τον ἀριθμὸν εἶναι 3, διὰ δὲ τὸν δεύτερον, 2, καὶ διὰ τὸν τρίτον 1 καὶ 0 διὰ τὸν τέταρτον.

Ἐν γένει ὁ λογάριθμος δεκαδικοῦ κλάσματος εἶναι ὁ αὐτὸς, ἐκτὸς τοῦ χαρακτηριστικοῦ, μὲ τὸν λογάριθμον τοῦ προτεθέντος ἀριθμοῦ μετὰ τὴν τῆς ὑποστιγμῆς ἀφαίρεσιν· ἀλλ' εἰς τὸ δεκαδικὸν μέρος δὲν εἶναι καμμία διαφορά.

Εἶναι καλὸν νὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι ἡ ἰδιότης αὕτη εἶναι ὅλως διόλου ἰδιάζουσα εἰς τὸ σύστημα τῶν λογαρίθμων τοῦ Βριγγίου. Ὅθεν καὶ προτιμητέον τὸ σύστημα τοῦτο παντὸς ἄλλου, ἐπειδὴ τὰ δεκαδικὰ κλάσματα εἶναι ἐκεῖνα, ἐφ' ὧν συχνότερα ἐργαζόμεθα.

§. 286. Ἦτον ἀδύνατον νὰ βαλθῶσιν εἰς τοὺς πίνακας ἄλλοι παρὰ οἱ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν λογάριθμοι, ἐπειδὴ δύο διαδοχικῶν ἀριθμῶν περιλαμβανόντων μεταξύ των ἀπειρίαν κλασματικῶν ἀριθμῶν, ἤθελεν εἶναι παράλογον νὰ προτιμήσωμεν τούτους ἀπ' ἐκείνους. Ἐκτὸς τούτου οἱ ὑπολογισμοὶ ἐπὶ τῶν κλασματικῶν ἦσαν δυσκολώτατοι, καὶ εἰς ἔν τι ὅριον ἐπίσης πολλὰ μικρὸν ἦτον ἀδύνατον νὰ περιορισθῶσι.

Οὕτως εἶναι πίνακες οἱ ὁποῖοι φθάνουν ἕως εἰς 10000, ἄλλοι εἰς 20000· οἱ πλέον ἐκτεταμένοι εἶναι οἱ τοῦ Καλλέτου, φθάνοντες ἕως εἰς 108000.

Ἤδη αἱ λογαριθμικαὶ ἐφαρμογαὶ ἀπαιτοῦν συχνὰ τὴν ἀναζήτησιν λογαρίθμου ἑνὸς ἀριθμοῦ, εἴτε ὑπερβαίνοντος τὰ τῶν πινάκων ὅρια, εἴτε ὄντος κλασματικοῦ. Πῶς εὑρίσκεται τότε ὁ λογάριθμος οὗτος; Τοῦτο θέλομεν ἀναπτύξει διὰ τῶν ἀκολούθων παραδειγμάτων· (ὑποθέτομεν δὲ εἰς ὅσα λέγομεν, ὅτι κρατοῦμεν εἰς χεῖρας μόνον τοὺς μικροὺς πίνακας τοῦ Βεϋνώδου ἢ τοῦ Λαλάνδου).

§. 287. Ἀριθμοῦ ὁποιουδήποτε δοθέντος νὰ προσδιορίσωμεν τὸν λογάριθμον.

$\overline{1}^{ον.}$ Ἂς προσδιορίσωμεν τὸν λογάριθμον τοῦ 254329.

Ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς οὗτος ἔχει ἓξ ψηφία, τὸ χαρακτηριστικόν του λογαρίθμου του εἶναι 5 (ἀρ. 264). Οὕτω λοιπὸν τὸ ζήτημα καταντᾷ εἰς τὸ νὰ εὕρωμεν τὸ δεκαδικὸν αὐτοῦ μέρος.

Προκύπτει δὲ ἐκ τοῦ ὅ,τι εἴπαμεν ἀρ. 265, ὅτι τὸ δεκαδικὸν τοῦτο μέρος εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ τοῦ λογαρίθμου 2543,29.

Ἐκ ταύτης τῆς προπαρασκευῆς, συνισταμένης εἰς τὸ νὰ χωρίσωμεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ ἀριθμοῦ ἀρκετὰ ψηφία διὰ νὰ εὑρίσκεται τὸ εἰς τὰ ἀριστερὰ μέρος του εἰς τὸν πίνακα, λαμβάνομεν ἀριθμὸν περιεχόμενον μεταξὺ 2543 καὶ 2544· οὕτως ὁ λογάριθμός του εἶναι ἴσος μὲ ἐκεῖνον τοῦ 2543, πλέον ἓν μέρος τῆς διαφορᾶς, τὸ ὁποῖον ὑπάρχει μεταξὺ λογ. 2544 καὶ λογ. 2543.

Εὑρίσκεται εἰς τὸν πίνακα . . . . λογ. 2543 = 3,40535· εὑρίσκεται ἐπίσης 17, διαφορὰ μεταξὺ λογ. 2544, καὶ λογ. 2543. Αὕτη ἡ διαφορὰ 17 ἐκφράζει τὰς μονάδας τῆς τάξεως τοῦ 5$^{τον.}$ δεκαδικοῦ ψηφίου, ἢ τὰ 100000$^{ρια.}$

Τούτου τεθέντος, διὰ νὰ λάβωμεν τὸ μέρος ταύτης τῆς διαφορᾶς, τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς λογ. 2543, διὰ νὰ ἐξάξωμεν ἐκείνην τοῦ 2543,29, συσταίνομεν ταύτην τὴν ἀναλογίαν. Ἐὰν διὰ μίαν μονάδα διαφορᾶς μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 2544 καὶ 2543 ἔχωμεν 17 ἑκατοχιλιοστημόρια διαφορᾶς μεταξὺ τῶν λογαρίθμων των, πόσην διαφορὰν θέλομεν ἔχει μεταξὺ τῶν λογαρίθμων διὰ 0,29, τὸ ὁποῖον εἶναι διαφορὰ μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 2543,29 καὶ 2543. ἢ

$$1 : 17 :: 0,29 : x \cdot \text{ ὅθεν}$$

$$x = 17 \times 0,29 = 4,93.$$

Καὶ ὁ $4^{\text{τος}}$ ὅρος 4,93 εἶναι ἐκεῖνος, τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν λογάριθμον 3,40535, διὰ νὰ ἔχωμεν τὸν ζητούμενον λογάριθμον.

Ἐπειδὴ πρέπει νὰ λογαριάζωμεν μόνον τὸ ἐν ἀριστερᾷ τῆς ὑποστιγμῆς μέρος, εἰς τοῦτον τὸν $4^{\text{τον}}$ ὅρον προσθέτομεν 4 ἢ μᾶλλον 5 (ἐπειδὴ τὸ πρῶτον ψηφίον εἰς τὰ δεξιὰ τῆς ὑποστιγμῆς εἶναι μεγαλήτερον παρὰ 5) εἰς τὸ τελευταῖον ψηφίον τοῦ 3,40535, καὶ λαμβάνομεν

λογ. 2543,29 = 3,40540. Λοιπὸν λογ. 254329 = 5,40540.

Τὰς πράξεις δὲ οὕτω διατάττομεν,

λογ. 254329 = λογ. 2543,29 + 2

λογ. 2543 = 3,40535.

διαφ. τοῦ πίν. . . . 17.

1 : 17 :: 0,29 : χ = 4,93 . . . . = ... 5

Λοιπὸν λογ. 2543,29 = 3,40540

καὶ ἐπομένως . . . . . . λογ. 2543 29 = 5,40540

Ἂς προσδιορισθῇ ἀκόμη ὁ λογάριθμος τοῦ 1784967.

Ἔχομεν ἐξ ἀρχῆς . . . . . .

λογ. 1784967 = λογ. 1784,967 + 3

λογ 1784 = 3,25139.

διαφ. τοῦ πίν. 25

1 : 25 :: 0,967 : χ = 24,175 . . . . . . = 24

Λοιπὸν . . . . λογ. 1784,967 = 3,25163

ἐπομένως. . . . . . λογ. 1784 967 = 6,21163

Σ. Κ. Διὰ νὰ ἐπιλύσωμεν τὰ δύο προηγούμενα ζητήματα, ἐσυστήσαμεν ἀναλογίαν μεταξὺ τῶν διαφορῶν τῶν ἀριθμῶν καὶ τῶν διαφορῶν τῶν λογαρίθμων των. Δείκνυται ἐν Ἀλγέβρᾳ, ὅτι ἡ ἀναλογία αὕτη δὲν εἶναι ποτὲ ἀκριβὴς, ἀλλὰ πλησιάζει τόσον πλέον εἰς τὴν ἀκρίβειαν, ὅσον οἱ ἀριθμοὶ, διὰ τοὺς ὁποίους ἐσυστάθη, εἶναι μεγαλήτεροι· καὶ δείχνεται προσέτι ὅτι εἰς τὴν χρῆσιν τῶν μικρῶν πινάκων τὸ πραττόμενον σφάλμα δὲν πίπτει ἐπάνω τοῦ 5$^{\text{του}}$ δεκαδικοῦ ψηφίου τοῦ λογαρίθμου, ἐν ὅσῳ ὁ ἀριθμὸς εἶναι ὑπὲρ τὰ 1000. Ἰδοὺ διατὶ ὅταν ἕνας ἀριθμὸς ὑπερβαίνῃ τὰ ὅρια τῶν πινάκων, πρέπει νὰ χωρίζωμεν, ὅσον ἐμποροῦμεν ὀλιγώτερα ψηφία.

2$^{\text{ον}}$. Ζητεῖται ὁ λογάριθμος τοῦ $37\frac{43}{59}$.

Οὗτος ὁ ἀριθμὸς τρέπεται εἰς $\frac{2226}{59}$. Λοιπὸν (ἀρ. 258).

$$\text{λογ. } 37\frac{43}{59} = \text{λογ. } 2226 - \text{λογ. } 59.$$

Εὑρίσκεται δὲ εἰς τὸν πίνακα

$$\text{λογ. } 2226 = 3{,}34753$$
$$\text{λογ. } \quad 59 = \underline{1{,}77085}$$

Ὅθεν γινομένης τῆς ἀφαιρέσεως

$$\text{λογ. } 37\frac{43}{59} = 1{,}57668.$$

Ὁ δὲ λογάριθμος ἑνὸς κλασματικοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ, π. χ. τοῦ 479,2564, εὑρίσκεται, ἀφ' οὗ ὡς εἴδομεν (ἀρ. 265) προσδιορισθῇ ὁ λογάριθμος τοῦ 4792564, ἔπειτα ἀφαιρεθῶσι τέσσαρες μονάδες ἀπὸ τὸ χαρακτηριστικὸν, ἢ ἠμποροῦμεν νὰ εἴπωμεν

$$\underline{\text{λογ. } 479{,}2564 = \text{λογ. } 4792{,}564 - 1}$$

$$\text{λογ. } 4792 = 3{,}68052.$$

διαφ. πίν. 9

$1 : 9 :: 0{,}564 : x = 5{,}076$ . . . . = $\underline{\quad 5}$

ὅθεν . . . . λογ. 4792,564 = 3,68057

λοιπὸν . . . . λογ. 479,2564 = 2,68057.

Ἰδὲ τὸ τέλος τούτου τοῦ κεφαλαίου (ἀρ. 274) περὶ τῶν λογαρίθμων τῶν κυρίων κλασμάτων.

§. 268. Ἀφ' οὗ δοθῇ ὁποιοσδήποτε λογάριθμος, νὰ εὕρωμεν τὸν εἰς αὐτὸν ἀνταποκρινόμενον ἀριθμόν.

Ὅταν μεταχειριζώμεθα τοὺς λογαρίθμους εἰς ἀριθμητικῶν τινῶν ἐργασιῶν ἐκτέλεσιν, καταντῶμεν συνήθως εἰς ἐξαγόμενον ἐκφράζον τὸν λογάριθμον τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ, καὶ πρέπει διὰ μέσου του πίνακος νὰ προσδιορίσωμεν εἰς ποῖον ἀριθμὸν ἀνταποκρίνεται ὁ λογάριθμος οὗτος.

1ον. Ἂς θεωρήσωμεν τὴν περίστασιν, εἰς τὴν ὁποίαν τὸ χαρακτηριστικὸν εἶναι 3, δηλαδὴ τὸ μεγαλήτερον ἀφ' ὅσα εὑρίσκονται εἰς τοὺς μικροὺς πίνακας.

Εὑρεθήτω ὁ ἀνταποκρινόμενος ἀριθμὸς εἰς τὸν λογάριθμον 3,45936.

Ζητοῦμεν πρῶτον τὸν λογάριθμον τούτου ἀνάμεσα εἰς ἐκείνους τῶν ἀπὸ τέσσαρα ψηφία ἀριθμῶν, καὶ εὑρίσκομεν, ὅτι περιέχεται μεταξὺ 3,45924 καὶ 3,45939, οἱ ὁποῖοι εἶναι οἱ λογάριθμοι τοῦ 2879 καὶ 2880. Λοιπὸν ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι ἴσος μὲ 2879 πλέον ἕν τι κλάσμα.

Διὰ νὰ λάβωμεν αὐτὸ τὸ κλάσμα, λαμβάνομεν τὴν διαφορὰν τὴν τοῦ πίνακος 15, καὶ τὴν διαφορὰν 12 μεταξὺ τοῦ δοθέντος λογαρίθμου, καὶ ἐκείνου τοῦ 2879· ἔπειτα συσταίνομεν τὴν ἀναλογίαν

Ἐὰν διὰ 15 ἑκατοχιλιοστημόρια διαφορᾶς μεταξὺ λογ. 2880 καὶ λογ. 2879 ἔχωμεν μίαν μονάδα διαφορᾶς μεταξὺ τούτων τῶν ἀριθμῶν, διὰ 12 ἑκατοχιλιοστημόρια διαφορᾶς μεταξὺ τοῦ δοθέντος λογαρίθμου καὶ ἐκείνου τοῦ 2879 πόση διαφορὰ εἶναι μεταξὺ τῶν εἰς αὐτοὺς ἀνταποκρινομένων ἀριθμῶν;

ἢ $15 : 1 :: 12 : \chi$˙ ὅθεν $\chi = \frac{12}{18} = 0,\ 8$˙

Προσθέτοντες τὸν 4$^{\text{τον.}}$ ὅρον εἰς 2879, λαμβάνομεν 2879, 8 τὸν ζητούμενον ἀριθμόν.

Ἰδοὺ ὁ πίναξ τῶν ὑπολογισμῶν.

Ἄς καλέσωμεν N τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν, ἔχομεν

$$\text{λογ. } N = 3,45936.$$

$$\text{Εὑρίσκομεν δὲ εἰς τὸν πίνακα} \ldots \text{λογ. } 2879 = \underline{3,45924}$$

$$\text{διαφ. } 12$$

$$\text{διαφ. πίν.} \ldots 15$$

$$15 : 1 :: 12 : \chi = 0,8$$

Λοιπὸν $N = 2879,8$.

Σ. Κ. Συνήθως ἀνάγομεν εἰς δεκαδικὸν κλάσμα τὴν ἔκφρασιν τοῦ 4$^{\text{ου.}}$ ὅρου ταύτης τῆς προτάσεως. Ἀλλὰ τότε μεταχειριζόμενοι τοὺς μικροὺς πίνακας, προάγομεν τὴν ἐργασίαν ἕως εἰς τοὺς 10 ὅρους, ἐπειδὴ εἶναι τὸ μόνον δεκαδικὸν ψηφίον, περὶ οὗ εἴμεθα βέβαιοι. Τοῦτο στηρίζεται εἰς δύο αἰτίας.

Π ρ ῶ τ ο ν. Ἡ ἀναλογία δὲν εἶναι ποτὲ ἀκριβὴς (ἀρ. 267).

Δ ε ύ τ ε ρ ο ν. Αἱ δύο διαφοραὶ αἱ ὑπ' ἀλλήλων διαιρούμεναι, εἶναι ἀκριβεῖς ἕως εἰς τοὺς 100000 ὅρους. Ὅταν δὲ μεταχειριζώμεθα τοὺς τοῦ Καλλέτου πίνακας, ἠμποροῦμεν νὰ προάξωμεν τὴν ζήτησιν ἕως εἰς τοὺς 100 ὅρους, ἀλλὰ διὰ τοὺς ἐπέκεινα τοῦ 100 ἀριθμοὺς δὲν εἴμεθα βέβαιοι.

2$^{\text{ον.}}$ Προσδιορισθήτω ὁ ἀνταποκρινόμενος ἀριθμὸς εἰς τὸν λογάριθμον 1, 56834.

Ἀναζητοῦμεν κατ' ἀρχὰς τὸν λογάριθμον τοῦτον ἀνάμεσα εἰς ἐκείνους τῶν ἀριθμῶν ἐκ δύο ψηφίων. Ἂν κατὰ τύχην εὑρεθῇ, λαμβάνομεν τὸν εἰς τὰ πλευρά του ἀνταποκρινόμενον ἀριθμόν.

Ἀλλὰ μὴ εὑρεθέντος, προσθέτομεν 2 εἰς τὸ χαρακτηρικὸν, καὶ ἔχομεν 3,56834. Ζητοῦντες δὲ κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα, τὸν ἀνταποκρινόμενον εἰς τὸν νέον τοῦτον λογάριθμον, ἀριθμὸν, εὑρίσκομεν

3,56834 = λογ. 3701, 2.

Ἀλλ' ἐπειδὴ ὅταν προσθέτωνται 2 μονάδες εἰς τὸ χαρακτηριστικὸν, πολλαπλασιάζεται ὁ ἀριθμὸς ἐπὶ 100, πρέπει διὰ νὰ λάβωμεν τὸν ἀληθῆ ἀριθμὸν νὰ διαιρέσωμεν 3701, 2 διὰ 100, καὶ ἔχομεν 37,012 τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν, μεῖον τοῦ 0,001.

Ἂς εὕρωμεν ἀκόμη τὸν ἀνταποκρινόμενον ἀριθμὸν εἰς 0,86784.

Ἔχομεν ἐξ ἀρχῆς 3,86784=λογ.7376,3

λοιπὸν . . 0,86784=λογ. 7,3763 μεῖον 0,0001.

Προτεθείσθω ἔτι νὰ προσδιορίσωμεν τὸν ἀνταποκρινόμενον ἀριθμὸν εἰς 5,47659.

Ἀφαιροῦντες ἐξ ἀρχῆς δύο μονάδας, ἔχομεν

3,47659 = λογ. 2996,3.

Καὶ ἐπειδὴ, ἀφαιρουμένων δύο μονάδων ἀπὸ τὸ χαρακτηρικὸν, ὁ ἀριθμὸς καθίσταται ἑκατοντάκις μικρότερος, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν 2996, 3 ἐπὶ 100, ὅθεν ἔχομεν τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν 299630 μεῖον μιᾶς δεκάδος.

Εἰς τοὺς μικροὺς πίνακας δὲν ἠμποροῦμεν νὰ λάβωμεν μεγαλήτερον βαθμὸν προσεγγίσεως. Ἐὰν τὸ χαρακτηριστικὸν ἦναι μεγαλήτερον τοῦ 5, ὁ βαθμὸς τῆς προσεγγίσεως ἤθελεν εἶναι ἀκόμη μικρότερος. Πρέπει λοιπὸν νὰ μεταχειριζώμεθα ὅσον τὸ δυνατὸν μεγαλητέρους πίνακας, πρὸς ἐκτέλεσιν τῶν ἀκρίβειαν ἀπαιτούντων ὑπολογισμῶν.

„Ἐφαρμογαὶ τῆς θεωρίας τῶν Λογαρίθμων."

Ἂς μεταβῶμεν εἰς τὰς διαφόρους ἐφαρμογὰς τῶν λογαριθμικῶν πινάκων ἐπὶ τῶν ἀριθμητικῶν ἐργασιῶν.

§. 269. **Μέθοδος τῶν τριῶν.** Νὰ προσδιορίσωμεν διὰ λογαρίθμων τὸν 4$^{\text{τον.}}$ ὅρον τῆς ἀναλογίας,

$$\alpha : \beta :: \gamma : \chi.$$

Ἔχομεν κατ' ἀρχὰς (ἀρ. 209) $\chi = \frac{\beta \times \gamma}{\alpha}$. ὅθεν λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους, καὶ ἐφαρμόζοντες τὰς ἰδιότητας τῶν ἀρ. 255 καὶ 258, ἔχομεν

$$\text{λογ.}\,\chi = \text{λογ.}\,\beta + \text{λογ.}\,\gamma - \text{λογ.}\,\alpha.$$

Μετὰ τὴν πρόσθεσιν τῶν λογαρίθμων τῶν δύο μέσων ἀφαιροῦμεν τὸν λογάριθμον ἀπὸ τὸ γνωστὸν ἄκρον, ἔπειτα ζητοῦμεν εἰς ποῖον ἀριθμὸν ἀνταποκρίνεται ἡ διαφορά. Οὕτω θέλομεν λάβει τὸν ζητούμενον ἀριθμόν.

Ἔστω π. χ. ἡ ἀναλογία 37 : 259 :: 497 : χ· ἔχομεν

$$\text{λογ.}\,\chi = \text{λογ.}\,259 + \text{λογ.}\,497 - \text{λογ.}\,37.$$

$$\begin{array}{lll} & \text{λογ.}\ 259 = & 2,41330 \\ & \text{λογ.}\ 497 = & \underline{2,69636} \\ & & 5,10966 \\ & & \\ & \text{λογ.}\ 37\ = & \underline{1,56820} \\ \text{Λοιπὸν} & \text{λογ.}\ \chi\ = & 3,54146 \\ \text{καὶ ἐπομένως} & \quad\ \chi\ = & 3479,1 \text{ μεῖον } 0,1. \end{array}$$

Δεύτερον Παράδειγμα. Ζητεῖται διὰ λογαρίθμων ἡ τιμὴ τοῦ

$$\chi = \frac{37 \times 49 \times 17 \times 175}{29 \times 69 \times 154}$$

ἡ ὁποία ἔκφρασις ἠμπορεῖ νὰ θεωρῆται ὡς ὁ ἄγνωστος ὅρος εἰς τὴν σύνθετον μέθοδον τῶν τριῶν.

Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους τῶν 2 μελῶν ἔχομεν.

$\lambda o\gamma.\, x = \lambda.\,37 + \lambda.\,49 + \lambda.\,17 + \lambda.\,175 - \lambda.\,29 - \lambda.\,69 - \lambda.\,154.$

Ἀλλὰ

$$\begin{array}{lrl@{\qquad}lrl}
\lambda. & 37 = & 1,56820 & \lambda. & 29 = & 1,46240 \\
\lambda. & 49 = & 1,69020 & \lambda. & 69 = & 1,83885 \\
\lambda. & 17 = & 1,23045 & \lambda. & 154 = & \underline{2,18752} \\
\lambda. & 175 = & \underline{2,24304} & & & 5,48877 \\
 & & 6,73189 & & & \\
 & - & \underline{5,48877} & & & \\
\end{array}$$

Λοιπὸν $\lambda.\, x = \quad 1,24312$

Ὅθεν $x = 17,503$ μεῖον 0,001.

§. 270. Συμπληρώματα Ἀριθμητικά. Εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα ἀφαιρέσαμεν τὸ ἄθροισμα πολλῶν λογαρίθμων ἀπὸ τὸ ἄθρουσμα πολλῶν ἄλλων. Ἀλλ' ἠμποροῦμεν διὰ τῶν ἀριθμητικῶν συμπληρωμάτων ἀντὶ δύο προσθέσεων καὶ μιᾶς ἀφαιρέσεως, αἱ ὁποῖαι συντείνουν τὸν προσδιορισμὸν τοῦ ἀποτελέσματος, νὰ κάμωμεν μίαν μόνην πρόσθεσιν.

Καλεῖται Συμπλήρωμα ἀριθμητικὸν ἑνὸς λογαρίθμου, ὅ,τι λείπει ἀπ' αὐτὸν τὸν λογάριθμον, διὰ νὰ γένῃ ἴσος μὲ δέκα ἀκεραίας μονάδας· καὶ μὲ ἄλλας λέξεις εἶναι τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν ἐξαγόμενον ἀφαιροῦντες τοῦτον τὸν λογάριθμον ἀπὸ 10.

Οὕτω συμπλ. ἀριθμ. τοῦ $4,50364 = 10 - 4,50364$, καὶ διὰ νὰ τὸ λάβωμεν κατὰ τὸν τῆς ἀφαιρέσεως κανόνα, ἀρκεῖ νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ εἰς τὰ δεξιὰ τελευταῖον ψηφίον ἀπὸ 10, καὶ ὅλα τ' ἄλλα ψηφία ἀπὸ 9. Ἐντεῦθεν ἔχομεν

συμπλ. ἀριθμ. $4,50364 = 5,49636$
Παρομοίως συμπλ. ἀριθμ. $7,32568 = 2,67432$.

Τὰ ἀριθμητικὰ συμπληρώματα τῶν λογαρίθμων λαμβάνονται, διὰ νὰ εἴπωμεν οὕτω, κατὰ τὴν θεωρίαν τούτων τῶν λογαρίθμων.

Σ. Κ. Ἐὰν τὸ τελευταῖον ψηφίον εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ λογαρίθμου ἦτον 0, ἔπρεπε νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ πρῶτον εἰς τὰ ἀριστερὰ τοῦ 0, σημαντικὸν ψηφίον ἀπὸ 10, καὶ τ' ἄλλα εἰς τὰ ἀριστερὰ ψηφία ἀπὸ 9.

Οὕτω, συμπλ. ἀριθμ. $5,32570 = 4,67430$.
Παρομοίως, συμπλ. ἀριθμ. $8,62400 = 1,37600$.

Τούτου τεθέντος, ἂς ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῶν τεσσάρων λογαρίθμων Λ, Λ', Λ'', Λ''', τὸ ἐκ τριῶν ἄλλων λογαρίθμων $\lambda, \lambda', \lambda''$, ἄθροισμα, καὶ ἂς σημειώσωμεν διὰ Δ τὴν διαφοράν.

Ἔχομεν προφανῶς Δ ἢ $\Lambda+\Lambda'+\Lambda''+\Lambda''' - (\lambda+\lambda'+\lambda'')$.
$= \Lambda+\Lambda'+\Lambda''+\Lambda'''+\overline{10-\lambda}+\overline{10-\lambda'}+\overline{10-\lambda''}-30$.
ἤ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ αὐτό,

$\Delta = \Lambda+\Lambda'+\Lambda''+\Lambda'''+$ συμπ. $\lambda+$ συμπ. $\lambda'+$ συμπ. $\lambda''-30$ Ὅθεν ἐξάγομεν τὸν γενικὸν τοῦτον κανόνα.

Λάβε τὰ ἀριθμητικὰ συμπληρώματα τῶν ἀφαιρεθησομένων λογαρίθμων, λάβε προσέτι τὸ ὅλον ἄθροισμα τῶν συμπληρωμάτων καὶ τῶν λογαρίθμων, ἀπὸ τῶν ὁποίων πρέπει νὰ γένῃ ἡ ἀφαίρεσις· ἔπειτα ἔκθλιψε ἀπὸ τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ ἐξαγομένου τοσάκις τὸ 10, ἢ τόσας δεκάδας, ὅσα ἔλαβες συμπληρώματα· τὸ δὲ οὕτω ληφθὲν ἐξαγόμενον εἶναι ἡ ζητουμένη διαφορά.

Ἂς ἐπαναλάβωμεν τὸ τελευταῖον παράδειγμα τοῦ προηγουμένου ἀριθμ. Ἔχομεν

λογ. $x =$ λ. $37+$ λ. $49+$ λ. $17+$ λ. $175-$ (λ. $29+$ λ. $69+$ λ. 154),

	λ.	37 =	1,56820
	λ.	49 =	1,69020
	λ.	17 =	1,23045
	λ.	175 =	2,24304
συμπλ.	λ.	29 =	8,53760
συμπλ.	λ.	69 =	8,16115
συμπλ.	λ.	154 =	7,81248
			31,24312

Ἐπειδὴ τὸ ἐξαγόμενον ταύτης τῆς προσθέσεως εἶναι 31,24312, ἀφαιροῦμεν 3 δεκάδας, καὶ ἔχομεν 1,24312 τὴν ζητουμένην διαφοράν.

Τοῦτο εἶναι τὸ ἐν ἀριθμ. 268 ληφθὲν ἐξαγόμενον.

Ἡ χρῆσις τῶν ἀριθμητικῶν συμπληρωμάτων συντέμνει πολὺ τοὺς διὰ λογαρίθμων ὑπολογισμούς.

§. 271. Πρόοδοι κατὰ πηλίκον. Προτείνεται νὰ ἐμβάλωμεν μεταξὺ δύο δοθέντων ἀριθμῶν, ἀριθμόν τινα μ ἀναλογικῶν μέσων.

Ὁ τύπος $x = \sqrt[\mu+1]{\frac{\beta}{\alpha}}$ εὑρεθεὶς ἐν ἀρ. 249 γίνεται διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τῶν λογαρίθμων,

$$\lambda o\gamma.\ x = \frac{\lambda o\gamma.\ \beta - \lambda o\gamma.\ \alpha}{\mu + 1}.$$

Ἂς ὑποθέσωμεν π. χ., ὅτι θέλομεν νὰ ἐμβάλωμεν μεταξὺ 3 καὶ 4, 25 ἀναλογικοὺς μέσους.

Ἔχομεν εἰς ταύτην τὴν περίστασιν

$$\alpha = 3,\ \beta = 4,\ \mu = 25.$$

Ὅθεν ἐξάγεται

$$\lambda o\gamma.\ x = \frac{\lambda o\gamma.\ 4 - \lambda o\gamma.\ 3}{26}$$

Εὑρίσκομεν εἰς τοὺς πίνακας . . . $\lambda.\ 4 = 0,60206$
$\lambda.\ 3 = 0,47712.$

Ὅθεν . . $\lambda o\gamma.\ 4 - \lambda o\gamma.\ 3 = 0,12494$
Λοιπὸν διαιροῦντες διὰ 26 $\lambda.\ x = 0,00480.$

Ζητοῦντες δὲ τὸν εἰς τοῦτον τὸν λογάριθμον ἀνταποκρινόμενον ἀριθμόν, λαμβάνομεν $x = 1,0111$ μεῖον 0,0001.

Θέλομεν ἤδη νὰ σχηματίσωμεν τὸν $10^{\text{τον}}$ ἀναλογικὸν μέσον, ἢ τὸν $11^{\text{τον}}$ ὅρον ταύτης τῆς προόδου;

Ἂς καλέσωμεν χ τὸν ἀναλογικὸν τοῦτον μέσον. Ὅθεν (ἀρ. 248.)

$$\chi = 3\left(\sqrt[26]{\frac{4}{3}}\right)^{10},$$

ὅθεν ἐφαρμόζοντες τὸν λογάριθμον,

$$\lambda o\gamma.\ \chi = \lambda.\ 3 + \frac{10(\lambda.\ 4 - \lambda.\ 3)}{26}.$$

Ἀλλ' ἐλάβομεν ἤδη $\lambda.\ 4 - \lambda.\ 3 = 0,12494.$
Ὅθεν . $10(\lambda.\ 4 - \lambda.\ 3) = 1,24940,$
καὶ . $\dfrac{10(\lambda.\ 4 - \lambda.\ 3)}{26} = 0,04805.$

Προσέτι . . $\lambda.\ 3 = 0,47712$
Λοιπὸν τέλος πάντων $\lambda.\ \chi = 0,52517.$

Ζητοῦντες εἰς ποῖον ἀριθμὸν ἀνταποκρίνεται ὁ λογάριθμος οὗτος, εὑρίσκομεν 3,3510 τὸν ζητούμενον ἀναλογικὸν μέσον.

Αἱ μέθοδοι τοῦ τόκου καὶ τῆς ὑφαιρέσεως αἱ σύνθετοι ἀνάγονται εἰς τὸν προσδιορισμὸν ἑνὸς ὅρου ὁποιασδήποτε τάξεως εἰς τὴν κατὰ πηλίκον πρόοδον.

§. 272. **Σύνθετος τόκος.** Τεθέντος ἀθροίσματός τινὸς α εἰς ν χρόνους, ἢ μῆνας, πρὸς 1 τὰ 100 τὸν χρόνον ἢ μῆνα, ζητεῖται ἡ τιμὴ τοῦ ἀθροίσματος εἰς τὸ τέλος τοῦ χρόνου ν, ἐμπεριλαμβανομένου εἰς αὐτὴν ὄχι μόνον τοῦ κεφαλαίου α, καὶ τῶν σωρευθέντων τόκων, ἀλλ' ἀκόμη καὶ τῶν τόκων τόκου, εἰς τούτου τοῦ χρόνου τὸ διάστημα.

Ἀνάλυσις. Ἐπειδὴ 100φρ., δίδουσιν ἄθροισμά τι, ψ, εἰς ἕνα χρόνον, εἶναι φανερὸν (ἀρ. 224 καὶ 225) ὅτι α θέλει δώσει $\frac{\alpha\times\psi}{100}$. οὕτως τὸ κεφάλαιον α θεμένον ἕνα χρόνον, γεννᾷ περιεχομένου καὶ τοῦ κεφαλαίου, $\alpha+\frac{\alpha\times\psi}{100}$ ἢ $\alpha,\left(1+\frac{\psi}{100}\right)$.

Τὸ νέον τοῦτο ἄθροισμα, τὸ ὁποῖον συντίθεται ἀπὸ τὸ πρῶτον κεφάλαιον, καὶ ἀπὸ τὸν εἰς τὸ διάστημα τοῦ πρώτου χρόνου τόκον του, ἠμπορεῖ νὰ θεωρηθῇ, ὡς νέον κεφάλαιον τεθειμένον, διαρκοῦντος τοῦ δευτέρου χρόνου, καὶ σημειόνοντές το διὰ α', θέλομεν εὕρει, ὅτι γίνεται εἰς τὸ τέλος τοῦ δευτέρου χρόνου, περιεχομένου καὶ τοῦ κεφαλαίου, $\alpha'\left(1+\frac{\psi}{100}\right)$ ἤ, ἀντεισαγομένης ἀντὶ α' τῆς τιμῆς του,

$$\alpha\left(1+\frac{\psi}{100}\right)\left(1+\frac{\psi}{100}\right)=\alpha\left(1+\frac{\psi}{100}\right)^2.$$

Σημειόνοντες τὸ νέον τοῦτο κεφάλαιον διὰ α'', θέλομεν λάβει διὰ τὸ ἄθροισμα τούτου τοῦ κεφαλαίου καὶ τοῦ τόκου του εἰς τὴν διάρκειαν τοῦ τρίτου χρόνου,

$\alpha''\left(1+\frac{\psi}{100}\right)$ ἤ, ἀντεισαγομένης ἀντὶ α'' τῆς τιμῆς του,

$$\alpha\left(1+\frac{\psi}{100}\right)^2\left(1+\frac{\psi}{100}\right)=\alpha\left(1+\frac{\psi}{100}\right)^3.$$

Ἐν γένει λοιπὸν σημειόνοντες διὰ ν τὸν ἀριθμὸν τῶν χρόνων, εἰς τὴν διάρκειαν τῶν ὁποίων τὸ κεφάλαιον α ἐτέθη, καὶ παριστάνοντες διὰ A τὴν τιμὴν τοῦ κεφαλαίου τούτου μετὰ τῶν τόκων καὶ τόκων τόκου, ἔχομεν

$$A = \alpha\left(1 + \frac{\phi}{100}\right)^{\nu} = \alpha\left(\frac{100+\phi}{100}\right)^{\nu}.$$

Πρῶτον παράδειγμα. Ζητεῖται εἰς σύνθετον τόκον ἡ τιμὴ 12000 φράγκων τεθειμένων εἰς 6 χρόνους, πρὸς $5^{\text{φρ.}}$ τὰ $\frac{0}{0}$ τὸν χρόνον.

Ἔχομεν εἰς ταύτην τὴν περίστασιν $\alpha = 12000$, $\phi = 5$, $\nu = 6$.

Λοιπὸν ὁ τύπος γίνεται

$$A = 12000\left(\frac{100+5}{100}\right)^{6} = 12000\,(1,05)^{6}.$$

Δυσκολώτατα ἠθέλαμεν ἐκτελέσει κατ' εὐθεῖαν τὴν πρᾶξιν ταύτην, ἀλλ' ἐφαρμόζοντες τοὺς λογαρίθμους ἔχομεν,

$$\text{λογ. } A = \text{λογ. } 12000 + 6\ \text{λογ. } 1,05$$

Ἔχομεν δὲ κατὰ τοὺς πίνακας λογ. 1,05 = 0,02119

ὅθεν . . . 6 λογ. 1,05 = 0,12714;

ἀπ' ἄλλο μέρος . . λογ. 12000 = 4,07918

Λοιπὸν, λογ. A = 4,20632

καὶ ἐπομένως A = 16081 φράγκοις.

Οἱ μικροὶ πίνακες δὲν ἠμποροῦν νὰ δώσουν μεγαλήτερον βαθμὸν προσεγγίσεως.

Σ. Κ. Εἰς τὸ παράδειγμα τοῦτο, τὸ ἄθροισμα τῶν σωρευθέντων τόκων τοῦ κεφαλαίου, καὶ τῶν τόκων τόκου ἀναβαίνει εἰς . . . . $4081^{\text{φρ.}}$

ἀπ' ἄλλου μέρους, ἐὰν ζητηθῇ (ἀρ. 224).

ὁ ἁπλοῦς τόκος τῶν $12000^{\text{φρ.}}$ διὰ 6 χρόνους πρὸς 5 τὰ $\frac{0}{0}$, εὑρίσκομεν . . . 3600

διαφορὰ . . 481

Ὅθεν βλέπομεν, ὅτι 481 φράγκα ἐκφράζουν τὴν τιμὴν τῶν τόκων τόκου.

Δεύτερον παράδειγμα. Ζητεῖται εἰς σύνθετον τόκον ἡ τιμὴ τῶν 5628φρ. τεθειμένων διὰ 9 μῆνας καὶ $\frac{1}{2}$, πρὸς $\frac{3}{4}$ ἢ 0φρ., 75 τὰ 100 τὸν μῆνα.

Ἄς προσδιορίσωμεν πρῶτον τὴν τιμὴν τοῦ κεφαλαίου εἰς τὸ τέλος τῶν 9 μηνῶν.

Ἐπειδὴ εἰς τὴν περίστασιν ταύτην ὁ μὴν ἐλήφθη ὡς μονὰς τοῦ χρόνου, κάμνομεν εἰς τὸν γενικὸν τύπον,

$$\alpha = 5628\,,\ \psi = 0,75\,,\ \nu = 9.$$

ἔθεν

$$A = 5648\left(\frac{100+0,75}{100}\right)^9 = 5628\left(1,0075\right)^9$$

ὅθεν ἐφαρμόζοντες τοὺς λογαρίθμους,

$$\lambda o\gamma.\ A = \lambda o\gamma.\ 5628 + 9.\ \lambda o\gamma.\ 1,0075.$$

Εὑρίσκομεν εἰς τὸν πίνακα	λογ.	1,0075 =	0,00324
ὅθεν . . .	9 λογ.	1,0075 =	0,02916
προσέτι . . .	λογ.	5628 =	3,75035
λοιπὸν . .	λογ.	A =	3,77951

καὶ ἑπομένως

$$A = 6019^{\varphi\rho}.$$

Διὰ νὰ λάβωμεν ἔπειτα τὸν τόκον τῶν 6019φρ. διὰ δεκαπέντε ἡμέρας ἢ $\frac{1}{2}$ μῆνα, βοηθούμεθα ἀπὸ τὸν τύπον, $\frac{\alpha\psi\tau}{100}$ (ἀρ. 224), εἰς τὸν ὁποῖον κάμνομεν $\alpha = 6019, \psi = 0,75$ καὶ $\tau = \frac{1}{2}$. ὅθεν προκύπτει,

$$\frac{\alpha\psi\tau}{100}=\frac{6019\times0{,}75\times\frac{1}{2}}{100}=\frac{6019\times75}{20000}=23$$ μεῖον μονάδος.

Λοιπὸν τέλος πάντων 6042 φρ. ἐκφράζουν τὴν τιμὴν τοῦ κεφαλαίου 5628 φρ. εἰς σύνθετον τόκον.

§. 273. Ὑφαίρεσις σύνθετος. Αἱ δύο ποσότητες Α καὶ α, αἱ ὁποῖαι εἰσέρχονται εἰς τὸν τύπον

$$A=\alpha\left(\frac{100+\psi}{100}\right)^{\nu}$$

ἔχουν μεταξύ των τοιαύτην σχέσιν, ὥστε ἂν α ἦναι κεφάλαιόν τι, κατὰ τὸ παρὸν τεθειμένον, Α εἶναι ἡ τιμὴ αὐτοῦ εἰς τὸ τέλος ἑνός τινος χρόνου. Λοιπὸν ἀντιστρόφως, ὅταν Α σημειόνῃ ἄθροισμά τι πληρωτέον εἰς ν μονάδας χρόνων, α ἐκφράζει τὴν παροῦσαν αὐτοῦ τιμήν. Ὑποτίθεται δὲ πάντοτε, ὅτι θεωροῦμεν τοὺς σωρευθέντας τόκους καὶ τόκους τόκου, εἴτε ἀνατοκισμοὺς κεφαλαίου α. Προσέτι ἐξάγομεν ἀπὸ τοῦτον τὸν τύπον,

$$\alpha=\frac{A}{\left(\frac{100+\psi}{100}\right)^{\nu}},$$

τὸν ὁποῖον δυνάμεθα νὰ θεωρῶμεν, ὡς δίδοντα τὴν παροῦσαν τιμὴν Α τοῦ γραμματείου Α, καὶ πληρωτέαν εἰς ν χρόνους, ἀποβλέποντες εἰς τὸν σύνθετον τόκον τῆς παρούσης ταύτης τιμῆς.

Παράδειγμα. Ζητεῖται ἡ παροῦσα τιμὴ τοῦ ἀθροίσματος 30000 φράγκων πληρωτέων εἰς 7 χρόνους, ὑποτιθεμένου, ὅτι

1ον. Ἡ ὑφαίρεσις εἶναι σύνθετος.

2ον. Ἡ τιμὴ τοῦ τόκου εἶναι πρὸς 6 τὰ 100 τὸν χρόνον.

Κάμνομεν τότε $A = 30000$, $\nu = 7$, $\psi = 6$,

καὶ ὁ τύπος γίνεται $\alpha = \dfrac{30000}{(1,06)^7}$.

ὅθεν ἐφαρμόζοντες τοὺς λογαρίθμους, ἔχομεν

λογ. α = λογ. 30000 — 7 λογ. 1,06.

Ἔχομεν . . . . . . λογ. 30000 = 4,77712·

προσέτι . λογ. 1,06 = 0,02531

ὅθεν . 7 λογ. 1,06 = 0,17717 . . — 0,17717

λοιπὸν . . . . λογ. α = 4,29995

καὶ ἐπομένως α = 19950 φρ.

Ἀναζητοῦντες δὲ τὴν παροῦσαν τιμὴν τῶν 30000 κατὰ τὸν κανόνα τῆς ἀπλῆς ὑφαιρέσεως (ὑφαίρ. ἐσωτερικῶς, ἰδὲ ἀρ. 228) εὑρίσκομεν, 21126,76 ἐξαγόμενον διαφέρον τοῦ προηγουμένου κατὰ 1176,76.

Δὲν ἐκτείνομεν περαιτέρω τὰς ἐφαρμογὰς τῶν λογαριθμικῶν πινάκων· τὰ προηγούμενα μᾶς εἶναι ἱκανὰ διὰ νὰ καταλάβωμεν τὴν μεγάλην αὐτῶν ὠφέλειαν.

Λογάριθμοι τῶν Κλασμάτων.

§. 274. Εἰς τὰ προηγούμενα ζητήματα ἐθεωρήσαμεν μόνον τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, ἢ τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν, μεγαλητέρων παρὰ τὴν μονάδα. Οἱ λογάριθμοι οὗτοι ἀποτελοῦν μέρος τοῦ πίνακος, τὸν σχηματισμὸν τοῦ ὁποίου ἐδείξαμεν (ἀρ. 261 καὶ 262), ἢ διὰ μέσου τούτων λαμβάνονται εὐκόλως, ὅταν οἱ ἀνταποκρινόμενοι ἀριθμοὶ ἦναι ἀκέραιοι καὶ ὑπερβαίνουν τῶν πινάκων τὰ ὅρια, ἢ ὅταν ἦναι κλασματικοί.

Ἠξεύρομεν δὲ ὅτι εἰς τὸ σύστημα τοῦ Βριγγίου οἱ λογάριθμοι ὅλων τῶν ἀριθμῶν, περὶ τῶν ὁποίων ὡμιλήσαμεν, περιλαμβάνονται μεταξὺ τοῦ 0 καὶ 1, 1 καὶ 2, 2 καὶ 3, 3 καὶ 4 . . . . δηλαδὴ ὅτι οἱ λογάριθμοι τῶν μεταξὺ τῆς μονάδος καὶ τοῦ ἀπείρου