108 εἰς μέρη ἀνάλογα μεταξὺ τῶν κλασμάτων $\frac{3}{12}$, $\frac{4}{12}$, $\frac{5}{12}$, ἢ μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 3, 4 καὶ 5· καὶ οὕτω συνάγομεν (ἀρ. 235) 27, 36, 45 διὰ τὰ τρία ζητούμενα κέρδη.

Τὰ ἐπιλυθεῖσα διάφορα ζητήματα εἶναι ἐξ ἐκείνων, τὰ ὁποῖα πολλοὶ συγγραφεῖς λύουσι διὰ τῆς μεθόδου τῆς καλουμένης ψευδοῦς ὑποθέσεως ἁπλῆς ἢ διπλῆς.

Ἐγὼ ἀπεσιώπησα τὸν μέθοδον ταύτην, ἐπειδὴ ἐν γένει δὲν εὐχαριστεῖ τὸ πνεῦμα, καὶ ἡ ἀκριβὴς της ἀπόδειξις ἐπιστηρίζεται εἰς μερικὰς ἀρχὰς τῆς ἀλγέβρας, ἀρχὰς, αἱ ὁποῖαι ἐφαρμόζονται μὲ περισσοτέραν εὐκολίαν εἰς τὴν ἄμεσον λύσιν τῶν αὐτῶν τούτων ζητημάτων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Η'.

Θεωρία τῶν Προόδων καὶ τῶν Λογαρίθμων.

Ἤθελ' εἶναι πλήρης ἡ πραγματεία αὕτη τῆς ἀριθμητικῆς, ἐὰν περιέκλειε τοὐλάχιστον τὰς πρώτας γνώσεις τῆς θεωρίας τῶν λογαρίθμων. Ἡ ὡραία αὕτη ἀνακάλυψις, ὀφειλομένη εἰς τὸν Νέπερον ἄρχοντα Σκῶτον, εἶναι ἡ ἀξιολογωτέρα ἀφ' ὅσας ἔγειναν εἰς τὴν Μαθηματικὴν, ἐπειδὴ μὲ τὴν συνδρομὴν πίνακός τινος λογαρίθμων ἐκτελοῦμεν τάχιστα τοὺς πλέον συμπεπλεγμένους ἀριθμητικοὺς ὑπολογισμούς.

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΕΡΕΥΝΩΝ ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΤΟΜΕΑΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ ΕΠ. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ Θ. ΠΕΤΣΙΟΣ
Ε.Υ.Δ της Κ.τ.Π ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

Ἀλλὰ πρὶν ἀναπτύξωμεν τῆς θεωρίας ταύτης τὰς ἀρχὰς, πρέπει ἀφεύκτως νὰ γνωστοποιήσωμεν τὰς ἀρχικὰς ἰδιότητας δύο σειρῶν ἀριθμητικῶν, τὰς ὁποίας ἠμποροῦμεν νὰ θεωρῶμεν ὡς ἔκτασιν τῶν ἰσοδιαφορῶν καὶ ἀναλογιῶν. Αὗται εἶναι αἱ Πρόοδοι κατὰ διαφορὰν, καὶ αἱ Πρόοδοι κατὰ πηλίκον.

§. αος. Περὶ τῶν Προόδων.

§. 241. Πρόοδος κατὰ διαφορὰν (ἄλλοτε πρόοδος ἀριθμητική) καλεῖται σειράτις ἀριθμῶν, ἕκαστος τῶν ὁποίων ὑπερέχει τὸν πρὸ ἑαυτοῦ ἢ εἶναι κατώτερος ἀπ' αὐτὸν κατ' ἀριθμὸν τινὰ σταθερὸν, ὁ ὁποῖος ὀνομάζεται ὁ λόγος ἢ ἡ διαφορὰ τῆς Προόδου.

Οὕτως ἔστωσαν αἱ δύο σειραί.

$\div 2 . 5 . 8 . 11 . 14 . 17 . 20 . 23 . 26 . 29 \ldots\ldots$

$\div 60 . 55 . 50 . 45 . 40 . 35 . 30 . 25 . 20 \ldots\ldots$

Εἰς τὴν πρώτην ἕκαστος ὅρος ὑπερβαίνει τὸν πρὸ ἑαυτοῦ κατὰ τὸν σταθερὸν ἀριθμὸν 3. Τῷ ὄντι $5 - 2 = 3$, $8 - 5 = 3 \ldots$ Τὸ 3 λέγεται ὁ λόγος ἢ ἡ διαφορὰ τῆς προόδου.

Εἰς τὴν δευτέραν ἕκαστος ὅρος εἶναι κατώτερος ἀπὸ τὸν πρὸ ἑαυτοῦ κατὰ τὸν σταθερὸν ἀριθμὸν 5. οὕτως $60 - 55 = 5$, $55 - 50 = 5$, $50 - 45 = 5 \ldots$ Τὸ 5 εἶναι λοιπὸν ὁ λόγος τῆς προόδου.

Ἡ πρώτη καλεῖται πρόοδος αὔξουσα· ἐπειδὴ οἱ ὅροι πηγαίνουν αὐξαίνοντες, καὶ ἡ δευτέρα πρόοδος φθίνουσα· ἐπειδὴ οἱ ὅροι πηγαίνουν φθίνοντες ἤγουν ὀλιγοστεύοντες.

Διὰ νὰ ἐκφράσωμεν, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ εἶναι εἰς πρόοδον κατὰ διαφορὰν θέτομεν ἐμπρόστων τὸ σημεῖον $\div$ καὶ στιγμὴν μεταξὺ τῶν διαφόρων ὅρων.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΤΟΜΕΑΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΕΡΕΥΝΩΝ ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ: ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ Θ. ΠΕΤΣΙΟΣ
Ε.Υ.Δ της Κ.τ.Π ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

Ἡ γραφὴ αὕτη προέρχεται ἐκ τοῦ ὅτι ἡ κατὰ διαφορὰν πρόοδος κατὰ τὸν ὁρισμόν της εἶναι σειρὰ συνεχῶν ἰσοδιαφορῶν (ὅρ. ἀριθμ. 206).

Ἡ πρόοδος ἐκφράζεται ἄλλως, οὕτως (θεωρουμένης τῆς πρώτης τῶν δύο προηγουμένων προόδων) 2 εἶναι πρὸς 5, ὡς 5 πρὸς 8, ὡς 8 πρὸς 11, ὡς 11 πρὸς 14.

Σ. Κ. Εὐκόλως βλέπομεν, ὅτι εἰς τὴν σειρὰν τῆς ἰσοδιαφορᾶς,

2 . 5 : 5 . 8 : 8 . 11 : 11 . 14 : 14 . 17 .
ἕκαστος ὅρος τῆς προτεθείσης προόδου εἶναι ἐν ταὐτῷ ἑπόμενος καὶ ἡγούμενος, ἐξαιρουμένου τοῦ πρώτου, ὅς τις εἶναι ἡγούμενος, καὶ τοῦ τελευταίου, ὅς τις εἶναι ἑπόμενος.

§. 242. Πρώτη Ἰδιότης. Ἐκτίμησις ἑνὸς ὅρου βαθμοῦ ὁποιουδήποτε διὰ μέσου τοῦ πρώτου ὅρου.

Προκύπτει ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς κατὰ διαφορὰν προόδου, ὅτι εἰς τὴν αὔξουσαν πρόοδον.

Ὁ δεύτερος ὅρος εἶναι ἴσος μὲ τὸν πρῶτον πλέον ὁ λόγος (ἢ σὺν τῷ λόγῳ).

Ὁ τρίτος εἶναι ἴσος μὲ τὸν δεύτερον πλέον ὁ λόγος, ἢ εἶναι ἴσος μὲ τὸν πρῶτον πλέον δὶς ὁ λόγος.

Ὁ τέταρτος εἶναι ἴσος μὲ τὸν τρίτον πλέον ὁ λόγος, ἢ μὲ τὸν πρῶτον πλέον τρὶς ὁ λόγος.

Ἐν γένει ὅρος τις ὁποιουδήποτε βαθμοῦ εἶναι ἴσος μὲ τὸν πρῶτον, πλέον τοσάκις ὁ λόγος, ὅσοι ὅροι εἶναι πρὸ ἐκείνου, τὸν ὁποῖον θεωροῦμεν.

Διὰ νὰ καταλάβωμεν καλὰ αὐτὴν τὴν ἰδιότητα, καὶ νὰ παραστήσωμεν αὐτὴν μὲ συντομωτέραν ἔκφρασιν, ἃς θεωρήσωμεν τὴν σειρὰν τῶν ἀριθμῶν

$\div$ α . β . γ . δ . ε . ζ . η . . . . . ι . κ . λ .
τοὺς ὁποίους ὑποθέτομεν, ὅτι σχηματίζουν αὔξουσαν

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΤΟΜΕΑΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ: ΓΡΗΓΟΡΙΟΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΠΕΤΣΙΟΣ
Ε.Υ.Δ της Κ.τ.Π ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

πρόοδον, καὶ ἂς σημειώσωμεν διὰ ρ τὸν τῆς προόδου λόγον.

Ἔχομεν προφανῶς κατὰ τὴν φύσιν τῆς προόδου,

$$\beta=\alpha+\rho$$
$$\gamma=\beta+\rho=\alpha+\rho+\rho=\alpha+2\rho.$$
$$\delta=\gamma+\rho=\alpha+2\rho+\rho=\alpha+3\rho.$$
$$\varepsilon=\delta+\rho=\alpha+3\rho+\rho=\alpha+4\rho.$$

Λοιπὸν, ἐὰν ν παριστάνῃ τὸν βαθμὸν ὅρου τινὸς λ, εἰς τὴν ὁποίαν περίστασιν ν — 1 ἐκφράζει τὸν τῶν προηγουμένων ὅρων ἀριθμὸν, ἔχομεν προφανῶς,

$$\lambda=\alpha+(\nu-1)\rho \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (1)$$

ἔκφρασιν, ἥτις εἰς τὴν συνήθη γλῶσσαν μεταφραζομένη ἐπανέρχεται εἰς τὴν ἀνωτέρω ἔκφρασιν.

Ἐὰν ἡ πρόοδος ἦτον φθίνουσα, ἠθέλαμεν ἔχει ἐξ ἐναντίας,

$$\beta=\alpha-\rho$$
$$\gamma=\beta-\rho=\alpha-\rho-\rho=\alpha-2\rho$$
$$\delta=\gamma-\rho=\alpha-2\rho-\rho=\alpha-3\rho$$
$$.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

καὶ ἑπομένως

$$\lambda=\alpha-(\nu-1)\rho \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (2).$$

Οἱ δύο τύποι (1) καὶ (2) συντείνουν εἰς τὸ νὰ προσδιορίσωμεν ὅρον τινὰ ὁποιονδήποτε τῆς σειρᾶς, χωρὶς νὰ ὑποχρεονώμεθα νὰ λογαριάζωμεν τοὺς προηγουμένους· ἐπειδὴ ἀρκεῖ νὰ γνωρίσωμεν τὸν πρῶτον ὅρον, τὸν λόγον καὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν ὅρων τῶν ἐμπεριλαμβανομένων μεταξὺ τοῦ πρώτου καὶ ἐκείνου, τὸν ὁποῖον θέλομεν νὰ σχηματίσωμεν.

Ἔστω π. χ. ἡ πρόοδος $\div$ 2 . 5 . 8 . 11 . . . . . τῆς ὁποίας ζητεῖται ὁ εἰκοστὸς ὅρος.

Ἔχομεν ἐδῶ $\alpha=2$, $\rho=3$ καὶ $\nu=20$. Λοιπὸν ὁ τύπος (1) γίνεται $\lambda=2+19\times3=59$.

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΕΡΕΥΝΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΖΑΝΝΙΝΑΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
Ε.Υ.Δ της Κ.τ.Π ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

Εὑρίσκομεν προσέτι διὰ τὸν $\overline{60}^{ον.}$ ὅρον,

$$\lambda = 2 + 59 \times 3 = 179.$$

Ἔστω ἀκόμη ἡ πρόοδος $\div$ 80 . 74 . 68 . 62 . . ., τῆς ὁποίας ζητεῖται ὁ $12^{ος.}$ ὅρος.

Ἔχομεν καὶ ἐδῶ $a = 80$, $\rho = 6$, $\nu = 12$. Λοιπὸν ὁ τύπος (2) δίδει $\lambda = 80 - 11 \times 6 = 14$.

§. 243. Συνέπεια τῆς προηγουμένης ἰδιότητος. Οἱ αὐτοὶ οὗτοι τύποι ὁδηγοῦν εἰς τὴν ἐπίλυσιν ἀξιολογωτάτου τινὸς ζητήματος, τοῦ ὁποίου σκοπὸς εἶναι τὸ νὰ ἐμβάλλωμεν μεταξὺ δύο δοθέντων ἀριθμῶν, τόσους Διαφορικοὺς, ἢ Ἀριθμητικῶς ἀναλόγους μέσους, ὅσους θέλομεν, τουτέστιν ἄλλους ἀριθμοὺς σχηματίζοντας μετὰ τῶν δύο δοθέντων πρόοδον κατὰ διαφοράν.

Πρόκειται λόγου χάριν νὰ ἐμβάλλωμεν μεταξὺ 3 καὶ 57, ὀκτὼ ἀριθμητικῶς ἀναλόγους μέσους, εἴτε διαφορικούς.

Ἐπειδὴ ἡ, τὴν ὁποίαν θέλομεν νὰ σχηματίσωμεν πρόοδος πρέπει, ἐμπεριλαμβανομένων τῶν δύο δοθέντων ἀριθμῶν, νὰ συνθέτεται ἀπὸ $8+2$ ἢ 10 ὅρους, ἕπεται (ἀριθ. 242) ὅτι ὁ τελευταῖος ὅρος 57 εἶναι ἴσος μὲ τὸν πρῶτον 3, πλέον 9 φοραῖς ὁ λόγος. Λοιπὸν ἐὰν ἀπὸ 57 ἀφαιρεθῇ 3, ἡ διαφορὰ 54 θέλει εἶναι ἴση μὲ 9 φοραῖς τὸν λόγον, καὶ ἑπομένως τὸ $\overline{9}^{ον.}$ τοῦ 54, ἢ 6 θέλ' εἶναι ἡ ἔκφρασις τοῦ λόγου τῆς προόδου.

Ἀφ' οὗ ἐγνωρίσαμεν τὸν λόγον, εὐκόλως ἐξάγομεν τὴν πρόοδον, οὖσαν

$$\div 3 . 9 . 15 . 21 . 27 . 33 . 39 . 45 . 51 . 57.$$

Ἔστωσαν ἐν γένει a καὶ λ οἱ δύο ἀριθμοὶ, μεταξὺ τῶν ὁποίων θέλομεν νὰ ἐμβάλωμεν ἀριθμόν τινὰ μ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΠΑΡΑΔΟΣΙΑΚΗΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΤΟΜΕΑΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ Θ. ΠΕΤΣΙΟΣ
Ε.Υ.Δ της Κ.τ.Π ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

ἀπὸ μέσους διαφορικούς. Ἐὰν σημειώσωμεν διὰ ν τὸν ὅλον ἀριθμὸν τῶν ὅρων, ἔχομεν $\nu=\mu+2$· ὅθεν $\nu-1=\mu+1$, καὶ οἱ δύο τύποι τοῦ ἀριθμοῦ 242 γίνονται

$$\lambda=\alpha+(\mu+1)\,\rho,\quad \lambda=\alpha-(\mu+1)\,\rho.$$

Ἀφαιροῦντες ἀπὸ τὰ δύο μέλη τὴν ποσότητα α, καὶ διαιροῦντες διὰ $\mu+1$, ἔχομεν $\rho=\frac{\lambda-\alpha}{\mu+1}$ ἢ $\rho=\frac{\alpha-\lambda}{\mu+1}$.

(διὰ τὴν τελευταίαν ἔπρεπε νὰ ἀφαιρέσωμεν λ ἀπὸ τὰ δύο μέλη, καὶ νὰ προσθέσωμεν $(\mu+1)\,\rho$, ἔπειτα νὰ διαιρέσωμεν διὰ $\mu+1$).

Ἐντεῦθεν βλέπομεν, ὅτι διὰ νὰ ἐμβάλλωμεν μεταξὺ δύο δοθέντων ἀριθμῶν τόσους διαφορικοὺς μέσους, ὅσους θέλομεν, πρέπει νὰ ἀφαιρῶμεν τὸν μικρότερον ἀριθμὸν ἀπὸ τὸν μεγαλήτερον, καὶ νὰ διαιρῶμεν τὴν διαφορὰν διὰ τοῦ ὁλικοῦ ἀριθμοῦ τῶν ὅρων, τοὺς ὁποίους ἐμβάλλομεν πλέον ἕνα.

Τὸ οὕτω λαμβανόμενον ἀποτέλεσμα ἐκφράζει τὸν λόγον τῆς προόδου, ἥτις ἠμπορεῖ προσέτι νὰ ἦναι αὔξουσα ἢ φθίνουσα.

Προκείσθω ὡς δεύτερον παράδειγμα νὰ ἐμβάλωμεν μεταξὺ 2 καὶ 29, 35 διαφορικοὺς μέσους.

Ἐδῶ ἔχομεν $\alpha=2$, $\lambda=29$, $\mu=35$. Λοιπὸν $\rho=\frac{29-2}{36}=\frac{3}{4}$· ἡ δὲ ζητουμένη πρόοδος εἶναι.

$$\div\, 2\,.\, 2\tfrac{3}{4}\,.\, 3\tfrac{1}{2}\,.\, 5\,.\, 5\tfrac{3}{4}\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\; 29.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΤΟΜΕΑΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΕΡΕΥΝΩΝ ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ ΕΠ. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ Θ. ΠΕΤΣΙΟΣ
Ε.Υ.Δ της Κ.τ.Π ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

Ὁ $\overline{20}^{ος}$ ὅρος ταύτης τῆς προόδου, ἢ ὁ $\overline{19}^{ος}$ διαφορικὸς μέσος ἔχει τιμὴν (ἀρ. 242), $\lambda = 2 + 19 \times \frac{3}{4} = 16\frac{1}{4}$.

Ὁ $\overline{37}^{ος}$ ἢ ὁ τελευταῖος ὅρος τῆς προόδου εἶναι $x = 2 + 36 \times \frac{3}{4} = 29$, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ἦναι.

§. 244. Παρατήρησις. Ἐὰν μεταξὺ ὅλων τῶν ὅρων μιᾶς προόδου κατὰ διαφορὰν, θεωρουμένων ἀνὰ δύο, ἐμβάλωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν διαφορικῶν μέσων, ὅλαι αἱ οὕτω σχηματιζόμεναι μερικαὶ πρόοδοι, ἀποτελοῦν μίαν μόνην καὶ τὴν αὐτὴν πρόοδον.

Τῷ ὄντι ἔστω ἡ πρόοδος $\div \alpha . \beta . \gamma . \delta . \varepsilon . \zeta \ldots$ καὶ ἔστω μ ὁ ἀριθμὸς τῶν μέσων, τοὺς ὁποίους θέλομεν νὰ ἐμβάλωμεν μεταξὺ α καὶ β, ἔπειτα μεταξὺ β καὶ γ, ἔπειτα γ καὶ δ . . . . ὁ λόγος κάθε μερικῆς προόδου θέλει εἶναι κατὰ τὰ εἰρημένα ἐκφρασμένος διὰ $\frac{\beta - \alpha}{\mu + 1}, \frac{\gamma - \beta}{\mu + 1}, \frac{\delta - \gamma}{\mu + 1} \ldots\ldots$ Ἐπειδὴ δὲ ὅλαι αὗται αἱ ποσότητες εἶναι ἴσαι· διότι α, β, γ . . . . ὄντων εἰς πρόοδον ἔχομεν . . . . $\beta - \alpha = \gamma - \beta = \delta - \gamma \ldots\ldots$ ὁ λόγος εἶναι ὁ αὐτὸς εἰς ὅλας ταύτας τὰς μερικὰς προόδους, καὶ ἐπειδὴ προσέτι ὁ τελευταῖος ὅρος τῆς πρώτης σχηματίζει τὸν πρῶτον ὅρον τῆς δευτέρας καὶ οὕτως ἐφεξῆς, συμπεραίνομεν, ὅτι ὅλαι αὗται αἱ μερικαὶ πρόοδοι συγκροτοῦν μονοειδῆ τινα πρόοδον.

Ἐφαρμογή. Προκείσθω νὰ ἐμβάλωμεν 10 διαφορικοὺς μέσους μεταξὺ ὅλων τῶν τῆς προόδου ὅρων

$$\div 1 . 3 . 5 . 7 . 9 . 11 \ldots\ldots$$

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΤΟΜΕΑΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ ΕΡΕΥΝΩΝ ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ Θ. ΠΕΤΣΙΟΣ
Ε.Υ.Δ της Κ.τ.Π ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

Ὁ λόγος εἶν' ἐδῶ $\frac{3-1}{11}$, $\frac{5-3}{11}$, $\frac{7-5}{11}$ ἢ $\frac{2}{11}$

Ἔχομεν λοιπόν

$\div 1 . 1\frac{2}{11} . 1\frac{4}{11} . 1\frac{6}{11} \ldots\ldots 2\frac{9}{11} . 3 . 3\frac{2}{11} . 3\frac{4}{11} \ldots\ldots$

$4\frac{9}{11} . 5 . 5\frac{2}{11}$ πρόοδον φανεράν.

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΕΡΕΥΝΩΝ ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΤΟΜΕΑΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ: ΕΠΙΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ Θ. ΠΕΤΣΙΟΣ

Θέλομεν μεταχειρισθῆ εὐθὺς αὐτὴν τὴν ἀξιολογωτάτην παρατήρησιν.

§. 245. Δευτέρα ἰδιότης. Εἰς ὅλην τὴν κατὰ διαφορὰν πρόοδον τὸ ἄθροισμα δύο ὁποιωνδήποτε ὅρων ληφθέντων εἰς ἴσην διάστασιν ἀπὸ τὰ δύο ἄκρα, τουτέστι τοῦ πρώτου καὶ τελευταίου, εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄκρων.

Οὕτως εἰς τὴν προόδον

$\div 1 . 4 . 7 . 10 . 13 . 16 . 19 . 22 . 25 . 28 . 31 . 34 . 37 .$

ἔχομεν $1+37=4+34=7+31=10+28 \ldots\ldots$

Διὰ νὰ δώσωμεν λόγον αὐτῆς τῆς προτάσεως μὲ γενικόν τινα τρόπον, ἂς χαλέσωμεν α καὶ λ τοὺς δύο ἄκρους ὅρους, χ τὸν ὅρον ὁ ὁποῖος κρατεῖ τὴν $\pi^{\text{την}}$ τάξιν, τουτέστι ὁ ὁποῖος ἔχει $\overline{\pi-1}^{\text{ους}}$ πρὸ αὐτοῦ καὶ 9 τὸν ὅρον, ὅς τις ἔχει $\overline{\pi-1}^{\text{ους}}$ μετ' αὐτόν.

Τούτου τεθέντος, ἔχομεν ἐξ ἀρχῆς, κατὰ τὸν τύπον τοῦ ἀριθμ. 242.

$$\chi=\alpha+(\pi-1)\rho.$$

Κατὰ τὸ παρὸν, ἐὰν θεωρήσωμεν μόνον τὸ μέρος τῆς προόδου, τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τοῦ ὅρου 9, καὶ τοῦ ὅρου λ, ὁ ὁλικὸς ἀριθμὸς τῶν ὅρων αὐτῆς τῆς μερικῆς προόδου εἶναι π, καὶ ἔχομεν ἀκόμη $\lambda=9+(\pi-1)\rho$.

Ε.Υ.Δ της Κ.τ.Π ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

Ὅθεν βλέπομεν, ὅτι λ ὑπερβαίνει 9 κατὰ τὴν αὐτὴν ποσότητα, κατὰ τὴν ὁποίαν χ ὑπερβαίνει α. Λοιπὸν οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ α, χ, 9, λ σχηματίζουν μεταξύ των ἰσοδιαφοράν. Εἰς ὅλην δὲ τὴν ἰσοδιαφορὰν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο μέσων εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄκρων (204).

Οὕτως ἔχομεν $\chi+9=\alpha+\lambda$· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Σ. Κ. Ὅταν ἡ πρόοδος συγκροτῆται ἀπὸ περιττὸν ἀριθμὸν ὅρων, ὁ ἐν τῷ μέσῳ σχηματίζει μὲ τοὺς δύο ἄκρους συνεχῆ ἰσοδιαφορὰν, καὶ ἐπομένως (ἀριθ. 206) εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν δύο ἄκρων.

Οὕτως εἰς τὴν εἰρημένην πρόοδον $\div$ 1 . 4 . 7 . . . . ἥτις περικλείει 13 ὅρους, ὁ 17^{ος}, ἢ 19 εἶναι ἴσος μὲ $\frac{1+37}{1}$, τὸ ὁποῖον εἶναι πρόδηλον.

§. 246. Συνέπεια. Ἡ ἰδιότης αὕτη μᾶς δίδει μέσον ἁπλούστατον τοῦ νὰ λαμβάνωμεν τὴν ἔκφρασιν τοῦ ἀθροίσματος ὅλων τῶν ὅρων προόδου τινὸς κατὰ διαφοράν.

Ἔστω τῷ ὄντι ἡ πρόοδος . . .

$\div$ α . β . γ . δ . . . . . . ι. κ. λ.

καὶ ἂς σημειώσωμεν διὰ σ τὸ ἄγνωστον ἄθροισμα ὅλων τῶν ὅρων της, ὄντος ν τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ὅρων· ἂς ἐννοήσωμεν δὲ γεγραμμένην τὴν αὐτὴν πρόοδον ὑφ᾽ ἑαυτὴν κατ᾽ ἀντίστροφον τάξιν· ὡς . . . . $\div$ λ. κ. ι. . . . . γ . β . α. Κατὰ

Ε.Υ.Δ της Κ.τ.Π
ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

πρῶτον βλέπομεν, ὅτι τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν δύο τούτων προόδων εἶναι ἴσον μὲ 28.

Ἀπὸ ἄλλο μέρος συγκρίνοντες ἀνὰ δύο τοὺς ἐμπεριλαμβανομένους ὅρους εἰς τὴν αὐτὴν κάθετον στήλην, ἔχομεν κατὰ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα $\alpha+\lambda=\beta+\kappa=\gamma+\iota \ldots$ Λοιπὸν 2σ εἶναι ἴσον μὲ τὸ μερικὸν ἄθροισμα $\alpha+\lambda$ τοσάκις λαμβανόμενον, ὅσοι ὅροι εἶναι εἰς τὴν πρώτην πρόοδον, καὶ ἐπομένως.

$$2\sigma=(\alpha+\lambda)\,\nu.$$

Ὅθεν διαιροῦντες διὰ 2 . . . . ἔχομεν·

$$\sigma=\frac{(\alpha+\lambda)\,\nu.}{2}$$

δηλαδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τῆς κατὰ διαφορὰν προόδου εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄκρων, πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ὅρων.

Ἐφαρμογαί. 1ον· Ζητεῖται τὸ ἄθροισμα τῶν 25 πρώτων ὅρων τῆς προόδου· $\div 2 . 7 . 12 . 17 \ldots$

Πρέπει πρῶτον νὰ ἀναζητήσωμεν τὴν ἔκφρασιν τοῦ 25ου· ὅρου· ἀλλ᾽ ὄντος ἐνταῦθα τοῦ λόγου 5, ἔχομεν (ἀριθμ. 242) $\lambda=2+24\times5=122$. Λοιπὸν

$$\sigma=\frac{(2+122)25}{2}=\frac{124\times25}{2}=1550.$$

2ον· Ζητεῖται τὸ ἄθροισμα τῶν 100 πρώτων ὅρων τῆς προόδου

$$\div 1 . 3 . 5 . 7 . 9 \ldots$$

Εὑρίσκομεν πρῶτον διὰ τὸν 100ον· ὅρον.

$$\lambda=1+99\times2=199\cdot$$

Λοιπὸν $\sigma=\dfrac{(1+199)100}{2}=10000\cdot$ ἢ τὸ τετράγωνον τοῦ 100.

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΕΡΕΥΝΩΝ ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΤΟΜΕΑΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ: ΕΠ. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ Θ. ΠΕΤΣΙΟΣ
Ε.Υ.Δ της Κ.τ.Π ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

Γενικῶς ὁ ν^{os}· ὅρος αὐτῆς τῆς προόδου ἐπειδὴ εἶναι

$$\lambda = 1 + (\nu - 1)2 = 2\nu - 1$$

εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων

$$\sigma = \frac{(1 + 2\nu - 1)\nu}{2} = \nu^2,$$ ἢ τὸ τετράγωνον τοῦ ν.

Οὕτως τὸ ἄθροισμα τῶν 15 πρώτων ὅρων εἶναι ἴσον 15×15 ἢ 125.

§. 247. Πρόοδος δὲ κατὰ πηλίκον ἢ γεωμετρικὴ ὀνομάζεται σειρὰ ὅρων, καθεὶς τῶν ὁποίων εἶναι ἴσος μὲ τὸν πρὸ ἑαυτοῦ πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ σταθερόν τινα ἀριθμὸν, ὁ ὁποῖος ἀκόμη λέγεται λόγος τῆς προόδου.

Ἡ πρόοδος λέγεται αὔξουσα ἢ φθίνουσα, καθ' ὅσον ὁ λόγος, ἢ ὁ σταθερὸς ἀριθμὸς, ὁ ὁποῖος ἐκφράζει τὴν σχέσιν ἑνὸς ὅρου μὲ τὸν πρὸ αὐτοῦ, εἶναι μεγαλήτερος ἢ μικρότερος τῆς μονάδος.

Ἡ κατὰ πηλίκον πρόοδος γράφεται τιθεμένων δύο στιγμῶν μεταξὺ τῶν διαφόρων ὅρων, καὶ ἐμπρόςτων τὸ σημεῖον $\div\!\!\div$, ἐπειδὴ κατὰ τὸν ὁρισμὸν δυνάμεθα νὰ θεωρῶμεν τοὺς ἀριθμοὺς, ὡς σχηματίζοντας σειρὰν συνεχῶν ἀναλογιῶν.

Π. χ. ἔστωσαν αἱ δύο σειραὶ τῶν ἀριθμῶν,

$$\div\!\!\div\ 2 : 6 : 18 : 54 : 162 : 486 : 1458.$$

$$\div\!\!\div\ 12 : 6 : 3 : \frac{3}{2} : \frac{3}{4} : \frac{3}{8} : \frac{3}{16}.$$

Εἰς τὴν πρώτην ἕκαστος ὅρος εἶναι ἴσος μὲ τὸν πρὸ αὐτοῦ πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ 3. Οὕτως λοιπὸν αὕτη εἶναι πρόοδος κατὰ πηλίκον, ἔχουσα λόγον 3.

Εἰς τὴν δευτέραν ἕκαστος ὅρος εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ πρὸ ἑαυτοῦ, ἢ εἶναι ἴσος μὲ τὸν πρὸ ἑαυτοῦ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΤΟΜΕΑΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΕΡΕΥΝΩΝ ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΕΠ. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ Θ. ΠΕΤΣΙΟΣ
Ε.Υ.Δ της Κ.Π. ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{1}{2}$. Λοιπὸν αὕτη εἶναι πρόοδος κατὰ πηλίκον, ἔχουσα λόγον $\frac{1}{2}$.

Ἐκφράζομεν προσέτι τὰς προόδους ταύτας, κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, ὡς καὶ τὰς κατὰ διαφορὰν προόδους, δηλαδὴ,

2 πρὸς 6, πρὸς 18, πρὸς 54, πρὸς 162 . . . . .

καὶ 12 πρὸς 6, πρὸς 3, πρὸς $\frac{3}{2}$, πρὸς $\frac{3}{4}$ . . . . .

Ἐὰν θεωρηθῶσιν ὡς συνεχεῖς σειραὶ, προκύπτει, ὅτι πᾶς ἕνας ὅρος τῆς προόδου εἶναι ἐν ταυτῷ ἑπόμενος καὶ ἡγούμενος, κατ' ἐξαίρεσιν τοῦ πρώτου, ὅς τις εἶναι ἡγούμενος, καὶ τοῦ τελευταίου, ὅς τις εἶναι ἑπόμενος.

Αἱ κατὰ πηλίκον πρόοδοι ἔχουν ἰδιότητας ἀναλόγους μὲ τὰς προόδους κατὰ διαφοράν.

§. 248. Πρώτη ἰδιότης. Ἐκτίμησις ὅρου τινὸς τάξεως ὁποιασδήποτε εἴς τινα κατὰ πηλίκον Πρόοδον.

Ἔστω ἡ πρόοδος κατὰ πηλίκον γενικὴ,

$$\div\!\!\div\ \alpha : \beta : \gamma : \delta : \varepsilon : \zeta : \eta : \vartheta : \ldots .$$

καὶ σημειωθήτω διὰ $\varkappa$ ὁ λόγος, ὅς τις ἠμπορεῖ προσέτι νὰ ἦναι $>$ ἢ <1, θέλομεν ἔχει προφανῶς τὰς ἀκολούθους ἰσότητας·

$$\beta = \alpha\varkappa$$
$$\gamma = \beta\varkappa = \alpha\varkappa \times \varkappa = \alpha\varkappa^2$$
$$\delta = \gamma\varkappa = \alpha\varkappa^2 \times \varkappa = \alpha\varkappa^3$$
$$\varepsilon = \delta\varkappa = \alpha\varkappa^3 \times \varkappa = \alpha\varkappa^4$$

— — — — —

— — — — —

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΤΟΜΕΑΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΕΡΕΥΝΩΝ ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ ΕΠ. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ Θ. ΠΕΤΣΙΟΣ

Ε.Υ.Δ της Κ.τ.Π ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

Ὅθεν βλέπομεν, ὅτι ἐν γένει ὅρος τις ὁποιουδήποτε βαθμοῦ εἶναι ἴσος μὲ τὸν πρῶτον ὅρον πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ μίαν δύναμιν τοῦ λόγου, ἔχουσαν βαθμὸν δεικνυόμενον διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ὅρων, οἱ ὁποῖοι προηγοῦνται ἐκείνου, τὸν ὁποῖον θεωροῦμεν.

Οὕτω σημειοῦντες διὰ ν τὸν ἀριθμὸν τῶν περιεχομένων ὅρων, μεταξὺ τοῦ πρώτου καὶ τοῦ ὅρου λ, λαμβάνομεν τὸν τύπον,

$$\lambda = \alpha \times \varkappa^{\nu-1}.$$

δι' οὗ εὐκόλως εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν ἑνὸς ὅρου χωρὶς νὰ σχηματίζωμεν τοὺς προηγουμένους.

Ἐφαρμογαί. $\overline{1}^{\eta}$ Ζητεῖται ἡ τιμὴ τοῦ $\overline{12}^{ου}$ ὅρου τῆς προόδου $\div\!\!\div 2 : 6 : 18 : \ldots\ldots$ Ὁ τύπος γίνεται $\lambda = 2 \times \overline{3}^{11}$.

Κατὰ πρῶτον ἡ 4^{η} δύναμις τοῦ 3 εἶναι $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$. Πολλαπλασιάζοντες 81 ἐπὶ 81 λαμβάνομεν 6561 ποσότητα, ἥτις εἶναι ἡ 8^{η} δύναμις. Πολλαπλασιάζοντες δὲ 6561 ἐπὶ 27 ἢ ἐπὶ τὴν $3^{\eta\nu}$ δύναμιν τοῦ 3, εὑρίσκομεν 177147 ποσότητα, ἥτις εἶναι ἡ 11^{η} δύναμις.

Λοιπὸν τέλος πάντων $\lambda = 2 \times 177147 = 354294$.

$\overline{2}^{\alpha}$ Ζητεῖται ὁ $10^{ος}$ ὅρος τῆς προόδου,

$$\div\!\!\div 12 : 6 : 3 : \frac{3}{2} : \ldots\ldots$$

Ἐνταῦθα εὑρίσκομεν. $\lambda = 12 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{9}$.

Ἀλλ' ὁ κύβος τοῦ 2 εἶναι 8, ὁ δὲ κύβος τοῦ 8, ὅς τις εἶναι φανερὰ ἡ 9^{η} δύναμις τοῦ 2, εἶναι ἴσος μὲ 512· λοιπὸν $\lambda = 12 \times \frac{1}{512} = \frac{3}{128}$.

Σ. Κ. Ἐὰν ἡ τάξις τοῦ ὅρου ἦτον ὀλίγον τι μακράν, ὁ ὑπολογισμὸς ἤθελε γένη μὲ πολὺν κόπον

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ: ΕΠ. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΠΕΤΣΙΟΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΤΟΜΕΑΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΕΡΕΥΝΩΝ ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ
Ε.Υ.Δ. ΕΠ. ΚΠ ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

ἀλλ' ἠθέλαμεν φθάσει ἐπίσης εἰς τὴν ἔκφρασιν τούτου τοῦ ὅρου διὰ διαδοχικῶν πολλαπλασιασμῶν. Πάντοτε δὲ ἠμποροῦμεν νὰ κρίνωμεν ἀπὸ τὸ πρῶτον παράδειγμα, πόσον ταχέως αἱ δυνάμεις ἑνὸς ἀριθμοῦ αὐξάνουν τιμὴν, ὅταν ὁ βαθμὸς τῆς δυνάμεως ἦναι ὀλίγον τι μεγάλος· ἐπειδὴ εἰς τὴν πρόοδον $\div 2 : 6 : 18 : \ldots$ λαμβάνομεν τὴν τιμὴν μόνον τοῦ ὅρου τοῦ $12^{ου}$. 354294.

§. 249. Συνέπεια τῆς προηγουμένης ἰδιότητος. Νὰ ἐμβάλωμεν μεταξὺ δύο δοθέντων ἀριθμῶν α καὶ λ ἀριθμὸν τινὰ μ μέσων ἀναλογικῶν, δηλαδὴ ἀριθμῶν σχηματιζόντων μὲ τοὺς δύο πρώτους πρόοδον κατὰ πηλίκον.

Ἐπίλυσις. Εἶναι φανερὸν, ὅτι διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὴν πρόοδον, ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν τὸν λόγον.

Ἀλλ' ἐκ τοῦ τύπου $\lambda = \alpha \varkappa^{\nu-1}$. ἐξάγομεν, διαιροῦντες τοὺς δύο ἀριθμοὺς διὰ α,

$$\frac{\lambda}{\alpha} = \varkappa^{\nu-1}, \text{ ὅθεν } \sqrt[\nu-1]{\frac{\lambda}{\alpha}}$$

Καὶ ἐπειδὴ ν ἐκφράζει τὸν ὅλον ἀριθμὸν τῶν ὅρων, ἔχομεν ἀναγκαίως $\nu = \mu + 2$, καὶ ἐπομένως $\nu - 1 = \mu + 1$. Λοιπὸν τέλος πάντων . . . .

$$\delta = \sqrt[\mu+1]{\frac{\lambda}{\alpha}}.$$

Ὅθεν βλέπομεν, ὅτι διὰ νὰ λάβωμεν τὸν λόγον, πρέπει κατὰ πρῶτον νὰ διαιρέσωμεν τὸν δεύτερον δοθέντα ἀριθμὸν διὰ τοῦ πρώτου, ἔπειτα νὰ ἐξάξωμεν ἀπὸ τὸ πηλίκον ῥίζαν βαθμοῦ δεικνυομένου ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἐμβαλλομένων ὅρων πλέον ἕνα.

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ... ΤΟΜΕΑΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ... ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ... ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ Θ. ΠΕΤΣΙΟΣ
Ε.Υ.Δ της Κ.τ.Π
ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

Γνωρίζοντες δὲ τὸν τῆς προόδου λόγον, εὐκόλως λαμβάνομεν τοὺς διαφόρους ὅρους· ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν διαδοχικῶς τὸν πρῶτον ὅρον α ἐπὶ τὴν $1^{\eta\nu}$, $2^{\eta\nu}$, $3^{\eta\nu}$, ... δύναμιν τοῦ x ἢ τοῦ $\sqrt[\mu+1]{\frac{\lambda}{\alpha}}$ . . . . .

Οὕτω π. χ. ὁ $4^{\text{ος}}$ ἀναλογικὸς μέσος, ὅς τις εἶναι ὁ $5^{\text{ος}}$ τῆς προόδου ἤθελεν ἔχει τιμὴν,

$$\alpha\times\left(\sqrt[\mu+1]{\frac{\lambda}{\alpha}}\right)^4, \text{ καὶ οὕτως ἐφεξῆς.}$$

Σ. χ. δὲν γνωρίζομεν ἀκόμη κάμμίαν μέθοδον τοῦ νὰ ἐξάγωμεν ῥίζαν βαθμοῦ ἀνωτέρου τοῦ $3^{\text{ου}}$. Ἀλλ᾽ ὁ ἀρχικὸς σκοπός μας εἶναι νὰ δώσωμεν εἰς τὰς προόδους κατὰ πηλίκον, τύπους ἀναλόγους μὲ τοὺς δοθέντας· εἰς τὰς προόδους κατὰ διαφοράν. Πλὴν θέλομεν δώσει εὐθὺς ὁρμοδιώτατόν τι μέσον νὰ ἐκτελῶμεν τὰς ἐργασίας ταύτας.

§. 250. Δεικνύεται, ὡς καὶ διὰ τὰς προόδους κατὰ διαφορὰν, ὅτι ἐὰν μεταξὺ ὅλων τῶν ὅρων τῆς προόδου κατὰ πηλίκον, θεωρουμένων ἀνὰ δύο, ἐμβάλωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τῶν ἀναλογικῶν μέσων, αἱ οὕτω σχηματιζόμεναι μερικαὶ πρόοδοι συγκροτοῦν μονοειδῆ τινα πρόοδον.

Ἔστω $\div\!\div$ α : β : γ : δ : . . . . . ἡ προτεθεῖσα πρόοδος.

Ὁ λόγος διὰ τὴν πρώτην μερικὴν πρόοδον ἤθελεν εἶναι $\sqrt[\mu+1]{\frac{\beta}{\alpha}}$, διὰ τὴν δευτέραν $\sqrt[\mu+1]{\frac{\gamma}{\beta}}$ . .

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΕΡΕΥΝΑΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΤΟΜΕΑΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ: ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ Θ. ΠΕΤΣΙΟΣ
Ε.Υ.Δ της Κ.τ.Π ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

Ἀλλ' ἔχομεν, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, $\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\gamma}{\beta}=\frac{\delta}{\gamma}$ . . .

Λοιπὸν οἱ ἀριθμοὶ $\sqrt[\mu+1]{\frac{\beta}{\alpha}}, \sqrt[\mu+1]{\frac{\gamma}{\beta}}$ . . . . εἶναι ἴσοι· κ. τ. λ.

§. 251. Δευτέρα ἰδιότης. Εἰς πᾶσαν κατὰ πηλίκον πρόοδον τὸ γινόμενον δύο τινῶν ὅρων εἰς ἴσην διάστασιν ἀπὸ τὰ δύο ἄκρα εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων.

Ἔστωσαν τῷ ὄντι χ καὶ ψ δύο ὅροι, τῶν ὁποίων ὁ μὲν ἔχει $\pi-1$ ὅρους πρὸ ἑαυτοῦ, καὶ ὁ ἄλλος $\pi-1$ μεθ' ἑαυτόν.

Ὁ ὅρος χ εἶναι ἴσος μὲ τὸν πρῶτον α πολλαπλασιαζόμενον μὲ $\varkappa^{\pi-1}$, καὶ ἔχομεν $\chi=\alpha\times\varkappa^{\pi-1}$.

Ὁ τελευταῖος ὅρος λ εἶναι ἴσος μὲ τὸν ὅρον χ πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ $\varkappa^{\pi-1}$, καὶ ἔχομεν $\lambda=\psi\times\varkappa^{\pi-1}$. Ὅθεν δῆλον, ὅτι οἱ ὅροι α, χ, ψ καὶ λ σχηματίζουν τὴν ἀναλογίαν $\alpha:\chi::\psi:\lambda$. Λοιπὸν (ἀριθμ. 208) $\chi\times\psi=\alpha\times\lambda$· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

§. 252. Ἂς σημειώσωμεν τέλος πάντων μὲ π τὸ γινόμενον ὅλων τῶν ὅρων τῆς προόδου,

$$\div\!\div\ \alpha:\beta:\gamma:\delta: \ldots\ldots \iota:\varkappa:\lambda.$$

Πολλαπλασιαζομένων μεταξύ των, ὥστε νὰ ἔχωμεν

$\pi=\alpha\beta\gamma\delta \ldots\ldots \iota\varkappa\lambda$

$\pi=\lambda\varkappa\iota \ldots\ldots \gamma\beta\alpha$

$\pi^2=\alpha\beta\gamma\delta \ldots\ldots \iota\varkappa\lambda\times\lambda\varkappa\iota \ldots\ \times\gamma\beta\alpha.$

ἢ ἀκόμη, ἀντιστρεφομένης τῆς τάξεως τῶν παραγόντων,

$$\pi^2=\alpha\lambda\times\beta\varkappa\times\gamma\iota\times\ldots\iota\gamma\times\varkappa\beta\times\lambda\alpha.$$

Ἀλλ' εἴδομεν, ὅτι $\alpha\lambda=\beta\varkappa=\gamma\iota$ . . ., καὶ ὁ ἀριθ-

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΣΧΟΛΗ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ: ΕΠΙΚ. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ Θ. ΠΕΤΣΙΟΣ
Ε.Υ. Δ. Κ.τ.Π ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

μὸς τῶν γινομένων εἶναι ἴσος μὲ ν ἀριθμὸν τῶν ὅρων τῆς προτεθείσης προόδου.

Οὕτω $\pi^2 = (\alpha\lambda)^\nu$.

Καὶ ἑπομένως $\pi = \sqrt[2]{(\alpha\lambda)^\nu}$.

Ἐκ τοῦ ὁποίου δείχνεται, ὅτι τὸ γινόμενον ὅλων τῶν ὅρων τῆς κατὰ πηλίκον προόδου εἶναι ἴσον μὲ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τῆς ν δυνάμεως τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄκρων.

Ὁ τύπος οὗτος ἀνταποκρίνεται πρὸς ἐκεῖνον, ὅς τις δίδει τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τῆς κατὰ διαφορὰν προόδου, δηλαδὴ $\sigma = \frac{(\alpha+\lambda)\nu}{2}$.

Ἐδῶ δὲν θέλομεν ἐκθέσει ὁλότελα τὸν τρόπον τοῦ νὰ λαμβάνωμεν τὴν ἔκφρασιν τοῦ ἀθροίσματος τῶν ὅρων προόδου τινὸς κατὰ πηλίκον· ἐπειδὴ εἶναι δι' ὅλου ἀνωφελὲς εἰς τὸν ὁποῖον ἐπροβάλαμεν σκοπὸν, καὶ ὁ ὁποῖος προσέτι ὑποθέτει γνώσεις τινὰς Ἀλγεβραϊκὰς, περὶ τῶν ὁποίων τίποτ' ἀκόμη δὲν ὡμιλήσαμεν.

§. 253. *Ἀνταπόκρισις μεταξὺ εἰς τὰς ἰδιότητας τῶν δύο εἰδῶν τῶν προόδων.*

Ἄς πλησιάσωμεν τώρα τὰ ληφθέντα ἐκ τῆς μιᾶς καὶ τῆς ἄλλης ἐξαγόμενα.

Πρόοδ. κατὰ διαφ.	Πρόοδ. κατὰ πηλ.
$\lambda = \alpha + (\nu - 1)\rho$ (ἀρ. 242)	$\lambda = \alpha \times \kappa^{\nu-1}$ (ἀρ. 248)
$\rho = \frac{\lambda - \alpha}{\mu + 1}$ . . . (ἀρ. 243)	$\kappa = \sqrt[\mu+1]{\frac{\lambda}{\alpha}}$ (ἀρ. 249)
$\sigma = \frac{(\alpha+\lambda)\nu}{2}$ . . (ἀρ. 246)	$\pi = \sqrt[2]{(\alpha\lambda)^\nu}$ (ἀρ. 252)

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΕΡΕΥΝΑΣ ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΤΟΜΕΑΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ ΕΠ. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΘΕΡΕΤΖΗΣ
Ε.Υ.Δ της Κ.τ.Π ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

Οἱ τύποι οὗτοι μᾶς δείχνουν, ὅτι αἱ ἐργασίαι, αἱ ὁποῖαι ἐκτελοῦνται ἐπὶ τῶν στοιχείων τῆς κατὰ πηλίκον προόδου, ἀνταποκρίνονται εἰς τὰς βαθμοῦ μικροτέρου ἐργασίας, αἱ ὁποῖαι ἐκτελοῦνται ἐπὶ τῶν ἀναλόγων στοιχείων τῆς κατὰ διαφορὰν προόδου.

Οὕτως ὁ πολλαπλασιασμὸς ἀνταποκρίνεται εἰς πρόσθεσιν· ἡ διαίρεσις εἰς ἀφαίρεσιν.

Ὁ σχηματισμὸς τῶν δυνάμεων εἰς ἁπλοῦν πολλαπλασιασμόν· ἡ ἐξαγωγὴ τῶν ῥίζῶν, εἰς διαίρεσιν.

Ἐκ τούτων τῶν θεωριῶν ἀναμφιβόλως ὁδηγούμενος ὁ ἔνδοξος τῶν Λογαρίθμων ἐφευρετὴς ἐσύντεμε τοὺς ἀριθμητικοὺς ὑπολογισμούς, ἀρχόμενος ἀπὸ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, κάμνων νὰ ἐξαρτῶνται αἱ ἐπὶ τῶν ὅρων τῆς κατὰ πηλίκον προόδου ἐκτελούμεναι ἐργασίαι, ἀπὸ ἐργασίας ἐπὶ τῶν ὅρων τῆς κατὰ διαφορὰν προόδου ἐκτελουμένας. Ἀλλ' ἐπειδὴ εἰς στοιχειῶδες σύγγραμμα εἶναι ἀδύνατον νὰ περιγράφωμεν λεπτομερῶς τὴν ἀξιόλογον ταύτην ἀνακάλυψιν, θέλομεν γνωστοποιήσει μόνον τὰ ουσιωδέστερα ἐξαγόμενα.

§. $\overline{\beta}^{ον.}$ Περὶ τῶν Λογαρίθμων.

§. 254. Ἄς θεωρήσωμεν μίαν τινὰ πρόοδον κατὰ πηλίκον ἔχουσαν πάντοτε τὸν πρῶτον ὅρων ἴσον μὲ 1, καὶ μίαν τινὰ πρόοδον κατὰ διαφορὰν ἔχουσαν τὸν πρῶτον ὅρον ἴσον μὲ 0.

Παραδείγματος χάριν,

∺ 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 :
÷ 0 : 3 : 6 : 9 : 12 : 15 : 18 . 21

∺ 256 : 512 : 1024 : 2048 : 4096 : 8192 .
. 24 . 27 . 30 . 33 . 36 . 39 .

: 4096 : 8192 : 16384 : 32768 . . . . . (A).
. 36 . 39 . 42 . 45 . . . . . (B).

Ε.Υ.Δ. της Κ.Β.Π. ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006