Οἱ τύποι οὗτοι μᾶς δείχνουν, ὅτι αἱ ἐργασίαι, αἱ ὁποῖαι ἐκτελοῦνται ἐπὶ τῶν στοιχείων τῆς κατὰ πηλίκον προόδου, ἀνταποκρίνονται εἰς τὰς βαθμοῦ μικροτέρου ἐργασίας, αἱ ὁποῖαι ἐκτελοῦνται ἐπὶ τῶν ἀναλόγων στοιχείων τῆς κατὰ διαφορὰν προόδου.

Οὕτως ὁ πολλαπλασιασμὸς ἀνταποκρίνεται εἰς πρόσθεσιν· ἡ διαίρεσις εἰς ἀφαίρεσιν.

Ὁ σχηματισμὸς τῶν δυνάμεων εἰς ἁπλοῦν πολλαπλασιασμόν· ἡ ἐξαγωγὴ τῶν ῥίζων, εἰς διαίρεσιν.

Ἐκ τούτων τῶν θεωριῶν ἀναμφιβόλως ὁδηγούμενος ὁ ἔνδοξος τῶν Λογαρίθμων ἐφευρετὴς ἐσύντεμε τοὺς ἀριθμητικοὺς ὑπολογισμούς, ἀρχόμενος ἀπὸ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, κάμνων νὰ ἐξαρτῶνται αἱ ἐπὶ τῶν ὅρων τῆς κατὰ πηλίκον προόδου ἐκτελούμεναι ἐργασίαι, ἀπὸ ἐργασίας ἐπὶ τῶν ὅρων τῆς κατὰ διαφορὰν προόδου ἐκτελουμένας. Ἀλλ' ἐπειδὴ εἰς στοιχειῶδες σύγγραμμα εἶναι ἀδύνατον νὰ περιγράψωμεν λεπτομερῶς τὴν ἀξιόλογον ταύτην ἀνακάλυψιν, θέλομεν γνωστοποιήσει μόνον τὰ οὐσιωδέστερα ἐξαγόμενα.

§. $\overline{\beta}^{ov.}$ Περὶ τῶν Λογαρίθμων.

§. 254. Ἂς θεωρήσωμεν μίαν τινὰ πρόοδον κατὰ πηλίκον ἔχουσαν πάντοτε τὸν πρῶτον ὅρων ἴσον μὲ 1, καὶ μίαν τινὰ πρόοδον κατὰ διαφορὰν ἔχουσαν τὸν πρῶτον ὅρον ἴσον μὲ 0.

Παραδείγματος χάριν,

∺ 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 :
÷ 0 . 3 . 6 . 9 . 12 . 15 . 18 . 21
∺ 256 : 512 : 1024 : 2048 : 4096 : 8192 .
. 24 . 27 . 30 . 33 . 36 . 39 .
: 4096 : 8192 : 16384 : 32768 . . . . . . (A).
. 36 . 39 . 42 . 45 . . . . . . (B).

Οἱ ὅροι τῆς κατὰ διαφορὰν προόδου λέγονται Λογάριθμοι τῶν ὅρων, οἱ ὁποῖοι κρατοῦν τὸν πρῶτον βαθμὸν εἰς τὴν κατὰ πηλίκον πρόοδον.

Ἐν γένει, Λογάριθμοι ἐννοοῦνται οἱ ἀριθμοὶ τῆς κατὰ διαφορὰν προόδου, οἱ ὁποῖοι ἀνταποκρίνονται ὅρος πρὸς ὅρον εἰς τοὺς ἀριθμοὺς τῆς κατὰ πηλίκον προόδου, καὶ Λογάριθμος ἑνὸς ἀριθμοῦ ἐν μέρει εἶναι ὁ ὅρος τῆς κατὰ διαφορὰν προόδου, ὁ κρατῶν τὴν αὐτὴν θέσιν, τὴν ὁποίαν κρατεῖ εἰς τὴν κατὰ πηλίκον πρόοδον ὁ τὸν ὁποῖον θεωροῦμεν ἀριθμός.

Θέλομεν ἴδει εὐθὺς κατωτέρω διὰ ποῖον λόγον ὑποθέτεται, ὅτι αἱ δύο πρόοδοι ἀρχίζουν ἀπὸ 1, καὶ ἀπὸ 0.

§. 255. Πρώτη Ἰδιότης. Ἂς ληφθῶσι κατὰ τύχην οἱ δύο ὅροι α καὶ β τῆς προόδου (Α), τῶν ὁποίων πρόκειται νὰ λάβωμεν τὸ γινόμενον.

Πρὸς τοῦτο ἂς θεωρήσωμεν τὸν πρῶτον ὅρον 1 τῆς προόδου (Α), τοὺς δύο ὅρους α, β καὶ ἕνα τέταρτον γ, οὕτως, ὥστε νὰ ἦναι τόσοι ὅροι μεταξὺ β καὶ γ, ὅσοι εἶνα μεταξὺ α καὶ 1. Ἂς ὑποθέσωμεν δὲ, ὅτι ἡ πρόοδος (Α) ἐστάθη εἰς τὸν ὅρον γ.

Ἂς θεωρήσωμεν παρομοίως εἰς τὴν πρόοδον (Β) τοὺς τέσσαρας ὅρους, οἱ ὁποῖοι ἀνταποκρίνονται εἰς τοὺς ἀριθμοὺς 1, α, β, γ, δηλαδὴ τοὺς λογαρίθμους των, τοὺς ὁποίους σημειόνομεν διὰ συντομίαν μὲ 0, λογ. α, λογ. β, λογ. γ, (ἡ γραφὴ λογ. σημειόνει λογάριθμον τοῦ).

Τούτου τεθέντος προκύπτει πρῶτον ἐκ τῆς ἰδιότητος τοῦ ἀριθμοῦ 251, ὅτι οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ 1, α, β, γ, σχηματίζουν ἀναλογίαν, ἐπειδὴ α, β εἶναι δύο ὅροι, τοὺς ὁποίους ἐλάβαμεν εἰς ἴσην διάστασιν ἀπὸ τὰ ἄκρα εἰς μίαν πρόοδον, ἡ ὁποία ἐστάθη εἰς γ.

Οὕτως ἔχομεν $1 \times \gamma$ ἢ $\gamma = \alpha \times \beta$.

Ἀπ' ἄλλο μέρος, οἱ τέσσαρες ὅροι 0, λογ. α, λογ. β, λογ. γ. σχηματίζουν παρομοίως ἰσοδιαφορὰν (ἀριθμ. 245).

Οὕτως ἔχομεν 0+λογ. γ ἢ λογ. γ=λογ. α+λογ. β.

Λοιπὸν βάλλοντες ἀντὶ τοῦ γ τὴν τιμήν του αβ, ἔχομεν

$$\text{λογ.}\ (\alpha\times\beta)=\text{λογ.}\ \alpha+\text{λογ.}\ \beta.$$

Ὅθεν βλέπομεν ὅτι ὁ λογάριθμος τοῦ γινομένου δύο ἀριθμῶν τῆς προόδου (Α) εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν λογαρίθμων τῶν δύο τούτων ἀριθμῶν.

Κατὰ τοῦτο λοιπὸν διὰ νὰ λάβωμεν τὸ γινόμενον δύο τινῶν ἀριθμῶν τῆς προόδου (Α), ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν τοὺς λογαρίθμους των εἰς τὴν πρόοδον (Β), νὰ τοὺς προσθέσωμεν, καὶ νὰ ζητήσωμεν ἔπειτα εἰς ποῖον ἀριθμὸν ἀνταποκρίνεται τοῦτο τὸ ἄθροισμα. Ὁ δ' ἀνταποκρινόμενος ἀριθμὸς εἶναι τὸ ζητούμενον γινόμενον.

Οὕτως ἔστωσαν οἱ δύο ἀριθμοὶ 64 καὶ 256, τῶν ὁποίων πρέπει νὰ λάβωμεν τὸ γινόμενον.

Λαμβάνω τοὺς λογαρίθμους των 18 καὶ 24 εἰς τὴν πρόοδον (Β), τοὺς προσθέτω, καὶ ἔχω 42. Ἔπειτα ζητῶ εἰς ποῖον ἀριθμὸν ἀνταποκρίνεται τὸ 42, καὶ εὑρίσκω 16384, τὸ ζητούμενον γινόμενον.

Εὑρίσκω παρομοίως ὅτι 12+27 ἢ 39, ἄθροισμα τῶν λογαρίθμων τοῦ 16 καὶ 512 ἀνταποκρίνεται εἰς 8192, γινόμενον τῶν δύο ἀριθμῶν 16, καὶ 512.

§. 256. Συνέπεια. Ἔστωσαν α, β, γ, δ . . . . πολλοὶ ἀριθμοὶ τῆς προόδου (Α). Ἐκ τῶν εἰρημένων προκύπτει, ὅτι λογ. αβγ=λογ. αβ+λογ. γ=λογ. α+λογ. β+λογ. γ.

Λογ. $\alpha\beta\gamma\delta$ = λογ. $\alpha\beta\gamma$ + λογ. δ = λογ. α + λογ. β + λογ. γ + λογ. δ, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Λοιπὸν ἐν γένει, ὁ λογάριθμος τοῦ γινομένου ἀριθμοῦ τινὸς παραγόντων εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν λογαρίθμων ὅλων τῶν παραγόντων.

Οὕτω διὰ νὰ λάβωμεν τὸ γινόμενον πολλῶν ἀριθμῶν τῆς προόδου (Α), ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν τοὺς λογαρίθμους των λαμβανομένους εἰς τὴν πρόοδον (Β), καὶ νὰ προσδιορίσωμεν εἰς ποῖον ἀριθμὸν ἀνταποκρίνεται τὸ ἄθροισμα· ὁ δὲ ἀνταποκρινόμενος ἀριθμὸς εἶναι τὸ ζητούμενον γινόμενον.

§. 257. Παρατήρησις. Αἱ δύο ἰσότητες $\gamma=\alpha\times\beta$, καὶ λογ. γ = λογ. α + λογ. β, ἀπὸ τὰς ὁποίας ἐκβάλαμεν τὴν προηγουμένην ἰδιότητα, ὑποθέτουν προφανῶς, ὅτι ὁ πρῶτος ὅρος τῆς προόδου (Α) εἶναι ἴσος μὲ 1, καὶ ὅτι ὁ πρῶτος ὅρος τῆς προόδου (Β) εἶναι ἴσος μὲ 0.

Ἂς ἴδωμεν τί ἤθελεν ἀκολουθήσει, ἂν ὁ πρῶτος ὅρος ἦτον ἀριθμός τις $\varkappa$ διὰ τὴν πρώτην πρόοδον, καὶ λογ. $\varkappa$. διὰ τὴν δευτέραν.

Ἠθέλαμεν ἔχει κατὰ τὰ εἰρημένα (ἀριθμ. 255).

1ον. Διὰ τὴν πρόοδον (Α) . . . . . $\varkappa\times\gamma=\alpha\times\beta$.

ὅθεν . . . . $\gamma=\dfrac{\alpha\times\beta}{\varkappa}$.

2ον. Διὰ τὴν πρόοδον (Β) . . .

λογ. $\varkappa$ + λογ. γ = λογ. α + λογ. β,

ὅθεν . . . . . λογ. γ = λογ. α + λογ. β — λογ. $\varkappa$.

Δηλαδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν λογαρίθμων δύο ἀριθμῶν α καὶ β τῆς προόδου (Α) ἐλαττωθὲν ἀπὸ τὸν πρῶτον ὅρον τῆς προόδου (Β), εἶναι ἴσον μὲ τὸν λογάριθμον τοῦ πηλίκου τῆς διαιρέσεως τοῦ γινομένου τῶν δύο ἀριθμῶν α καὶ β διὰ τοῦ πρώτου ὅρου τῆς προόδου (Λ).

Οὕτω διὰ νὰ μεταχειριζώμεθα τὴν ἰδιότητα ταύτην, πρέπει

1ον. Νὰ κάμνωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν λογαρίθμων.

2ον. Νὰ ἀφαιρῶμεν ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τοῦτο τὸν πρῶτον ὅρον τῆς προόδου (Β), καὶ νὰ ζητῶμεν εἰς ποῖον ἀριθμὸν τῆς προόδου (Λ) ἀνταποκρίνεται ἡ διαφορά.

3ον. Νὰ πολλαπλασιάζωμεν τὸν ἀνταποκρινόμενον ἀριθμὸν ἐπὶ τὸν πρῶτον ὅρον τῆς προόδου (Λ), καὶ οὕτω θέλομεν λάβει τὸ ζητούμενον γινόμενον.

Ὁδηγούμεθα λοιπὸν εἰς τὸ νὰ κάμωμεν πρόσθεσιν, ἀφαίρεσιν, καὶ πολλαπλασιασμὸν διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐξαγόμενον ἀπὸ ἕνα πολλαπλασιασμόν.

Ὅταν ὅμως ὑποθέτωνται οἱ πρῶτοι ὅροι ἴσοι μὲ 1 καὶ 0, ἡ ἀφαίρεσις καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς γίνονται ἄφαντα. Εἶναι λοιπὸν ἡ ὑπόθεσις αὕτη ἀναπόφευκτος· (ὅρα ἀριθμ. 254).

§. 258. Δευτέρα ἰδιότης. Ἐπειδὴ εἰς τὴν διαίρεσιν ὁ διαιρετέος θεωρεῖται ὡς γινόμενον, τοῦ ὁποίου ὁ διαιρέτης καὶ τὸ πηλίκον εἶναι οἱ δύο παράγοντες, ἕπεται ὅτι ὁ λογάριθμος τοῦ διαιρετέου εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν λογαρίθμων τοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ πηλίκου. Οὕτως ἀφαιροῦντες τὸν λογάριθμον τοῦ διαιρέτου ἀπ' ἐκεῖνον τοῦ διαιρετέου λαμβάνομεν τὸν λογάριθμον τοῦ πηλίκου.

Λοιπὸν ὁ λογάριθμος τοῦ πηλίκου τῆς διαιρέσεως δύο ἀριθμῶν τῆς προόδου (Λ), εἶναι ἴσος μὲ τὴν διαφορὰν μεταξὺ τοῦ λογαρίθμου τοῦ διαιρετέου, καὶ ἐκείνου τοῦ διαιρέτου.

Κατὰ τοῦτο λοιπὸν, διὰ νὰ ἐκτελέσωμεν διαίρεσιν δύο ἀριθμῶν ἀνηκόντων εἰς τὴν πρόοδον (Α), ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν εἰς τὴν πρόοδον (Β) τοὺς λογαρίθμους τοῦ διαιρετέου καὶ τοῦ διαιρέτου, νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν δεύτερον ἀπὸ τὸν πρῶτον, καὶ νὰ προσδιορίσωμεν εἰς ποῖον ἀριθμὸν τῆς προόδου (Α) ἀνταποκρίνεται αὕτη ἡ διαφορά. Οὕτω λαμβάνεται τὸ ζητούμενον πηλίκον.

Ἂς διαιρεθῇ 16384 διὰ 256.

Λαμβάνω εἰς τὴν πρόοδον (Β) τοὺς λογαρίθμους 42 καὶ 24 τῶν δύο ἀριθμῶν. Ἀφαιρῶ 24 ἀπὸ 42, καὶ ἔχω 18. Ζητῶ τὸν εἰς 18 ἀνταποκρινόμενον ἀριθμὸν, καὶ εὑρίσκω 64 τὸ ζητούμενον πηλίκον.

Ἡ δὲ τὴν διαίρεσιν ἀποβλέπουσα ἰδιότης ἐκφράζεται οὕτω μ' ἕνα σύντομον τρόπον,

$$\lambda o\gamma.\ \frac{\alpha}{\beta} = \lambda o\gamma.\ \alpha - \lambda o\gamma.\ \beta.$$

§. 259. Τρίτη ἰδιότης. Ἐπειδὴ δύναμίς τις βαθμοῦ ὁποιουδήποτε ἀριθμοῦ τινὸς εἶναι (ἀριθ. 111) τὸ γινόμενον τόσων ἴσων μὲ τοῦτον τὸν ἀριθμὸν παραγόντων, ὅσας μονάδας ἔχει τῆς δυνάμεως ὁ ἐκθέτης, ἕπεται φανερὰ (ἀριθμ. 256) ὅτι ὁ λογάριθμος δυνάμεώς τινος βαθμοῦ ὁποιουδήποτε ἑνός τινος ἀριθμοῦ τῆς προόδου (Α), εἶναι ἴσος μὲ τὸν λογάριθμον τοῦ ἀριθμοῦ πολλαπλασιαζομένου ἐπὶ τὸν τῆς δυνάμεως ἐκθέτην.

Οὕτως· $\lambda o\gamma.\ \alpha^5$, ἢ $\lambda o\gamma.\ \alpha \times \alpha \times \alpha \times \alpha \times \alpha = 5\ \lambda o\gamma.\ \alpha$,

$$\lambda o\gamma.\ \alpha^7 = 7\ \lambda o\gamma.\ \alpha,$$

καὶ ἐν γένει $\lambda o\gamma.\ \alpha^{\mu} = \mu.\ \lambda o\gamma.\ \alpha$.

Λοιπὸν διὰ νὰ λάβωμεν τὸ ἐξαγόμενον ἑνὸς σχηματισμοῦ δυνάμεως ἀριθμοῦ τινος τῆς προόδου (Α), ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν εἰς τὴν πρόοδον (Β) τὸν λογάριθμον τούτου τοῦ ἀριθμοῦ, νὰ τὸν πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν τῆς δυνάμεως ἐκθέτην, καὶ νὰ προσδιορίσωμεν, εἰς ποῖον ἀριθμὸν τῆς προόδου (Α) ἀνταποκρίνεται τοῦτο τὸ γινόμενον· ὁ δὲ ἀνταποκρινόμενος ἀριθμὸς θέλει εἶναι ἡ ζητουμένη δύναμις.

II. χ. Ὑψωθήτω 32 εἰς τὴν $\overline{3}^{\eta\nu}$ δύναμιν.

Λαμβάνω 15 λογάριθμον τοῦ 32, τὸν πολλαπλασιάζω ἐπὶ 3 ἐκθέτην τῆς δυνάμεως, καὶ ἔχω 45. Ζητῶ εἰς ποῖον ἀριθμὸν ἀνταποκρίνεται 45, καὶ εὑρίσκω 32768, τὴν $\overline{3}^{\eta\nu}$ δύναμιν τοῦ 32.

§. 260. **Τετάρτη καὶ τελευταία ἰδιότης.** Ἠξεύρομεν, ὅτι δύο ἀριθμοὶ ἐκφρασμένοι ὁ ἕνας διὰ α, καὶ ὁ ἄλλος διὰ α^{μ}, συνδέονται μεταξύ των οὕτως, ὥστε ἐπειδὴ ὁ δεύτερος εἶναι ἡ μ^{η} δύναμις τοῦ πρώτου, κατ' ἀντίστροφον λόγον καὶ ὁ πρῶτος εἶναι ἡ μ^{η} ῥίζα τοῦ δευτέρου.

Ἀλλ' ἐδείχθη ὅτι λογ. $\alpha^{\mu} = \mu$. λογ. α,

Λοιπὸν διαιροῦντες διὰ μ, ἔχομεν λογ. $\alpha = \frac{\text{λογ. } \alpha^{\mu}}{\mu}$.

Δηλαδὴ ὁ λογάριθμος τῆς $\mu^{\eta\varsigma}$ ῥίζης ἑνὸς ἀριθμοῦ εἶναι ἴσος μὲ τὸν λογάριθμον τοῦ ἀριθμοῦ, διαιρεθέντος διὰ τοῦ δείκτου τῆς ἐξαχθησομένης ῥίζης·

ἢ λογ. $\sqrt[\mu]{\beta} = \frac{\text{λογ. } \beta.}{\mu}$

Οὕτω διὰ νὰ ἐξάξωμεν τὴν $\mu^{\eta\nu}$ ῥίζαν ἀριθμοῦ τινος τῆς προόδου (Α), ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν τὸν λογάριθμόν του εἰς τὴν πρόοδον (Β), νὰ τὸν διαιρέσωμεν διὰ μ, καὶ ἔπειτα νὰ ζητήσωμεν εἰς ποῖον ἀριθμὸν ἀνταποκρίνεται τὸ πηλίκον τοῦτο· ὁ δὲ ἀνταποκρινόμενος ἀριθμὸς εἶναι ἡ ζητουμένη ῥίζα.

Ἂς ἐξαχθῇ ἡ 3^{η} ῥίζα τοῦ 32768.

Λαμβάνω 45 λογάριθμον τοῦ 32798, καὶ τὸν διαιρῶ διὰ 3, δείκτου τῆς ῥίζης, εὑρίσκω 15, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀνταποκρινόμενον ἀριθμὸν 32. Λοιπὸν 32 εἶναι ἡ ζητουμένη ῥίζα.

Ἄς ἐξαχθῇ ἀκόμη ἡ 5^{η} ῥίζα τοῦ 32768.

Λαμβάνω 45 λογάριθμον τοῦ 32768, τὸν διαιρῶ διὰ 5, δείκτου τῆς ἐξαχθησομένης ῥίζης, καὶ ἔχω 9. Ὁ δὲ ἀνταποκρινόμενος εἰς 9 ἀριθμὸς εἰς τὴν πρόοδον (Α) εἶναι 8. Λοιπὸν 8 εἶναι ἡ 5^{η} ῥίζα τοῦ 32768.

„Κατασκευὴ τῶν πινάκων τῶν Λογαρίθμων."

§. 261. Αἱ προηγούμεναι θεωρίαι ἀρκοῦν διὰ νὰ καταλάβωμεν τὴν ὠφέλειαν πίνακός τινος λογαρίθμων, δηλαδὴ πίνακος ἔχοντος ἀφ' ἑνὸς μὲν μέρους σειρὰν ἀριθμῶν εἰς πρόοδον κατὰ πηλίκον, ἀπὸ τοῦ ἄλλου δὲ τοὺς λογαρίθμους των, ἢ τοὺς ἀριθμοὺς εἰς πρόοδον κατὰ διαφοράν.

Ἐπειδὴ δὲ εἴδομεν, ὅτι ὅλαι αἱ ἐργασίαι ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν ὁποιασδήποτε φύσεως ἄγονται πάντοτε εἰς ἐργασίας ἐπὶ ἀριθμῶν ἀκεραίων, ἕπεται ὅτι διὰ τὴν ἁπλότητα τῶν ὑπολογισμῶν, ἀρκεῖ νὰ περιέχῃ ὁ πίναξ τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν. Ἰδοὺ τώρα πῶς σχηματίζεται τοιοῦτος πίναξ.

Μεταξὺ τῶν ἀπειραρίθμων συστημάτων δύο προόδων τῆς μὲν κατὰ πηλίκον, τῆς δὲ κατὰ διαφοράν, ἐκλέξαμεν τὴν δεκαπλῆν πρόοδον. ∷ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 : 1000000 . . . ., καὶ τὴν φυσικὴν τῶν ἀριθμῶν σειράν,

÷ 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . . . . . .

Τούτου τεθέντος, ἂς ἐννοήσωμεν, ὅτι ἐβάλαμεν μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 1 καὶ 10, 10 καὶ 100, 100 καὶ 1000 (ἀριθμ. 250) τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἀναλογικῶν μέσων, ἀλλ' ἀρκετὰ μεγάλον, ὥστε νὰ ἤμεθα βέβαιοι ὅτι 2, 3, 4 . . . 9 | 11, 12, 13, ... 99 | 101, 102, ... 999, περιέχονται μεταξὺ τῶν ἀναλογικῶν τούτων μέσων, ἢ τοὐλάχιστον δὲν διαφέρουν ἀπό τινας αὐτῶν, εἰμὴ κατὰ ποσότητα τόσον μικρὰν, ὥστε χωρὶς ἐπαισθητὸν ἁμάρτημα νὰ ἐπέχωσι τὸν τόπον των.

Ἂς ἐννοήσωμεν ἔπειτα, ὅτι μεταξὺ τῶν ὅρων 0, καὶ 1, 1 καὶ 2, 2 καὶ 3, 3 καὶ 4 τῆς προόδου κατὰ διαφορὰν, ἐβάλαμεν τόσους διαφορικοὺς μέσους, ὅσους καὶ ἀναλογικούς. Εἶναι φανερὸν κατὰ τὰ προειρημένα, ὅτι οἱ ὅροι τῆς νέας προόδου κατὰ διαφορὰν θέλουν εἶναι οἱ λογάριθμοι τῆς νέας προόδου κατὰ πηλίκον.

Κατὰ τὸ παρὸν ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι εἰς τὸν ἀπέραντον ἀριθμὸν τῶν ὅρων τῶν δύο προόδων λογαριάζομεν μόνον τοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς 1, 2, 3, 4 . . . . 9, 10, 11, 12 . . . . ἀνήκοντας εἰς τὴν πρόοδον κατὰ πηλίκον, ὡς καὶ τοὺς λογαρίθμους, οἱ ὁποῖοι τοὺς ἀνταποκρίνονται οὕτω. Θέλομεν λάβει ἕνα πίνακα, περικλείοντα.

Ἀφ' ἑνὸς μὲν μέρους τοὺς κατὰ διαδοχὴν ἀκεραίους ἀριθμοὺς, οἱ ὁποῖοι τῷ ὄντι δὲν θέλουν κάμει πλέον μεταξύ των πρόοδον κατὰ πηλίκον, ἀλλὰ θέλουν θεωρεῖσθαι ἐπίσης ὡς ὅροι προόδου τινὸς τούτου τοῦ εἴδους.

Ἀπ' ἄλλου δὲ, τοὺς λογαρίθμους των, οἱ ὁποῖοι δὲν θέλουν εἶναι εἰς πρόοδον κατὰ διαφορὰν, ἀλλὰ θέλουν εἶναι ἐπίσης ὅροι ἀναλογίας τινὸς τούτου τοῦ εἴδους, κρατοῦντες τὴν αὐτὴν τάξιν, τὴν ὁποίαν κρατοῦν εἰς τὴν πρόοδον κατὰ πηλίκον οἱ ἀριθμοὶ, τῶν ὁποίων τοὺς λογαρίθμους παρασταίνουν οὗτοι οἱ ὅροι.

Οὕτω λοιπὸν αἱ ἀποβλέπουσαι τὰς διαφόρους ἀριθμικὰς ἐργασίας ἰδιότητας ἐφαρμόζονται εἰς ὅλους τοὺς ἀριθμοὺς τούτου τοῦ πίνακος, καὶ εἰς τοὺς λογαρίθμους των.

Σ. Κ. Κατ' ἀρχὰς φαίνεται δύσκολον νὰ καταλήβωμεν πῶς ἐμβάλλεται μεταξὺ δύο δοθέντων ἀριθμῶν 1 καὶ 10 π. χ. μέγας ἀριθμὸς ἀναλογικῶν μέσων· ἐπειδὴ διὰ νὰ ἐμβάλωμεν δύο μόνον, πρέπει (ἀρ. 249) κατὰ τὸν τύπον $x = \sqrt[\mu+1]{\frac{\lambda}{\alpha}}$, ὁ ὁποῖος δίδει τὴν ἔκφρασιν τοῦ λόγου, νὰ ἐξάξωμεν μετὰ πολλοτάτας προσεγγίσεις τὴν 3ην ῥίζαν τοῦ $\frac{10}{1}$ ἢ τοῦ 10, ἐργασία τὴν ὁποίαν ἠξεύρομεν ἤδη πόσον εἶναι πολύπονος.

Τί δὲ ἠθέλαμεν κάμει, ἐὰν ἔπρεπε νὰ ἐμβάλωμεν 10,000,000, ὡς δείχνουν αἱ πραγματεῖαι τῆς ἀριθμητικῆς; Ἀλλ' ὁ σκοπός μας ἦτον νὰ δείξωμεν τὴν ὕπαρξιν λογαριθμικοῦ τινὸς πίνακος. Πλὴν εἰς τὰ ὑψηλότερα μέρη τῆς Μαθηματικῆς εὑρίσκονται μέθοδοι πολὺ πλέον τούτων συντομώτεραι.

§. 262. Ἀλλ' ἰδοὺ στοιχειώδης τις μέθοδος ὁπωσοῦν πλέον εὐκατάληπτος, ὡς ὑποθέτουσα διαδοχικὰς ἐξαγωγὰς τετραγωνικῶν ῥιζῶν.

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι θέλομεν νὰ προσδιορίσωμεν τὸν λογάριθμον τοῦ τοῦ 5 μερικῶς.

Ἐπειδὴ 5 περιλαμβάνεται μεταξὺ 1 καὶ 10, ἂς ἐμβάλομεν μόνον ἕνα μέσον ἀναλογικὸν μεταξὺ 1 καὶ 10· (ἔχομεν ἀρ. 210· $1 : x :: x : 10$, ὅθεν $x = \sqrt{10} = 3,1622776 \ldots$)· ἔπειτα ἕνα διαφοριτὸν μέσον μεταξὺ 0 καὶ 1· (ἔχομεν ἀριθ. 206. ÷ 0 : ψ : ψ : 1· ὅθεν $\psi = \frac{1}{2} = 0{,}5$.)

Τούτου τεθέντος, $\frac{1}{2}$ ἢ 0,5 εἶναι φανερὰ ὁ λογάριθμος τοῦ $\sqrt{10}$, ἐξαγόμενον σύμφωνον προσέτι μὲ τὴν ἰδιότητα τοῦ ἀρ. 260, ἐπειδὴ ἔχομεν

$$\lambda o\gamma.\ \sqrt{10} = \frac{\lambda o\gamma.\ 10}{2} = \frac{1}{2}.$$

Κατὰ τὸ παρὸν, ἐπειδὴ 5 εἶναι μεγαλήτερον παρὰ 3, 162 .... καὶ μικρότερον παρὰ 10, ἂς ἐμβάλωμεν νέον ἀναλογικὸν μέσον μεταξὺ 3,1622 .... καὶ 10. ἔπειτα μέσον διαφορικὸν μεταξὺ $\frac{1}{2}$ καὶ 1· ὅθεν

3,1622... : χ :: χ : 10· ὅθεν $\chi = \sqrt{31{,}622776} = 5{,}623$ .... καὶ $\frac{1}{2} \cdot \psi : \psi \cdot 1$, ὅθεν $\psi = \frac{3}{4} = 0{,}75$.

Ὁ διαφορικὸς μέσος εἶναι προσέτι ὁ λογάριθμος τοῦ νέου ἀναλογικοῦ μέσου.

Ἐπειδὴ ἀκόμη ὁ ἀριθμὸς 5 περιέχεται μεταξὺ 3,162 ... καὶ 5.623 . ; λαμβάνομεν ἀναλογικόν τινὰ μέσον μεταξὺ 3,162 .... καὶ 5,623 .... ἔπειτα μέσον διαφορικὸν μεταξὺ 0,5 καὶ 0,75.

Ἤδη, εἶναι φανερὸν ὅτι ἀκολουθοῦντες νὰ ἐμβάλλωμεν ἀναλογικοὺς μέσους, θέλομεν φθάσει εἰς τὸ νὰ προσδιορίσωμεν δύο, οἱ ὁποῖοι θέλουν διαφέρει ὁ εἷς ἀπὸ τὸν ἄλλον καθ' ὅσον μικρὰν ποσότητα θέλομεν, καὶ οἱ ὁποῖοι θέλουν περιλαμβάνει τὸν ἀριθμὸν 5. Ἠμπορεῖ λοιπὸν χωρὶς σφάλμα νὰ ἐπέχῃ τὸν τόπον τοῦ 5, ἀναλογικός τις μέσος, καὶ ὁ εἰς αὐτὸν ἀνταποκρινόμενος διαφορικὸς θέλ' εἶναι ὁ ζητούμενος λογάριθμος. Μὲ παρομοίας πράξεις λαμβάνονται καὶ οἱ λογάριθμοι τοῦ 2, 3, 7.

Ἂς παρατηρήσωμεν προσέτι, ὅτι ἀρκεῖ ὑπολογιζόμενοι οὕτως τὸν λογάριθμον ἑκάστου ἀκεραίου ἀριθμοῦ νὰ προσδιορίσωμεν κατ' εὐθεῖαν τοὺς λογαρίθμους τῶν πρώτων ἀριθμῶν. Οἱ δὲ λογάριθμοι τῶν πολλαπλῶν ἀριθμῶν λαμβάνονται διὰ τῶν λογαρίθμων τῶν πρώτων ἀριθμῶν, κατὰ τὰς ἰδιότητας ἐν ἀρ. 256 καὶ 259.

Π. χ. Ἔχομεν λογ. $15 =$ λογ. $5 \times 3 =$ λογ. $5 +$ λογ. 3. Λογ. $36 =$ λογ. $2^2 \times 3^2 = 2$ λογ. $2 + 2$ λογ. 3, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

„Διάταξις καὶ χρῆσις τῶν κοινῶν Πινάκων.“

§. 263. Καλοῦνται κοινοὶ Λογάριθμοι ἐκεῖνοι, οἵτινες σχηματίζονται κατὰ τὸ σύστημα τῶν δύο προόδων,

$$\left\{\begin{array}{l} \div\!\div\ 1 : 10 : 100 : 1000 \ldots \\ \div\ 0 .\ 1 .\ 2 :\ 3 \ldots \end{array}\right\}$$ ἐπειδὴ οὗτος εἶναι ὁ κοινότερος πίναξ.

Ὀνομάζονται ἀκόμη λογάριθμοι τοῦ Βριγγίου τοῦ πρώτου τῶν πινάκων ἐφευρετοῦ.

Καλεῖται δὲ βάσις τοῦ κοινοῦ συστήματος, ὁ λόγος τῆς κατὰ πηλίκον προόδου, ἢ 10.

Προκύπτει ἐκ τῆς θεωρίας τῶν δύο προόδων,

1ον. ὅτι ὁ λογάριθμος τῆς βάσεως ἢ 10 εἶναι ἴσος μὲ 1.

2ον. ὅτι ὁ λογάριθμος τῆς μονάδος εἶναι 0.

Ἡ τελευταία ἰδιότης εἶναι ἀληθὴς εἰς ὅλον τὸ λογαριθμικὸν σύστημα, ἐπειδὴ προείδομεν, ὅτι αἱ δύο πρόοδοι πρέπει νὰ ἀρχίζωσιν ἀπὸ 1 καὶ ἀπὸ 0.

Ἀλλ' ἡ πρώτη ὑποθέτει τὴν κατὰ διαφορὰν πρόοδον, ὡς τὴν φυσικὴν σειρὰν τῶν ἀριθμῶν, τὸ ὁποῖον δὲν εἶναι ἀναπόφευκτον εἰς τὴν ὕπαρξιν τῶν ἰδιοτήτων τοῦ λογαριθμικοῦ συστήματος.

Ὅταν ἦν ὁποιαδήποτε ἡ κατὰ διαφορὰν πρόοδος, ἠμποροῦμεν νὰ εἴπωμεν μόνον, ὅτι ὁ λόγος τῆς προόδου κατὰ πηλίκον, ἢ ἡ βάσις τοῦ συστήματος ἔχει λογάριθμον τὸν λόγον τῆς προόδου κατὰ διαφοράν.

§. 264. Γνωρίζομεν ἀκόμη κατὰ τὰς δύο εἰρημένας προόδους, ὅτι οἱ λογάριθμοι ὅλων τῶν ἀκεραίων ἢ κλασματικῶν ἀριθμῶν τῶν μεταξὺ 1 καὶ 10 περιεχομένων, εἶναι μικρότεροι τῆς μονάδος· ὅτι ἐκεῖνοι τῶν μεταξὺ 10 καὶ 100 περιεχομένων ἀριθμῶν, συνθέτονται ἀπὸ μονάδα καὶ ἕν τι κλάσμα· ὅτι ἐκεῖνοι τῶν μεταξὺ 100 καὶ 1000 περιεχομένων ἀριθμῶν συνθέτονται ἀπὸ δύο μονάδας καὶ ἕν τι κλάσμα, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Εἰς τοὺς τοῦ Βριγγίου πίνακας τὰ κλάσματα ταῦτα ἐξετιμήθησαν εἰς δεκαδικά.

Ὡσαύτως οἱ λογάριθμοι τῶν ἀπὸ ἓν μόνον ψηφίον συνισταμένων ἀριθμῶν παρασταίνονται ἀπὸ δεκαδικὸν κύριον κλάσμα, οἱ δὲ τῶν ἀπὸ δύο ψηφία ἀριθμῶν ἔχουν 1 ἀκέραιον μέρος, ἀκολουθούμενον προσέτι ἀπὸ δεκαδικὸν κλάσμα.

Οἱ λογάριθμοι τῶν ἀπὸ τρία ψηφία ἀριθμῶν ἔχουν 2 ἀκέραιον μέρος.

Ἐν γένει τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ λογαρίθμου ἑνὸς ἀριθμοῦ περικλείει, μεῖον μιᾶς, τόσας μονάδας, ὅσα ψηφία ἔχει ὁ ἀριθμὸς, ἂν ἦναι ἀκέραιος, ἢ τὸ ἀκέραιον αὐτοῦ μέρος, ἂν ἦναι κλασματικός.

Τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ λογαρίθμου ὀνομάζεται χαρακτηριστικόν· ἐπειδὴ διὰ μόνης τῆς θεωρίας αὐτοῦ κρίνομεν εἰς ποίας τάξεις μονάδων περιλαμβάνεται ὁ ἀνταποκρινόμενος εἰς τὸν προτεθέντα λογάριθμον ἀριθμός.

Οὕτω 2,74056 ἀνταποκρίνεται εἰς ἀριθμὸν ἀπὸ τρία ψηφία· δηλαδὴ εἰς ἀριθμὸν μεταξὺ 100 καὶ 1000 περιεχόμενον. Ὡσαύτως 4,05678 . . . εἶναι ὁ λογάριθμος τοῦ μεταξὺ 10000 καὶ 100000 περιλαμβανομένου ἀριθμοῦ.

§. 265. Γνωρίζοντες τὸν λογάριθμον ὁποιουδήποτε ἀριθμοῦ, λαμβάνομεν εὐκόλως ἐκεῖνον ἑνὸς ἄλλου δεκάκις, ἑκατοντάκις, χιλιάκις . . . μεγαλητέρου. Ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο νὰ προσθέσωμεν 1, 2, 3, ... μονάδας εἰς τὸ χαρακτηριστικόν.

Ἔστω τῷ ὄντι α ὁ ἀριθμὸς, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὸν λογάριθμον. Ἔχομεν λοιπὸν (ἀριθ. 255).

$$\lambda o\gamma.\ \alpha\times 10 = \lambda o\gamma.\ \alpha + \lambda o\gamma.\ 10 = \lambda o\gamma.\ \alpha + 1$$
$$\lambda o\gamma.\ \alpha\times 100 = \lambda o\gamma.\ \alpha + \lambda o\gamma.\ 100 = \lambda o\gamma.\ \alpha + 2$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$\lambda o\gamma.\ \alpha\times 10^{\nu} = \lambda o\gamma.\ \alpha + \lambda o\gamma.\ 10^{\nu} = \lambda o\gamma.\ \alpha + \nu.$$

Ἀντιστρόφως οἱ λογάριθμοι ἑνὸς ἀριθμοῦ ὅταν γνωσθῇ, διὰ νὰ λάβωμεν ἐκεῖνον ἑνὸς ἄλλου δεκάκις, ἑκατοντάκις, χιλιάκις . . . μικροτέρου, ἀρκεῖ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸ χαρακτηριστικὸν 1, 2, 3, 4... μονάδας.

Τῷ ὄντι ἔχομεν (ἀριθμ. 158)

$$\lambda o\gamma.\ \frac{\alpha}{1000} = \lambda o\gamma.\ \alpha - \lambda o\gamma.\ 1000 = \lambda o\gamma.\ \alpha - 3$$ · καὶ οὕτω περὶ τῶν ἄλλων.

Ἐντεῦθεν συμπεραίνεται, ὅτι οἱ λογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν

4567 | 456,7 | 45,67 | 4,567 |, π. χ. δὲν διαφέρουν ἀλλήλων κατὰ τὸ δεκαδικὸν μέρος, ἀλλὰ μόνον κατὰ τὸ χαρακτηριστικὸν, τὸ ὁποῖον διὰ μὲν τὸν πρῶτον ἀριθμὸν εἶναι 3, διὰ δὲ τὸν δεύτερον, 2, καὶ διὰ τὸν τρίτον 1 καὶ 0 διὰ τὸν τέταρτον.

Ἐν γένει ὁ λογάριθμος δεκαδικοῦ κλάσματος εἶναι ὁ αὐτὸς, ἐκτὸς τοῦ χαρακτηριστικοῦ, μὲ τὸν λογάριθμον τοῦ προτεθέντος ἀριθμοῦ μετὰ τὴν τῆς ὑποστιγμῆς ἀφαίρεσιν· ἀλλ' εἰς τὸ δεκαδικὸν μέρος δὲν εἶναι καμμία διαφορά.

Εἶναι καλὸν νὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι ἡ ἰδιότης αὕτη εἶναι ὅλως διόλου ἰδιάζουσα εἰς τὸ σύστημα τῶν λογαρίθμων τοῦ Βριγγίου. Ὅθεν καὶ προτιμητέον τὸ σύστημα τοῦτο παντὸς ἄλλου, ἐπειδὴ τὰ δεκαδικὰ κλάσματα εἶναι ἐκεῖνα, ἐφ' ὧν συχνότερα ἐργαζόμεθα.

§. 286. Ἦτον ἀδύνατον νὰ βαλθῶσιν εἰς τοὺς πίνακας ἄλλοι παρὰ οἱ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν λογάριθμοι, ἐπειδὴ δύο διαδοχικῶν ἀριθμῶν περιλαμβανόντων μεταξύ των ἀπειρίαν κλασματικῶν ἀριθμῶν, ἤθελεν εἶναι παράλογον νὰ προτιμήσωμεν τούτους ἀπ' ἐκείνους. Ἐκτὸς τούτου οἱ ὑπολογισμοὶ ἐπὶ τῶν κλασματικῶν ἦσαν δυσκολώτατοι, καὶ εἰς ἔν τι ὅριον ἐπίσης πολλὰ μικρὸν ἦτον ἀδύνατον νὰ περιορισθῶσι.

Οὕτως εἶναι πίνακες οἱ ὁποῖοι φθάνουν ἕως εἰς 10000, ἄλλοι εἰς 20000· οἱ πλέον ἐκτεταμένοι εἶναι οἱ τοῦ Καλλέτου, φθάνοντες ἕως εἰς 108000.

Ἤδη αἱ λογαριθμικαὶ ἐφαρμογαὶ ἀπαιτοῦν συχνὰ τὴν ἀναζήτησιν λογαρίθμου ἑνὸς ἀριθμοῦ, εἴτε ὑπερβαίνοντος τὰ τῶν πινάκων ὅρια, εἴτε ὄντος κλασματικοῦ. Πῶς εὑρίσκεται τότε ὁ λογάριθμος οὗτος; Τοῦτο θέλομεν ἀναπτύξει διὰ τῶν ἀκολούθων παραδειγμάτων· (ὑποθέτομεν δὲ εἰς ὅσα λέγομεν, ὅτι κρατοῦμεν εἰς χεῖρας μόνον τοὺς μικροὺς πίνακας τοῦ Βεϋνώδου ἢ τοῦ Λαλάνδου).

§. 287. Ἀριθμοῦ ὁποιουδήποτε δοθέντος νὰ προσδιορίσωμεν τὸν λογάριθμον.