τῶν 100$^{γρ.}$ τὸν μῆνα, ἕπεται, ὅτι $\frac{3}{4}\times 18$ ἢ 13,50 ἐκφράζει τὸν τόκον διὰ τοὺς 18 μῆνας.

Λοιπὸν διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὸν τόκον τῶν 3859,25, ἀρκεῖ νὰ συστήσωμεν τὴν ἀναλογίαν 100 : 13,50 : ; 3859,25 : X.

$$\text{Ὅθεν } X = \frac{3859{,}25 \times 13{,}50}{100} = 520{,}99875, \text{ ἢ}$$

521$^{γρ.}$

Προσθέτοντες τοῦτον τὸν τόκον εἰς τὰς 3859,25, λαμβάνομεν 4380,25 διὰ τὸ ὅλον τοῦ γραμματίου.

Ἡ βεβαίωσις ταύτης τῆς ἐργασίας ἐκτελεῖται κατὰ τὴν ὑφαίρεσιν ἐσωτερικῶς. Συσταίνομεν δὲ τὴν ἀναλογίαν.

113150 : 100 : : 4380,25 : X.

Καὶ ὁ τέταρτος ὅρος ταύτης τῆς ἀναλογίας ἐκφράζων τὴν παροῦσαν τιμὴν τοῦ γραμματίου τῶν 4380$^{γρ.}$, 25$^{έκ.}$ εἶναι ἴσος μὲ 3859$^{γρ.}$, 25$^{έκ.}$

Θέλομεν θέσει εἰς τὸ τέλος τοῦ ὀγδόου κεφαλαίου τὰς συνθέτους μεθόδους τοῦ τόκου καὶ τῆς ὑφαιρέσεως.

Περὶ τῆς μεθόδου τῆς ἑταιρείας.

§. 232. Αὕτη ἡ νέα μέθοδος ἔχει σκοπὸν νὰ μερίσῃ εἰς πολλοὺς συντρόφους μιᾶς πραγματείας τὸ κέρδος ἢ τὸν χαμὸν, τὸ ὁποῖον πορίζεται ἀπὸ τὴν ἑταιρείαν των.

Ἐν γένει ἐσυμφώνησαν μεταξύ των οἱ ἔμποροι, καὶ τοῦτο εἶναι εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν σύμφωνον μὲ τὸν ὀρθὸν λόγον καὶ μὲ τὴν δικαιοσύνην, νὰ ἦναι τὸ μέρος ἑκάστου ἀνάλογον μὲ τὴν καταβολήν του, ὅταν οἱ χρόνοι ἦναι ἴσοι, ἢ μὲ τὸ γινόμενον τῆς καταβολῆς ἐπὶ τὸν χρόνον, καθ' ὃν μένει εἰς τὸ ἐμπόριον, ὅταν οἱ χρόνοι ἦναι ἄνισοι.

Τὸ ζήτημα θεωρούμενον γενικώτερον εἶναι, ὁ μερισμὸς δοθέντος τινὸς ἀριθμοῦ, (ὅς τις εἶναι ἢ κέρδος ἢ χαμὸς) εἰς μέρη κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογα μὲ ἄλλους δεδομένους ἀριθμούς. Ἔστω λοιπὸν Α ὁ μεριστέος ἀριθμὸς, μ, ν, π, κ . . . . οἱ ἀριθμοὶ ἀναλόγως τῶν ὁποίων τὸ Α πρέπει νὰ μερισθῇ, καὶ χ, χ', χ'', χ''' . . . . τὰ διάφορα μέρη.

Ἔχομεν ἐξαιτίας τῆς ἐκφράσεως τὴν σειρὰν τῶν ἴσων λόγων,

$$\mu:\chi::\nu:\chi'::\pi:\chi''::\kappa:\chi''' \ldots,$$

ὅθεν κάμνοντες (ἀρ. 214) τὸ ἄθροισμα τῶν ἡγουμένων, καὶ τὸ τῶν ἑπομένων, συνάγομεν,

$$\mu+\nu+\pi+\kappa+\ldots:\chi+\chi'+\chi''+\chi'''+\ldots::\mu:\chi$$

ἢ, ἐπειδὴ $\chi+\chi'+\chi''+\chi'''+\ldots$ ἢ τὸ ἄθροισμα τῶν μερῶν εἶναι ἴσον μὲ Α, διὰ τοῦτο

$$\begin{aligned}\mu+\nu+\pi+\kappa+\ldots\ldots:A &::\mu:\chi\\ &::\nu:\chi'\\ &::\pi:\chi''\\ &::\kappa:\chi'''.\end{aligned}$$

Τοῦτο μᾶς φανερόνει, ὅτι διὰ νὰ προσδιορίσωμεν ἕκαστον τῶν μερῶν, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν μεριστέον ἀριθμὸν Α ἀμοιβαίως ἐπὶ ἕκαστον τῶν ἀριθμῶν μ, ν, π, κ . . . . καὶ νὰ διαιρέσωμεν τὸ γινόμενον τοῦ ἀθροίσματος μ+ν+π+κ . . . τούτων τῶν ἰδίων ἀριθμῶν.

Ἂς κάμωμεν μερικὰς ἐφαρμογάς.

§. 233. Πρῶτον παράδειγμα. Τρεῖς ἄνθρωποι ἡνώθησαν εἰς ἐμπορικὴν τινὰ ὑπόθεσιν. Ὁ μὲν πρῶτος κατέβαλε 15000φρ., ὁ δεύτερος 22540φρ., καὶ ὁ τρίτος 25600. Ὕστερον ἀπὸ ἕνα χρόνον ἐκέρδησαν 12000γρ. Ζητεῖται πόσον ἀνήκει εἰς ἕκαστον τῶν συντρόφων;

Ἀνάλυσις. Ἕπεται ἐκ τῶν προηγουμένων παρατηρήσεων (καὶ τὸ ὁποῖον εἶναι ἀφ' ἑαυτοῦ φανερὸν), ὅτι ἡ ὁλικὴ καταβολὴ, ἢ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν καταβολῶν, εἶναι εἰς τὸ ὁλικὸν κέρδος, ὡς πᾶσα μία καταβολὴ εἶναι εἰς τὸ ἀνταποκρινόμενον κέρδος εἰς αὐτήν.

Λοιπὸν κάθε μερικὸν κέρδος εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ὅλου κέρδους καὶ τῆς μερικῆς καταβολῆς, ἀφ' οὗ διαιρεθῇ διὰ τῆς ὁλικῆς καταβολῆς.

Τούτου τεθέντος, κάμνοντες κατὰ πρῶτον τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν τεθέντων, συνάγομεν τὸ ἄθροισμα 63140γρ.

Οὕτω συνάγομεν διαδοχικῶς διὰ τὰς ἐκφράσεις τῶν τριῶν κερδῶν.

$$\overline{1}^{ov.}\ \text{κέρδος}\cdot\ x=\frac{12000\times15000}{63140}=1850{,}81.$$

$$\overline{2}^{ov.}\qquad x'=\frac{12000\times22540}{63140}=4283{,}81.$$

$$\overline{3}^{ov.}\qquad x''=\frac{12000\times25600}{63140}=\frac{4856.38}{12000{,}00}$$

Αὐτὴν τὴν πρᾶξιν βεβαιόνομεν προσέτι κάμνοντες τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν κερδῶν, καὶ ἐὰν ἡ πρᾶξις ἦναι ἀκριβὴς, τὸ ἄθροισμα πρέπει νὰ ἦναι ἴσον μὲ τὸ ὅλον κέρδος 12000γρ.

Δεύτερον παράδειγμα. Εἷς ἄρχισε μίαν ἐπιχείρησιν μὲ ἄθροισμάτι ἀπὸ 25000γρ. Ἔπειτα ἀπὸ 5 μῆνας θέλων νὰ ἐκτείνῃ τὴν ἐπιχείρησίν του ἔλαβεν ἕνα σύντροφον, ὅστις ἔθεσε 40000. Ἔπειτα ἀπὸ 6 μῆνας ἔλαβεν ἕνα δεύτερον, ὅστις τοῦ ἐδάνεισεν ἄλλο ἄθροισμα 6000γρ. Ἔπειτα ἀπὸ 2 χρόνους ἐκέρδησεν 80000γρ.. Περιπλέον ἐσυμφωνήθη νὰ λάβῃ ἐκεῖνος, ὅς τις ἐδιεύθυνε τὰς ὑποθέσεις τοῦ ἐμπορίου, 5 τὰ 100 ἀπὸ τὸ ὅλον κέρδος, ἐκτὸς τοῦ μέρους, τὸ ὁποῖον του ἀνήκει ἀναλόγως μὲ τὴν ποσότητα, τὴν ὁποίαν κατέβαλε. Ζητεῖται τὸ μέρος ἑκάστου τῶν τριῶν συντρόφων.

Ἀνάλυσις. Ἐπειδὴ ὁ πρῶτος πρέπει διὰ πληρωμὴν τοῦ ἔργου του νὰ λάβῃ πρῶτον 5 τὰ $\frac{0}{0}$ ἀπὸ τὸ ὅλον κέρδος, διὰ τοῦτο θέλει πάρει τὰ $\frac{5}{100}$ ἢ $\frac{1}{20}$ ἀπὸ τὰς 80000γρ., τουτέστι 4000.

Λοιπὸν μένουσι 76000γρ. νὰ μερισθῶσιν εἰς τοὺς τρεῖς συντρόφους ἀναλόγως μὲ τὴν καταβολήνταν, ἢ καλήτερα μὲ τὰ γινόμενα τῶν καταβολάντων ἐπὶ τοὺς χρόνους, εἰς τοὺς ὁποίους ἐτέθησαν εἰς τὴν ἐπιχείρησιν, ἐπειδὴ οἱ χρόνοι εἶναι διαφορετικοί.

Τῷ ὄντι. 1ον. Τὰ 25000γρ. τοῦ πρώτου, μὲ τὸ νὰ ἐτέθησαν διὰ 24 μῆνας, ἄγονται εἰς 2500×24 ἢ 600000γρ., ὡς νὰ ἤθελαν βαλθῇ 1 μόνον μῆνα.

2ον. Τὰ 40000γρ. τοῦ πρώτου συντρόφου, τὰ ὁποῖα ἐστάθησαν 24 — 5 μῆνας ἢ 19μην. εἰς τὴν ἑταιρείαν, διὰ τοῦτο γίνονται 40000γρ.×19 ἢ 760000γρ. ὡς νὰ ἐτέθησαν διὰ 1 μῆνα.

3ον. Καὶ τέλος πάντων τὰ 60000γρ. τοῦ δευτέρου συντρόφου του, θεμένα εἰς τὴν ἑταιρείαν 24 — 5 — 6 ἢ 13μην. ἰσοδυναμοῦν μὲ 60000×13 ἢ 780000, ὡς νὰ ἐτέθησαν διὰ 1 μόνον μῆνα.

Λοιπὸν τὸ ζήτημα τρέπεται εἰς τὸ νὰ διαιρέσωμεν 76000γρ. ἀναλόγως μὲ τοὺς τρεῖς ἀριθμοὺς 600000, 760000 καὶ 780000, ἤ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ αὐτό, ἀναλόγως μὲ τοὺς τρεῖς ἀριθμοὺς 60. 76 καὶ 78. Τούτου τεθέντος, εὑρίσκομεν κατὰ πρῶτον τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν τελευταίων ἀριθμῶν, 214. Οὕτως θέλομεν λάβει διαδοχικῶς τὰ τρία μέρη.

$\overline{1}^{\text{ον.}}$ μέρος . . . $\dfrac{76000\times60}{124}=21308{,}41$

ἢ προσθέτοντες τὰ $4000^{\text{γρ.}}$, τὰ ὁποῖα ἀνήκουν εἰς αὐτόν, ὡς βραβεῖον τῆς δουλεύσεώς του, συνάγομεν 25308,41

$\overline{2}^{\text{ον.}}$ . . $\dfrac{76000\times76}{214}=\dfrac{5776000}{214}=26990{,}65$

$\overline{3}^{\text{ον.}}$ . . $\dfrac{76000\times78}{214}=\dfrac{5928000}{214}=27700{,}94$

βεβαιότης . . $80000^{\text{γρ.}},00$.

§. 234. Ἡ μέθοδος τῆς ἑταιρείας εἶναι μία τῶν συνηθεστέρων ἐργασιῶν εἰς τοὺς πεπολιτευμένους ἀνθρώπους.

Αἱ συνεισφοραὶ, τὰς ὁποίας οἱ ὑπήκοοί ἑνὸς βασιλείου πληρόνουσιν εἰς τὴν κυβέρνησιν, λαμβάνονται διὰ τῶν ἀληθινῶν κανόνων τῆς ἑταιρείας.

Καλεῖται συνεισφορὰ, ἡ ποσότης, τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ πληρόνῃ ἕκαστος σχετικῶς μὲ τὸ εἰσόδημα, τὸ ὁποῖον νομίζουν, ὅτι ἔχει. Τοῦτο εἶναι ἀληθινὴ ζημία δι' αὐτὸν, ἀλλὰ ζημία, εἰς τὴν ὁποίαν αὐτοθελήτως ὑποτάττεται, διὰ νὰ βοηθήσῃ τὴν κυβέρνησιν εἰς τὰ πράγματάτης, καὶ εἰς τὰς δυνάμεις της, διὰ τὴν ὠφέλειαν καὶ εὐτυχίαν ὅλων.

Τὸ περὶ τῶν συνεισφορῶν ἀριθμοῦ τινὸς ἀνθρώπων ἑνὸς βασιλείου, τῆς Γαλλίας φερ' εἰπεῖν, ζήτημα, ἐκ πρώτης ὄψεως φαίνεται πολὺ περιπεπλεγμένον·

ἀλλ' ἀπὸ τὰς ἀκολούθους παρατηρήσεις καταλαμβάνομεν πόσον ἡ λύσις εἶναι ἁπλουστάτη.

Ἂς ὑποθέσωμεν πρὸς ἀκριβῆ τούτου κατάληψιν, ὅτι ὁ λόγος εἶναι μόνον περὶ τῶν εἰς τοὺς ἀγροὺς διορισμένων συνεισφορῶν, τῶν ὁποίων ἡ τιμὴ εἶναι Α. Πῶς θέλει ληφθῇ αὕτη ἡ ποσότης;

Σχόλιον. Ἀρχίζει ὁ ὑπουργὸς τοῦ ταμείου νὰ διαμοιράζῃ τὸ ἄθροισμα Α εἰς ὅλας τὰς ἐπαρχίας, αἱ ὁποῖαι συγκροτοῦν τὸ βασίλειον, ἀναλόγως μὲ τὰ νομιζόμενα εἰσοδήματα αὐτῶν.

Ἔστω Β τὸ ἄθροισμα, τὸ ὁποῖον μία τις ἐπαρχία μέλλει νὰ πληρώσῃ εἰς τὸ μερίδιόν της.

Ἐπειδὴ αὕτη ἡ ἐπαρχία διαιρεῖται εἰς τρεῖς ἢ τέσσαρας περιοχὰς, τῶν ὁποίων τὰ εἰσοδήματα εἶναι γνωστὰ, μερίζεται παρὰ τῆς τοπικῆς κυβερνήσεως τὸ ἄθροισμα Β εἰς ὅλας τὰς περιοχὰς ἀναλόγως μὲ τὰ εἰσοδήματάτων.

Ἔστω Γ τὸ ἄθροισμα, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ πληρώσῃ περιοχήτις εἰς τὸ μερίδιόν της.

Αὕτη ἡ περιοχὴ ὑποδιαιρεῖται εἰς πολλὰς κοινότητας, καὶ ἀπὸ τὴν τοπικὴν Κυβέρνησιν αὐτῆς γίνεται ἡ διαίρεσις τοῦ ἀθροίσματος Γ εἰς ὅλας τὰς κοινότητας ἀναλόγως μὲ τὰ νομιζόμενα εἰσοδήματάτων.

Ἔστω Δ τὸ μερίδιον, τὸ ὁποῖον πληρόνει μία κοινότης.

Τέλος πάντων αὕτη ἡ κοινότης σύγκειται ἀπὸ ἀριθμὸν τινὰ κτημάτων, εἴτε οἰκιῶν, εἴτε γαιῶν, εἴτε λειμώνων, εἴτε ξύλων, τῶν ὁποίων τὰ εἰσοδήματα ἐκτιμῶνται, καὶ μερίζεται ἡ συνεισφορὰ Δ εἰς τοὺς κτηματικοὺς ἀνολόγως μὲ τὰ νομιζόμενα εἰσοδήματάτων.

Ἀφ' οὗ μίαν φορὰν συστηθῇ ὁ κατάλογος τῶν συνεισφορῶν ὅλων τῶν κτηματικῶν, ἕκαστος αὐτῶν δίδει τὸ μερος εἰς τὰς χεῖρας τοῦ συνακτοῦ τῆς κοινότητος. Οὗτος τὰ παραδίδει εἰς τὸν συνακτὴν τῆς περιοχῆς, καὶ οὗτος πάλιν εἰς τὸν γενικὸν τῆς ἐπαρχίας συνακτήν· καὶ τέλος πάντων ὅλοι οἱ συνακταὶ τῶν ἐπαρχιῶν ἐγχειρίζουσι τὰς ποσότητας εἰς τὸ ταμεῖον· ἡ δὲ Κυβέρνησις λαμβάνει οὕτω τὸ γενικὸν ἄθροισμα τῶν συνεισφορῶν.

§. 235. Ἰδοὺ καὶ ἄλλα ζητήματα, τὰ ὁποῖα προσκολλῶνται εἰς τὴν μέθοδον τῆς ἑταιρείας.

Τρίτον παράδειγμα. Νὰ μερίσωμεν ἀθροίσματι 36000^{φρ}· εἰς τέσσαρας ἀνθρώπους, εἰς τρόπον, ὥστε ὁ δεύτερος νὰ λάβῃ δύο φοραῖς τόσον, ὅσον ὁ πρῶτος, καὶ ὁ τρίτος τόσον μόνος του, ὅσον ὁμοῦ καὶ οἱ δύο πρῶτοι, καὶ ὁ τέταρτος νὰ λάβῃ τρεῖς φοραῖς τόσον, ὅσον ὁ τρίτος.

Ὅσον ὀλίγον καὶ ἂν σκεφθῶμεν περὶ τῆς φύσεως τούτου τοῦ ζητήματος, βλέπομεν, ὅτι ἐὰν τὸ μέρος τοῦ πρώτου ληφθῇ ὡς μονὰς, ἢ σημειωθῇ μὲ 1., τὸ τοῦ δευτέρου θέλει εἶναι 2, καὶ τὸ τοῦ τρίτου $2+1$ ἢ 3· τέλος πάντων ἐκεῖνο τοῦ τετάρτου 3×3 ἢ 9. Λοιπὸν τὸ ζήτημα ἄγεται εἰς τὸ νὰ μερίσωμεν 36000 εἰς τέσσαρα μέρη, τὰ ὁποῖα νὰ ἦναι πρὸς ἄλληλα, ὡς οἱ ἀριθμοὶ, 1, 2, 3 καὶ 9, καὶ εἰσάγεται ἐπομένως εἰς τὸ γενικὸν ζήτημα τοῦ ἀριθ. 232.

Ἀθροίζοντες πρῶτον τοὺς τέσσαρας ἀριθμοὺς 1, 2, 3, 9, λαμβάνομεν 15.

Οὕτως ἐξάγομεν διαδοχικῶς τὰ τέσσαρα μέρη.

$1^{ον}$ μέρος ...... $\dfrac{1 \times 36000}{15} = 2400$

$2^{ον}$ .... $\dfrac{2 \times 36000}{15} = 4800$

$3^{ον}$ .... $\dfrac{3 \times 36000}{15} = 7200$

$4^{ον}$ .... $\dfrac{9 \times 36000}{15} = \dfrac{21600}{36000.}$

Κάποτε οἱ ἀριθμοὶ, ἀναλόγως τῶν ὁποίων πρέπει νὰ μερίσωμεν δεδομένον τι ἄθροισμα, εἶναι κλάσματα ἢ κλασματικοὶ ἀριθμοί.

Πλὴν μὲ εὐκολίαν δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ταύτην τὴν περίστασιν εἰς ἐκείνην, εἰς τὴν ὁποίαν οἱ ἀριθμοὶ εἶναι ἀκέραιοι, ἀνάγοντες τὰ κλάσματα ταῦτα εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν.

Οὕτως διὰ νὰ διαιρέσωμεν δεδομένον τι ἄθροισμα α, κατὰ μέρη ἀνάλογα εἰς τὰ κλάσματα $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, ἀνάγομεν ταῦτα τὰ κλάσματα κατὰ πρῶτον εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν, καὶ τρέπομεν εἰς $\frac{8}{12}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{10}{12}$. Τώρα, ἐπειδὴ κλάσματα ἔχοντα τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν εἶναι μεταξύ των (ἀρ. 220), ὡς οἱ ἀριθμηταί των, μερίζομεν εὐθὺς τὸ ἄθροισμα α, εἰς μέρη ἀνάλογα μὲ τοὺς δεδομένους ἀριθμοὺς, 8, 9, καὶ 10, ἡ ὁποία πρᾶξις διαδοχικῶς δίδει

$\frac{8α}{27}$, $\frac{9α}{27}$, $\frac{10α}{27}$, τὰ τρία ζητούμενα μέρη.

Τέταρτον παράδειγμα. Ἀποθνήσκων τὶς ἄφησε τέσσαρας κληρονόμους, καὶ ἔκαμε ταύτην τὴν περίεργον διαθήκην· ὁ πρῶτος κληρονόμος νὰ λάβῃ τὸ 6^{τον}., ὁ δεύτερος τὰ $\frac{2}{5}$, ὁ τρίτος τὰ $\frac{4}{9}$, καὶ ὁ τέταρτος τὸ τρίτον ὅλων τῶν ὑπαρχόντων.

Ζητεῖται τί ἀνήκει εἰς ἕκαστον, τῆς κληρονομίας συμποσουμένης εἰς 40000^{φρ}·

Λύσις. Ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν τεσσάρων κλασμάτων, $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{9}$ καὶ $\frac{1}{3}$ ἦτον ἴσα μὲ 1, τότε αἱ συνθῆκαι τῆς διαθήκης εὐκόλως ἤθελαν πληρωθῇ· ἐπειδὴ ἀρκοῦσε τότε νὰ λάβωμεν διαδοχικῶς τὸ 6^{τον}. τῶν 40000, τὰ $\frac{2}{5}$ τῶν 40000 κ. τ. λ. καὶ ἠθέλαμεν ἔχει τὰ τέσσαρα μέρη.

Ἀλλ' ἀνάγοντες τὰ κλάσματα εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν, εὑρίσκομεν $\frac{15}{90}$, $\frac{36}{90}$, $\frac{40}{90}$, $\frac{30}{90}$, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι ἴσον μὲ $\frac{121}{90}$, ἢ 1 $\frac{31}{90}$, ἐξαγόμενον μεῖζον τῆς μονάδος, ἐκ τοῦ ὁποίου βλέπομεν, ὅτι ἡ κληρονομία ἤθελεν ἀποῤῥοφηθῇ ὅλη ἀπὸ τοὺς τρεῖς πρώτους κληρονόμους, ἐὰν ἤθελεν ἐκτελεσθῇ ἡ πρᾶξις κατὰ τὴν κυριολεξίαν τῆς διαθήκης.

Πλὴν ἐὰν σκεφθῶμεν περὶ τῆς ἐκφράσεως, βλέπομεν, ὅτι ὁ σκοπὸς τοῦ διατιθεμένου ἦτον νὰ διαιρέσῃ τὴν οὐσίαν του εἰς τοὺς τέσσαρας κληρονόμους εἰς τρόπον, ὥστε τὰ μέρη αὐτῶν νὰ ἦναι ἀναμεταξύ των ὡς οἱ ἀριθμοὶ $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{1}{3}$.

Οὕτως θέλομεν πληρώσει τὸν σκοπὸν τοῦτον διαιροῦντες τὰς 40000 εἰς μέρη ἀνάλογα μὲ τὰ τέσσαρα κλάσματα, καὶ ἐπομένως μὲ τοὺς τέσσαρας ἀριθμοὺς 15, 36, 40, καὶ 30. τοῦ δὲ ἀθροίσματος τῶν ἀριθμῶν τούτων ὄντος 121, λαμβάνομεν διαδοχικῶς τὰ μέρη ταῦτα.

$\overline{1}^{ov.}$ μέρος . . . . $\frac{15\times40000}{121} = 4958^{\varphi\rho.},\ 68$

$\overline{2}^{ov.}$ . . . . . . $\frac{36\times40000}{121} = 11900,\ 82$

$\overline{3}^{ov.}$ . . . . . . $\frac{40\times40000}{121} = 13223,\ 14$

$\overline{4}^{ov.}$ . . . . . . $\frac{30\times40000}{121} = 9917,\ 36$

$40000,\ 00$

Πέμπτον παράδειγμα. Ἔγεινεν Ἱππασία τις ἀπὸ 1200 ἵππους, οἱ ὁποῖοι μέλλουν νὰ διανεμηθῶσιν εἰς τρία τάγματα ἱππέων, ἀναλόγως μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν στρατιωτῶν ἑκάστου τάγματος· ὁ ἀριθμὸς τοῦ πρώτου τάγματος εἶναι εἰς ἐκεῖνον τοῦ δευτέρου, καθὼς 11 πρὸς 8· τοῦ δὲ πρώτου εἶναι πρὸς τὸν τρίτον καθὼς 9 πρὸς 7. Ζητεῖται πόσους ἵππους θέλει ἔχει ἕκαστον τάγμα;

Ἕπεται προφανῶς ἐκ τῆς ἐκφράσεως ὅτι, ὁ ἀριθμὸς τῶν ἵππων τοῦ δευτέρου τάγματος, πρέπει νὰ ἦναι τὰ $\frac{8}{11}$ ἐκείνων τοῦ πρώτου.

Παρομοίως ὁ ἀριθμὸς τῶν ἵππων τοῦ τρίτου εἶναι τὰ $\frac{7}{9}$ εἰς ἐκεῖνον τοῦ πρώτου. Λοιπὸν οἱ τρεῖς ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἶναι μεταξύ των, ὡς οἱ ἀριθμοὶ 1,

$\frac{8}{11}$, $\frac{7}{9}$, ἢ, ἀναγομένων τῶν ἀκεραίων καὶ τῶν κλασμάτων εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν, ὡς οἱ τρεῖς ἀριθμοὶ 99, 72, 77.

Οὕτως λαμβάνομεν

διὰ τὸ 1ον τάγμα . . . . $\frac{99\times1200}{248}=479\frac{1}{31}$

διὰ τὸ 2ον. . . . . $\frac{72\times1200}{248}=348\frac{12}{31}$

διὰ τὸ 3ον. . . . . $\frac{77\times1200}{248}=372\frac{12}{31}$

2000,0

Σ. Κ. Ἡ πρόσθεσις τῶν κλασμάτων δίδει 1, τουτέστιν ἀμελουμένων τῶν κλασμάτων, πρέπει νὰ δοθῇ εἷς ἵππος περισσότερον εἰς τὸ δεύτερον τάγμα, ἐπειδὴ ἔχει μικρότερον ἀριθμόν. Ὑπάρχουσιν ἄλλαι δύο μέθοδοι, αἵτινες χωρὶς νὰ ἐξαρτῶνται ἀκριβῶς ἀπὸ τὴν μέθοδον τῶν τριῶν, εἶναι ὅμως ὠφέλιμοι νὰ τὰς γνωρίσωμεν, ὡς συνηθεστάτας εἰς τοὺς τραπεζίτας, καὶ εἰς πολλοὺς κλάδους τοῦ ἐμπορίου. Αὗται εἶναι ἡ Συνεζευγμένη μέθοδος, καὶ ἡ τῆς μίξεως.

Περὶ τῆς Συνεζευγμένης Μεθόδου.

§. 236. Αὕτη ἡ μέθοδος ἔχει σκοπὸν νὰ προσδιορίσῃ τὸν λόγον τῶν νομισμάτων δύο τόπων, γνωστῶν ἤδη ὄντων τῶν λόγων, τοὺς ὁποίους αὐτὰ ἔχουσιν μὲ ἐκεῖνα ἄλλων τόπων. Καλεῖται δὲ Συνεζευγμένη μέθοδος, ἐπειδὴ συνίσταται εἰς τὸ νὰ συζεύξῃ καὶ νὰ ἑνώσῃ πολλοὺς δεδομένους λόγους εἰς ἕνα μόνον διὰ μέσου τοῦ πολλαπλασιασμοῦ· τὸ ὁποῖον δίδει ἀρχὴν (ἀρ. 215) εἰς σύνθετόν τινα λόγον, Τὰ δύο ἀκόλουθα παραδείγματα θέλουν δώσει καλὴν ἰδέαν ταύτης τῆς μεθόδου, καὶ τοῦ τρόπου τοῦ ἐκτελεῖν αὐτήν.

Πρῶτον παράδειγμα.

	ἰσοδυναμοῦσι	
48 φράγκα	μὲ 52. σχελίγγια τῆς Ἀγγλίας.	
15 σχελ. τῆς Ἀγ. . . .	6 φλορίνια τῆς Γερμανίας.	
50 φλ. τῆς Γερμ. . . .	7 δουκάτα τῆς Ἀμβούργης.	
14 δουκ. τῆς Ἀμβ. . . .	40 ῥούβλια τῆς Ῥωσσίας.	

Ζητεῖται, 2500 φράγκα, πόσα ῥούβλια τῆς Ῥωσσίας κάμνουσι;

Σ. Κ. Εἰδοποιοῦμεν τοὺς ἀναγνώστας, ὅτι οὗτοι οἱ ἀριθμοὶ, οἵτινες ἐκφράζουσι τοὺς λόγους διαφόρων νομισμάτων, ἐλήφθησαν σχεδὸν κατὰ ἀρέσκειαν, ἐπειδὴ δὲν ἔχομεν ὑπ' ὄψιν τὸν πίνακα τούτων τῶν λόγων, οἵτινες ὑπόκεινται εἰς μεταβολὰς, κατὰ τὰς ἀλλαγὰς μιᾶς πόλεως μὲ ἄλλην.

Λύσις. Ἄς σημειώσωμεν α, β, γ, δ, ε τὰς ἐσωτερικὰς τιμὰς τῶν πέντε νομισμάτων, τὰ ὁποῖα περιέχονται εἰς τὴν ἔκφρασιν, καὶ διὰ χ τὸν ἀριθμὸν τῶν ῥουβλίων, τὰ ὁποῖα σχηματίζουσι τὰ 2500 φράγκα, καὶ ἔχομεν κατὰ τὴν ἔκφρασιν τὰς ἀκολούθους ἰσότητας.

$$48\alpha = 52\beta,$$
$$15\beta = 6\gamma,$$
$$50\gamma = 7\delta,$$
$$14\delta = 40\varepsilon.$$
$$\chi \times \varepsilon = 2500\alpha.$$

Ὅθεν πολλαπλασιάζοντες ταύτας τὰς ἰσότητας μέλος ἐπὶ μέλος, καὶ ἐξαλείφοντες τοὺς κοινοὺς παράγοντας α, β, γ, δ, ε, συνάγομεν,

$$48 \times 15 \times 50 \times 14 \times \chi = 52 \times 6 \times 7 \times 40 \times 2500$$

ῥούβ.

Λοιπὸν $\chi = \dfrac{52 \times 6 \times 7 \times 40 \times 2500}{48 \times 15 \times 50 \times 14} = 483\dfrac{1}{3}$.

Ἕπεται ἐκ τῆς παρατηρήσεως, ὅτι δὲν πρέπει νὰ ἐκτελέσωμεν τὰς πράξεις εἰς τὸν ἀριθμητὴν καὶ εἰς τὸν παρονομαστὴν, εἰμὴ ἀφ' οὗ ἐξαλείψωμεν τοὺς κοινοὺς παράγοντας τῶν ὅρων.

Εἰς τὴν πρᾶξιν, ἰδοὺ τίνι τρόπῳ ἐκτελοῦνται αὗται αἱ ἁπλότητες.

1 . . .	2 . . .	12 . . .	$48\alpha =$	52β . . .	13
		3 . . .	$15\beta =$	6γ . . .	1
		1 . . .	$50\gamma =$	7δ . . .	1
	1 . . .	2 . . .	$14\delta =$	40ε . . .	1
			$\chi \times \varepsilon =$	2500α . . .	100

Λοιπὸν $3\chi = 13 \times 100$, ὅπου $\chi = 433\dfrac{1}{3}$.

Ἀφ' οὗ θέσωμεν τὰς πέντε ἰσότητας τὴν μίαν ὑπὸ τὴν ἄλλην, ὡς ἀνωτέρω ἐπράξαμεν, ἐξαλείφομεν κατὰ πρῶτον τοὺς κοινοὺς παράγοντας α, β, γ, δ, ε, ἔπειτα τὸν παράγοντα 6, ὡς κοινὸν εἰς 12 καὶ 6 καὶ συνάγομεν 2 καὶ 1, μετὰ ταῦτα ἐξαλείφομεν τὸν κοινὸν παράγοντα 4 ἀπὸ τὸ 28 καὶ 32, καὶ γράφομεν τὰ πηλίκα 12 καὶ 13 εἰς τὸ πλευρὸν τῶν τοιούτων ἀριθμῶν.

Ἐξακολουθοῦμεν οὕτως, ἕως νὰ ἐξαλείψωμεν ὅλους τοὺς κοινοὺς παράγοντας ἀπὸ τὰ πρῶτα καὶ δεύτερα μέλη τῶν τοιούτων ἰσοτήτων, καὶ ἐκτελουμένης πάσης ἀναγωγῆς, φθάνομεν εἰς τὸ ἐξαγόμενον

$3\chi = 1300$, ὅπου $\chi = \dfrac{1300}{3} = 433\dfrac{1}{3}$.

Αὗται αἱ πράξεις ἀπαιτοῦσι μερικὴν ἕξιν, ἀλλὰ δὲν εἶναι δύσκολοι, πρέπει μόνον νὰ προσέχωμεν νὰ διαγράφωμεν τοὺς ἀριθμοὺς, τοὺς ὁποίους διαιροῦμεν δι' ἑνὸς παράγοντος, καὶ νὰ ἀντεισάγωμεν τὸ πηλίκον.

Δεύτερον παράδειγμα.

Ἔμπορός τις Γάλλος θέλει νὰ στείλη εἰς τὸ Λονδίνον ἄθροισμά τι ἀπὸ 1200 λίβρας στερλίνας. Παρακαλεῖ λοιπὸν ἕνα τραπεζίτην τοῦ Παρισίου νὰ ἐπιφορτισθῇ ταύτην τὴν ὑπόθεσιν, πληρόνων εἰς αὐτὸν ἓν διὰ τὰ 100 ἐπὶ τοῦ ἀθροίσματος. Ζητεῖται εἰς φράγκα, τὸ ἄθροισμα, τὸ ὁποῖον μέλλει νὰ πληρώση εἰς τὸν τραπεζίτην.

Ἠξεύρομεν δὲ ὅτι

26	λίβραι στερλίναι ἰσοδυναμοῦν μὲ	150	ῥούβλια.
75	ῥούβλια	30	δουκάτα τῆς Ἀμβούργης.
20	δουκάτα τῆς Ἀμβούργης . .	42	πιάστρα τῆς Ἰσπανίας.
12	πιάστρα τῆς Ἰσπανίας . . .	65	φράγκα.

Σημειόνοντες διὰ α, β, γ, δ, ε τὰς ἐσωτερικὰς τιμὰς τῶν νομισμάτων, καὶ διὰ χ τὴν τιμὴν τῶν 1200 λιβρῶν στερλινῶν εἰς φράγκα, ἔχομεν τὰς ἀκολούθους ἰσότητας.

1 13	. . .	$26\alpha = 150\beta$ . . .	1
1	. . .	$75\beta = 30\gamma$ . . .	3
1	. . .	$20\gamma = 42\delta$ . . .	21
1	. . .	$12\delta = 65\varepsilon$ . . .	5
		$\chi \times \varepsilon = 1200\alpha$ . . .	100

Ὅθεν ἐξάγομεν, ἐκτελοῦντες τὰς ἀναγωγὰς, ὡς ἀνωτέρω ἐδείξαμεν,

καὶ προσθέτοντες . . . $\chi = 31500^{\varphi\rho.}$

1 διὰ τὰ 100 . . . . . = 315

31815

Λοιπὸν ὁ ἔμπορος πρέπει νὰ δώσῃ εἰς τὸν τραπεζίτην ἄθροισμα ἀπὸ 30815 γρ. διότι ἐπεφορτίσθη νὰ πληρώσῃ 1200 λίβρας στερλίνας εἰς Λονδίνον.

§. 237. Ἡ συνεζευγμένη μέθοδος δύναται ἀκόμη νὰ θεωρηθῇ ὡς μερικὴ περίστασις τῆς μεθόδου τῶν κλασμάτων, τὴν ὁποίαν ἐκθέσαμεν εἰς ἀριθμὸν 60.

Ἂς ἐπαναλάβωμεν τὸ πρῶτον τῶν δύο παραδειγμάτων τοῦ ἀνωτέρω ἀριθμοῦ.

Τὸ νὰ λέγωμεν, ὅτι 48 φράγκα ἰσοδυναμοῦν μὲ 52 σχελίγγια τῆς Ἀγγλίας εἶναι τὸ αὐτὸ, ὡς νὰ εἴπωμεν, ὅτι ἓν φράγκον ἰσοδυναμεῖ μὲ $\frac{52}{48}$ τοῦ Ἀγγλικοῦ σχελιγγίου· παρομοίως, ἐπειδὴ 15 σχελίγγια ἰσοδυναμοῦν μὲ 6 φλορίνια τῆς Γερμανίας, ἕπεται ὅτι ἓν σχελίγγιον ἰσοδυναμεῖ μὲ $\frac{6}{15}$ τοῦ φλορινίου τῆς Γερμανίας· καὶ διὰ τοῦτο 1 φράγκον ἰσοδυναμεῖ μὲ $\frac{52}{48}$ τῶν $\frac{6}{15}$ τοῦ φλορινίου τῆς Γερμανίας· παρομοίως, ἐπειδὴ 50 φλορίνια ἰσοδυναμοῦν μὲ 7 δουκάτα τῆς Ἀμβούργης, ἕπεται ὅτι 1 φλορίνιον ἰσοδυναμεῖ μὲ $\frac{7}{50}$ τοῦ δουκάτου τῆς Ἀμβούργης, καὶ διὰ τοῦτο 1 φράγκον ἰσοδυναμεῖ μὲ $\frac{52}{48}$ τῶν $\frac{6}{15}$ τῶν $\frac{7}{50}$ δουκάτων τῆς Ἀμβούργης.

Ἐξακολουθοῦντες τούτους τοὺς συλλογισμοὺς, φθάνομεν τέλος πάντων νὰ δείξωμεν ὅτι

2500 γρ. $=$ 250 φοραῖς τὰ $\frac{52}{48}$ τῶν $\frac{6}{15}$ τῶν $\frac{7}{50}$ τῶν $\frac{40}{14}$

τοῦ ῥοβλίου. Λοιπὸν (ἀρ. 62) $2500^{\rho\rho.} = \frac{52\times6\times7\times40\times2500}{48\times15\times50\times14}$ τοῦ ῥουβλίου· ἐξαγόμενον, τὸ ὁποῖον καὶ ἀνωτέρω εὑρήκαμεν.

Περὶ τῆς μεθόδου τῆς μίξεως.

§. 238. Τὰ ζητήματα, ὅσα ἀνήκουσιν εἰς ταύτην τὴν μέθοδον, εἶναι δύο εἰδῶν.

Ἢ ἔχομεν σκοπὸν νὰ εὕρωμεν τὴν μέσην τιμὴν πολλῶν διαφόρων πραγμάτων, τῶν ὁποίων ὁ ἀριθμὸς καὶ ἡ μερικὴ τιμὴ ἑκάστου εἴδους εἶναι γνωστά,

Ἢ ζητοῦμεν νὰ γνωρίσωμεν τὰς ποσότητας κάθε εἴδους πραγμάτων, τὰ ὁποῖα μέλλουσι νὰ εἰσέλθουν εἰς μίξιν τινά, γνωρίζοντες ἤδη τὴν τιμὴν ἑκάστου εἴδους, καὶ τὴν ὅλην τιμὴν τοῦ μίγματος.

Θέλομεν θεωρήσει ἐνταῦθα μόνον τὴν πρώτην περίστασιν· τῆς δευτέρας δὲ ἡ θεωρία ἀνήκει εἰς τὴν Ἄλγεβραν.

Πρῶτον παράδειγμα. Οἰνοπώλης τις ἔμιξεν οἴνους διαφόρων ποιοτήτων, τουτέστι 250 λίτρα ἀπὸ 12 σολδία τὸ λίτρον, 180 λίτρα ἀπὸ $15^{\sigma o\lambda.}$, καὶ 200 ἀπὸ $16^{\sigma o\lambda.}$, καὶ ζητεῖ τὴν τιμὴν τοῦ λίτρου τοῦ μίγματος.

Παρατηροῦμεν κατὰ πρῶτον, ὅτι 250 λίτρα ἀπὸ $12^{\sigma o\lambda.}$ δίδουσι διὰ τὴν τιμὴν τῶν 250 λίτρων

	σολ.
250×12 ἢ	3000
Παρομοίως 18 λίτρα ἀπὸ $15^{\sigma o\lambda.}$ κάμνουσιν 180×15 ἢ	2700
Τέλος πάντων 200 λίτ. ἀπὸ $16^{\sigma o\lambda.}$ κάμνουσι 200×16 ἢ	3200
Ὅθεν συνάγομεν διὰ τὴν ὅλην τιμὴν τῶν τριῶν ποσοτήτων τῶν μεμιγμένων οἴνων $8900^{\sigma o\lambda.}$	8900