν ἠμποροῦμεν νὰ ἐκφράσωμεν τοὺς λογαρίθμους τῶν κλασμάτων. Τοῦτο εἶναι τόσον ἀληθὲς, ὥστε καὶ ἐὰν καθ' ὑπόθεσιν (καὶ ὑπόθεσιν πολλὰ ἀποδεκτὴν) ἀντὶ τῶν δύο προειρημένων προόδων, ἐφ' ὧν ἐστηρίξαμεν ὅλας τὰς περὶ λογαρίθμων θεωρίας μας, παρεδεχώμεθα τὰς δύο ἀκολούθους,

$$\div\!\div\ 1 : \frac{1}{10} : \frac{1}{100} : \frac{1}{1000} : \frac{1}{10000} \ldots\ldots,$$

$$\div\ 0 . 1 . 2 . 3 . 4 \ldots\ldots,$$

κατὰ τὰς ὁποίας ὅλα τὰ κλάσματα ἤθελαν λάβει θετικοὺς λογαρίθμους καὶ τόσον μεγαλητέρους, ὅσον μικρότερα ἤθελαν εἶναι τὰ κλάσματα, πάλιν μ' ὅλον τοῦτο οἱ λογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν τῶν μεγαλητέρων τῆς μονάδος, δηλαδὴ ... 1, 10, 100, 1000, ... καὶ ὅλων τῶν ἐν τῷ μεταξὺ ἀριθμῶν, ἐξ ἀνάγκης ἤθελαν παρασταθῇ διὰ τῆς σειρᾶς τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν 0, — 1, — 2, — 3 ... καὶ ὅλων τῶν εἰς τούτους περιλαμβανομένων.

Ἄλλος τρόπος τοῦ θεωρεῖν τοὺς Λογαρίθμους.

§. 278. Ὁ Εὔλερος εἰς τὰ τῆς Ἀλγέβρας στοιχεῖά του θεωρεῖ ἀγχινούστατα μεταξὺ τῶν διαφόρων τῆς ἀριθμητικῆς ἐργασιῶν τοὺς λογαρίθμους μὲ νέον τινὰ τρόπον, τὸν ὁποῖον καὶ ἡμεῖς ἤδη γνωστοποιοῦμεν.

Ἂς σημειωθῶσι διὰ α, β, γ, τρεῖς ὁποιοιδήποτε ἀριθμοὶ, καὶ ἂς προτεθῇ τὸ γενικὸν τοῦτο ζήτημα." Δύο τινὲς ἐκ τῶν τριῶν τούτων ποσοτήτων ἀφ' οὗ γνωσθῶσι, νὰ προσδιορίσωμεν τὴν τρίτην, ἐκτελοῦντες μίαν τῶν ἐκτελουμένων ἐργασιῶν ἐπάνω εἰς τὰς δύο δοθείσας."

Ἀναμφιβόλως ἡ ἁπλουστέρα καὶ ἡ ἀμέσως πρώτη εἰς τὸ πνεῦμά μας παριστανομένη ἐργασία εἶναι ἡ πρόσθεσις.

Προτεθείσθω λοιπὸν νὰ εὕρωμεν γ διὰ τῆς προσθέσεως τῶν δύο ἀριθμῶν α καὶ β.

Ἡ δὲ σχέσις αὕτη ἡ ἐνυπάρχουσα εἰς τοὺς τρεῖς ἀριθμοὺς α, β, γ, θέλει ἐκφρασθῇ διὰ τῆς ἰσότητος,

$$\alpha+\beta=\gamma \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

ἡ ὁποία ἐν ταὐτῷ δίδει

$$\alpha=\gamma-\beta \text{ ἢ } \beta=\gamma-\alpha.$$

Ἐκ τοῦ ὁποίου βλέπομεν, ὅτι ἐὰν ἀντὶ νὰ γυρεύωμεν γ, ζητῶμεν τὴν τιμὴν τοῦ α ἢ τοῦ α ἢ τοῦ β, η αὐτὴ ἰσότης (1) ἤθελε μᾶς δώσει τὴν ἄγνωστον ποσότητα μὲ ἀφαίρεσιν.

Οὕτω λοιπὸν ἡ πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις συνδέονται πρὸς ἀλλήλας μὲ τὴν αὐτὴν ἐξίσωσιν $\alpha+\beta=\gamma$.

Σ. Κ. Ἐὰν εἰς τὴν ἰσότητα $\alpha=\gamma-\beta$ ὑποτεθῇ $\gamma<\beta$, ἡ τιμὴ τοῦ α καταντᾷ φανερὰ εἰς ἀρνητικὸν ἀριθμόν. Ἡ δὲ γνῶσις τοιούτων ἀριθμῶν κρέμαται ἀπὸ ἀδυνάτους ἀφαιρέσεις.

Ἡ πρόσθεσις ἀριθμοῦ τινος πολλαῖς φοραῖς εἰς τὸν ἑαυτόν του, μᾶς φέρει εἰς τὸν πολλαπλασιασμόν.

Προτεθείσθω ἤδη νὰ εὕρωμεν γ διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἀριθμῶν α καὶ β.

Ἡ σχέσις αὕτη θέλει δειχθῇ διὰ τῆς ἰσότητος,

$$\alpha\beta=\gamma \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

ἐκ τῆς ὁποίας ἐξάγομεν $\alpha=\frac{\gamma}{\beta}$ ἢ $\beta=\frac{\gamma}{\alpha}$.

Λοιπὸν, ἐὰν ἀντὶ νὰ γυρεύωμεν $γ$, κατὰ τὴν (2) ἰσότητα, ζητήσωμεν τὴν τιμὴν τοῦ $α$ ἢ τοῦ $β$, ἡ διαίρεσις τοῦ $γ$ διὰ $β$, ἢ τοῦ $γ$ διὰ $α$ θέλει δώσει τὴν τιμὴν τοῦ ἀγνώστου ἀριθμοῦ.

Οὕτως ὁ πολλαπλασιασμὸς καὶ ἡ διαίρεσις συνδέονται πρὸς ἄλληλα διὰ τῆς αὐτῆς ἰσότητος . . . . $αβ=γ$.

Σ. Κ. Ὑποτιθεμένου $γ<β$ ἢ $γ$ μὴ διαιρετοῦ ἀκριβῶς διὰ $β$, ἡ ἔκφρασις $\frac{γ}{β}$ εἶναι κλάσμα, ἢ κλασματικὸς ἀριθμός. Λοιπὸν τὰ κλάσματα πηγάζουσιν ἀπὸ διαιρέσεις ἀδυνάτους εἰς τὸ νὰ ἐκτελεσθῶσιν ἀκριβῶς.

Τέλος πάντων ὁ πολλαπλασιασμὸς ἀριθμοῦ τινος πολλάκις ἐφ᾽ ἑαυτὸν μᾶς φέρει εἰς τὸν σχηματισμὸν τῶν δυνάμεων.

Ἂς ὑποθέσωμεν λοιπὸν, ὅτι θέλομεν νὰ λάβωμεν $γ$, πολλαπλασιάζοντες $α$ ἐφ᾽ ἑαυτὸ μεῖον μιᾶς τοσάκις, ὅσας μονάδας περιέχει τὸ $β$.

Ἡ σχέσις αὕτη θέλει ἐκφρασθῆ διὰ τῆς ἰσότητος $α^β = γ$ . . . . (3) · ὅθεν κατὰ πρῶτον ἐξάγομεν,

$$α=\sqrt[β]{γ}.$$

Ἐκ τοῦ ὁποίου δείχνεται, ὅτι διὰ νὰ λάβωμεν $γ$, γνωρίζοντες $α$ καὶ $β$, πρέπει νὰ ὑψώσωμεν εἰς δυνάμεις, καὶ ὅτι διὰ νὰ λάβωμεν $α$, γνωρίζοντες $γ$ καὶ $β$, πρέπει νὰ ἐξάξωμεν ῥίζας.

Ἀλλὰ τώρα ἐὰν γνωρίζωμεν $α$ καὶ $γ$, πῶς νὰ εὕρωμεν $β$;

Πρὶν ἀποκριθῶμεν εἰς τοῦτο τὸ ζήτημα, ἂς ἀνακεφαλαιώσωμεν ὅ, τι εἴπαμεν.

Ἡ ἰσότης $\alpha+\beta=\gamma$ συνάπτει τὰς δύο γνωστὰς ἐργασίας ὑπὸ τὸ ὄνομα τῆς προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως· ἡ δευτέρα τῶν δύο τούτπν ἐργασιῶν δύναται προσέτι νὰ δώσῃ ἀρνητικοὺς ἀριθμούς.

Ἡ ἰσότης $\alpha\beta=\gamma$ συνάπτει τὸν πολλαπλασιασμὸν καὶ τὴν διαίρεσιν, ὅθεν γεννᾶται ἡ ἰδέα τοῦ κλάσματος ἢ τοῦ κλασματικοῦ ἀριθμοῦ.

Ἂς παρατηρήσωμεν δὲ ἀκόμη, ὅτι εἰς κάθε μίαν ἀπὸ τὰς δύο ἰσότητας $\alpha+\beta=\gamma$, $\alpha\beta=\gamma$, ὁ ἀριθμὸς α ἢ ὁ ἀριθμὸς β λαμβάνεται διὰ τῆς αὐτῆς ἐργασίας τῆς ἐπὶ τῶν δύο γνωστῶν ποσοτήτων ἐκτελουμένης.

Προσέτι ἡ ἰσότης $\alpha^\beta=\gamma$ συνάπτει τὸν σχηματισμὸν τῶν δυνάμεων καὶ τὴν ἐξαγωγὴν τῶν ῥιζῶν, ὅθεν γεννῶνται οἱ ἀσύμμετροι ἀριθμοί.

Ὑπάρχει ὅμως ἡ διαφορὰ αὕτη μεταξὺ αὐτῆς τῆς ἰσότητος καὶ τῶν δύο πρώτων, ὅτι πρὸς εὕρεσιν τοῦ α ἀρκεῖ ἐξαγωγή τις ῥίζης, ἐν ᾧ πρὸς εὕρεσιν τοῦ β, χρειάζεται μερικωτάτη τις πρᾶξις, ἥτις θέλει εἶναι τρόπον τινὰ ἑβδόμη πρᾶξις τῆς ἀριθμητικῆς.

Ἐφαρμόζοντες ἤδη εἰς τὴν ἰσότητα $\alpha^\beta=\gamma$
τὴν ἰδιότητα τοῦ ἀρ. 259 ἔχομεν, $\beta\,\lambda o\gamma.\,\alpha=\lambda o\gamma.\,\gamma.$

ὅθεν ἐξάγεται . . . . $\beta=\dfrac{\lambda o\gamma.\,\gamma}{\lambda o\gamma.\,\alpha}$,

δηλαδὴ ἡ τιμὴ τοῦ β λαμβάνεται διὰ λογαρίθμων.

§. 279. Ἂς κάμωμεν καί τινας ἐφαρμογάς.

Ὑποτεθείσθω εἰς τὴν ἰσότητα $\alpha^\beta=\gamma$, $\alpha=3$ καὶ $\gamma=81$, τότε γίνεται

$$3^\beta=81\cdot\ \text{ὅθεν}\ \beta=\frac{\lambda o\gamma.\,81}{\lambda o\gamma.\,3},$$

Ἀλλὰ $\lambda o\gamma.\,81=1{,}90849$, $\lambda o\gamma.\,3=0{,}47712$,

$$\text{λοιπὸν}\ \beta=\frac{1{,}90849}{0{,}47712}=4+\frac{1}{47712}$$

Ἀμελοῦντες τὸ πολλὰ μικρὸν κλάσμα $\frac{1}{47712}$, καὶ τὸ ὁποῖον προέρχεται ἐκ τοῦ, ὅτι οἱ λογάριθμοι δὲν εἶναι ποτὲ ἀκριβεῖς, εὑρίσκομεν $\beta = 4$, καὶ τέλος πάντων,

$$3^4 = 81.$$

Προτεθείσθω ἔτι τὸ ἀκόλουθον ζήτημα.

Ὁ πληθυσμὸς τῶν κατοίκων ἑνὸς τόπου αὐξάνει κάθε χρόνον κατὰ $\frac{1}{50}$ πλειότερον ἀφ' ὅσον ἦτον εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ χρόνου. Ζητεῖται μετὰ πόσους χρόνους θέλει διπλασιασθῆ ὁ πληθυσμός;

Ἂς σημειώσωμεν διὰ α τὸν πληθυσμὸν εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ πρώτου χρόνου, καὶ διὰ α', α'', α''' τοὺς εἰς τὴν ἀρχὴν τῶν ἀκολούθων χρόνων πληθυσμούς.

Ἐπειδὴ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν ὁ πληθυσμὸς α ηὐξήθη εἰς τὸ τέλος τοῦ πρώτου χρόνου κατὰ $\frac{1}{50}$ πλειότερον ἀφ' ὅσον ἦτον εἰς τὴν ἀρχὴν, θέλει γένει εἰς τὸ τέλος τούτου τοῦ χρόνου, ἢ εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ δευτέρου $\alpha + \frac{\alpha}{50} = \alpha\left(1 + \frac{1}{50}\right)$, ἢ α' κατὰ τὰς ὁποίας ἐσυμφωνήσαμεν ἀρχάς.

Ἐπειδὴ εἰς τὸ τέλος τοῦ δευτέρου χρόνου ὁ πληθυσμὸς α' αὐξάνεται ἀκόμη κατὰ $\frac{1}{50}$, εἰς τὴν ἀρχὴν τούτου τοῦ χρόνου θέλει γένει,

$$\alpha' + \frac{\alpha'}{50} = \alpha'\left(1 + \frac{1}{50}\right) = \alpha'\left(\frac{51}{50}\right)$$

ἢ, εἰσαγομένης ἀντὶ α' τῆς τιμῆς του,

$$=\alpha\left(\frac{51}{50}\right)^2=\alpha''$$

Θέλει δὲ εὑρεθῆ διὰ τὸν πληθυσμὸν εἰς τὸ τέλος τοῦ τρίτου χρόνου,

$$\alpha''\left(\frac{51}{50}\right)=\alpha\left(\frac{51}{50}\right)^3,$$

καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Λοιπὸν ἐὰν x σημειόνῃ τὸν ἄγνωστον τῶν χρόνων ἀριθμὸν,

$\alpha\left(\frac{51}{50}\right)^x$ ἐκφράζει τὸν πληθυσμὸν τοῦ τελευταίου χρόνου.

Ἀλλ' εἰς τὴν ἔκφρασιν αὐτὸς παριστάνεται διὰ 2α, ἔχομεν λοιπὸν τὴν ἰσότητα

$$\alpha\left(\frac{51}{50}\right)^x=2\alpha,$$

καὶ ἐκθλίβοντες τὸν κοινὸν τοῦτον παράγοντα λαμβάνομεν

$$\left(\frac{51}{50}\right)^x=2\cdot \text{ ὅθεν } x=\frac{\lambda o\gamma.\ 2}{\lambda o\gamma.\left(\frac{51}{50}\right)}=\frac{\lambda o\gamma.\ 2}{\lambda.\ 51-\lambda.\ 50.}$$

Ζητοῦντες εἰς τοὺς πίνακας τοὺς λογαρίθμους τοῦ 2 καὶ 51, καὶ 50, εὑρίσκομεν μετὰ τοὺς ὑπολογισμούς,

$$x=35+\frac{3}{800}$$

Λοιπὸν εἰς τὸ τέλος τῶν 35 χρόνων σχεδὸν θέλει διπλασιασθῇ ὁ πληθυσμός.

Οἱ λογάριθμοι ἄρα σχηματίζουν ἰδιαιτέρας ἐ
σίας, ἀναποφεύκτους εἰς τὴν ἐπίλυσιν μερικῶν
ζητημάτων.

§. 280. Περὶ τῶν Λογαρίθμων, ἐκθετῶν θεωρουμένων.

Ἐὰν εἰς τὴν ἰσότητα $\alpha^{\beta} = \gamma$, ἥτις δίδει,

$$\beta = \frac{\lambda o\gamma.\ \gamma}{\lambda o\gamma.\ \alpha}$$

ὑποτεθῇ α ἡ βάσις τοῦ λογαριθμικοῦ συστήματος,
κύπτει·

. . . . λογ. α =

ὅθεν $\beta = \lambda o\gamma.\ \gamma.$ καὶ ἐπομένως . . . . $\alpha^{\lambda o\gamma.\ \gamma} =$

Ἠθέλαμεν λάβει προσέτι δι' ἄλλους ἀριθμοὺς γ', γ'',

$\beta' = \lambda o\gamma.\ \gamma'$ . . . . καὶ ἐπομένως . . . $\alpha^{\lambda o\gamma.\ \gamma'} =$

$\beta'' = \lambda o\gamma.\ \gamma''$ . . . . $\alpha^{\lambda o\gamma.\ \gamma''} =$

$\beta''' = \lambda o\gamma.\ \gamma'''$ . . . . $\alpha^{\lambda o\gamma.\ \gamma'''} =$

— — — — — — — — —

— — — — — — — — —

Ὅθεν βλέπομεν, ὅτι οἱ λογάριθμοι τῶν ὁ
μῶν ἠμποροῦν νὰ θεωρῶνται ὡς ἐκθέται τῶν δ
μεων, εἰς τὰς ὁποίας πρέπει νὰ ὑψωθῇ ἀμετάβλητό
ἀριθμὸς α, διὰ νὰ γεννήσῃ ὅλους τούτους τοὺς ἀ
μούς.

Καὶ οὕτω τῷ ὄντι, τοὺς θεωροῦμεν εἰς τὴν
γεβραν.

ΤΕΛΟΣ.