τῶν τριῶν, νὰ βάλλωμεν εἰς τὸν τελευταῖον ὅρον τῆς ἀναλογίας τὸν ἄγνωστον ὅρον.

Διὰ νὰ γίνῃ πλήρης αὕτη ἡ συνθήκη ἀρχίζομεν νὰ γράφωμεν τὸν λόγον τῶν δύο ὅρων τοῦ εἴδους, ὁ εἷς τῶν ὁποίων παριστάνει τὴν ἄγνωστον· μετὰ ταῦτα ἀφ' οὗ γνωρίσωμεν διὰ τῆς ἀναλύσεως τοῦ προβλήματος, ἂν ἡ σχέσις μεταξὺ τῶν τεσσάρων ἀριθμῶν εἶναι εὐθεῖα ἢ ἀντιπεπονθυῖα, θέτομεν τὸν ἄλλον λόγον εἰς τὰ ἀριστερὰ τούτου, εἰς τρόπον ὥστε ὁ ὅρος τοῦ ὁποίου τὸ χ εἶναι ὁ ἀντικείμενος, νὰ εἶναι ὁ πρῶτος μεσαῖος, ἢ ὁ πρῶτος τῶν ἄκρων, καθὼς ἡ σχέσις εἶναι εὐθεῖα ἢ πλαγία (ὅρα ἀριθμ. 219).

Τέταρτον παράδειγμα. Ὑποθέτομεν, ὅτι 45 ἐργάται ἔκαμαν 280 μέτρα οἰκοδομῆς, καὶ ζητεῖται πόσον 76 ἐργάται θέλουν κάμει ἀπὸ τὸ αὐτὸ ἔργον εἰς τὸν αὐτὸν καιρόν.

Ἔστω χ ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν μέτρων. Γράφομεν κατὰ πρῶτον τὸν λόγον 280 : χ· μετὰ ταῦτα παρατηροῦμεν, ὅτι ὅσον περισσότεροι ἄνθρωποι εἶναι, τόσον περισσότερον ἔργον κάμνουσιν. Ἡ σχέσις λοιπὸν εἶναι εὐθεῖα· λοιπὸν ἐπειδὴ χ εἶναι ἑπόμενος ἢ ἄκρος, ὁ ἀντικείμενος τοῦ 76 πρέπει νὰ ἦναι ὁ πρῶτος ἑπόμενος, ἢ τὸ πρῶτον ἄκρον, καὶ οὕτως, ἔχομεν· 45 : 76 :: 280 : χ, ἐκ τῆς ὁποίας ἔχομεν

$$\chi = \frac{280 \times 76}{45} = 472^{\text{μέτ.}},\ 89,\ \text{μεῖον } 0{,}01.$$

Πέμπτον παράδειγμα. Δι' ἀποσκευὴν πλοίου εὑρίσκονται μόνον 20 ἡμερῶν ζωοτροφίαι, ἐν ᾧ πρέπει τὸ πλοῖον νὰ μείνῃ εἰς τὴν θάλασσαν 35 ἡμέρας. Ζητεῖται πόσον πρέπει νὰ ὀλιγοστευθῇ τὸ σιτηρέσιον ἑκάστου ἀνθρώπου τὴν ἡμέραν.

Ἀνάλυσις. Ἔστω 1 τὸ σιτηρέσιον ἑκάστου ἀνθρώπου, καὶ χ ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ τοῦ δοθῇ διὰ τὴν ἀνάγκην, εἰς τὴν ὁποίαν εὑρίσκεται ἡ ἀποσκευή. Εἶναι φανερὸν, ὅτι τὸ νέον σιτηρέσιον πρέπει νὰ ἦναι τόσον μικρότερον σχετικῶς πρὸς τὸ πρῶτον, ὅσον ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν, εἰς τὰς ὁποίας τὸ πλοῖον μένει εἰς τὴν θάλασσαν, εἶναι μεγαλήτερος. Οὕτως τὰ δύο σιτηρέσια εἶναι εἰς ἀντιπεπονθότα λόγον τῶν δύο ἀριθμῶν τῶν ἡμερῶν. Λοιπὸν, ἐὰν θέσωμεν τὸν λόγον . . . . 1 : χ, ὁ ἀριθμὸς 35, τοῦ ὁποίου τὸ χ εἶναι ὁ ἀντικείμενος, πρέπει νὰ σχηματίσῃ τὸ πρῶτον ἄκρον, ἐπειδὴ χ εἶναι τὸ δεύτερον, καὶ γράφομεν οὕτως.

$$35 : 20 :: 1 : \chi$$

Ὅθεν $\chi = \frac{20}{35} = \frac{4}{7}$· τουτέστι τὸ σιτηρέσιον ἑκάστου πρέπει νὰ φερθῇ εἰς $\frac{4}{7}$ τοῦ συνήθους σιτηρεσίου.

Ἄλλη λύσις. Δυνάμεθα νὰ φθάσωμεν εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον χωρὶς τὴν συνδρομὴν τῶν ἀναλογιῶν, καὶ μ' ἕνα τρόπον πλέον ἁπλούστερον.

Ἂς δεχθῶμεν πρὸς τὸ παρὸν, ὅτι ὑπάρχει ἓν μόνον τακτικὸν σιτηρέσιον δι' ἕκαστον, διὰ νὰ ἐξακολουθῇ τὸ ταξείδιον διὰ 35 ἡμέρας· τὸ σιτηρέσιον θέλει εὑρεθῇ εἰς $\frac{1}{35}$ διὰ κάθε ἡμέραν τοῦ κοινοῦ σιτηρεσίου· ἀλλ' ἐπειδὴ κατὰ τὴν ἔκφρασιν ἔχομεν 20 σιτηρέσια διὰ καθένα, ἕπεται, ὅτι τὸ παρὸν σιτηρέσιον ἑκάστου θέλει εἶναι $\frac{1}{35} \times 20$ ἢ $\frac{20}{35}$, τουτέστι $\frac{4}{7}$ τοῦ κοινοῦ σιτηρεσίου.

§. 222. Μέθοδος τῶν τριῶν σύνθετος. Ἕως ἐδῶ ἐλύσαμεν ζητήματα, τῶν ὁποίων ἡ ἔκφρασις ἐπερίκλειε τέσσαρας μόνον ἀριθμούς. Ἰδοὺ τώρα ἄλλα πλέον συμπεπλεγμένα.

Ἕκτον παράδειγμα. 20 ἐργάται δαπανῶσι 18 ἡμέρας, διὰ νὰ κάμουν 500 μέτρα ἔργου. Ζητεῖται εἰς πόσας ἡμέρας 76 ἐργάται θέλουν κάμει 1265 μέτρα τοῦ αὐτοῦ ἔργου.

Ἀνάλυσις. Εἰς αὐτὴν τὴν ἔκφρασιν θεωροῦμεν τοὺς λόγους, τουτέστι τὸν λόγον τῶν δύο ἀριθμῶν τῶν ἐργατῶν, ἐκεῖνον τῶν δύο ἀριθμῶν τῶν ἡμερῶν, καὶ τὸν λόγον τῶν δύο ἔργων. Ἀλλὰ διὰ νὰ εὐκολύνωμεν τὸ ζήτημα, καὶ νὰ ἄξωμεν αὐτὸ εἰς τὰ προηγούμενα ζητήματα, ὑποθέτομεν κατὰ πρῶτον, ὅτι τὸ ἔργον, τὸ ὁποῖον θέλει γένει διὰ τοὺς δύο ἀριθμοὺς τῶν ἐργατῶν, εἶναι τὸ ἴδιον καὶ ἴσον μὲ τὸ πρῶτον 500 μέτρα· τότε τὸ ζήτημα τρέπεται εἰς τὸ ἀκόλουθον· 20 ἐργάται δαπανῶσι 18 ἡμέρας διὰ νὰ κάμουν 500 μέτρα ἑνὸς ἔργου. Πόσας ἡμέρας θέλουν μεταχειρισθῆ 76 ἐργάται διὰ νὰ κάμουν τὸ αὐτὸ ἔργον;

Ἐδῶ ἔχομεν ἀντιπεπονθότα λόγον μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν τῶν ἐργατῶν, καὶ μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν τῶν ἡμερῶν. Οὕτω σημειόνοντες διὰ x, ὄχι τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν τῶν ἡμερῶν κατὰ τὴν πρώτην ἔκφρασιν, ἀλλὰ τὸν ζητούμενον κατὰ τὴν νέαν ἔκφρασιν, ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν.... $76 : 20 :: 18 : x$ ..... (1).

Δυνάμεθα νὰ ἐξάξωμεν ἐκ ταύτης τῆς ἀναλογίας τὴν τιμὴν τοῦ x, ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ἀνωφελές· ἀρκεῖ μόνον νὰ συλλογισθῶμεν ἐπὶ τοῦ x, ὡς νὰ ἦτον γνωστὸν ἐκ ταύτης τῆς ἀναλογίας. Παρατηροῦμεν τώρα, ὅτι x, μὲ τὸ νὰ ἦναι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν τῶν ἀναγκαίων εἰς 76 ἐργάτας διὰ νὰ κάμουν τὰ 500 μέτρα ἄλλο δὲν λείπει, εἰμὴ νὰ γνωρίσωμεν πόσαι ἡμέραι χρειάζονται εἰς αὐτοὺς διὰ νὰ κάμουν τὰ 1265 μέτρα.

Τώρα ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν μὲ τὸ νὰ ἦναι ὁ αὐτὸς, ὅσον περισσότερον ἔργον ἔχομεν, τόσον περισσοτέρας ἡμέρας θέλομεν· διὰ τοῦτο ὑπάρχει εὐθεῖα σχέσις· καὶ ἐὰν σημειώσωμεν διὰ x' (x πρῶτον ἢ τονούμενον) τὸν ἀριθμὸν τῶν ζητουμένων ἡμερῶν, (τὸ ὁποῖον θέλει εἶναι ἡ ἄγνωστος τῆς πρώτης ἐκφράσεως), ἔχομεν τὸν νέαν ἀναλογίαν,

$$500 : 1265 :: x : x' \; \ldots\ldots \; (2)$$

(500 καὶ x σχηματίζουσιν ἄκρον καὶ μέσον, ἐπειδὴ ἡ σχέσις εἶναι εὐθεῖα)· Πολλαπλασιάζοντες τώρα ὅρον ἐπὶ ὅρον τὰς δύο ἀναλογίας (1) καὶ (2) λαμβάνομεν (ἀριθμ. 215)

$$76\times500 : 20\times1265 :: 18\times x : x\times x'.$$

Ἢ ἐξαλείφοντες τὸν κοινὸν παράγοντα x ἀπὸ τοὺς δύο ὅρους,

$$76\times500 : 20\times1265 :: 18 : x'.$$

Λοιπὸν $x'=\dfrac{20\times1265\times18}{76\times500}=11^{\text{ἡμ.}}\dfrac{187}{190}$ ἢ 12 ἡμέρας σχεδόν.

Ἂς ἔλθωμεν τώρα εἰς παράδειγμα πλέον σύνθετον.

Ἕβδομον παράδειγμα. 500 ἄνθρωποι ἐργαζόμενοι 12 ὥρας καθ' ἡμέραν ἐδαπάνησαν 57 ἡμέρας εἰς τὸ νὰ σκάψωσιν ἓν αὐλάκιον 1800 μέτρων μήκους, 7 πλάτους καὶ 3 βάθους. Ζητεῖται εἰς πόσας ἡμέρας 860 ἄνθρωποι ἐργαζόμενοι 10 ὥρας τὴν κάθε ἡμέραν, θέλουν σκάψει ἄλλο αὐλάκιον 2900 μέτρων μήκους, 12 πλάτους καὶ 5 βάθους, εἰς γῆν 3 φοραῖς πλέον δύσκολον παρὰ τὴν πρώτην;

Ἰδοὺ ὁ πίναξ τοῦ ὑπολογισμοῦ, τοῦ ὁποίου ἔπειτα θέλομεν δώσει τὴν ἐξήγησιν.

$$860^{\text{ἀνδ.}} : 500^{\text{ἀνδ.}} :: 57^{\text{ἡμ.}} : x^{\text{ἡμ.}} \ldots\ldots (1)$$
$$10^{\text{ὥρ.}} : 12^{\text{ὥρ.}} :: x : x' \ldots\ldots (2)$$
$$1800^{\text{μετ.}} : 2900^{\text{μετ.}} :: x' : x'' \ldots\ldots (3)$$
$$7^{\text{πλ.}} : 12^{\text{πλ.}} :: x'' : x''' \ldots\ldots (4)$$
$$3^{\text{βαθ.}} : 5^{\text{βαθ.}} :: x''' : x'''' \ldots\ldots (5)$$
$$1^{\text{σκληρ.}} : 3^{\text{σκληρ.}} :: x'''' : x''''' \text{ ἢ } X \ldots (6).$$

$$860\times10\times1800\times7\times3\times1 : 500\times12\times2900\times12\times5\times3\cdot57 : X \ldots\ldots (7)$$

$$\text{ὅπου } X=\frac{500\times12\times2900\times12\times5\times3\times57}{860\times10\times1800\times7\times3\times1}=549^{\text{ἡμ.}} : \frac{51}{301}.$$

Ἀνάλυσις. Διακρίνομεν εἰς τὴν ἀνωτέρω ἔκφρασιν δύο ἀρχικὰ μέρη· τὸ πρῶτον περιέχει τοὺς ἀριθμοὺς $500^{\text{ἀνδ.}}$, $12^{\text{ὥρ.}}$, $57^{\text{ἡμ.}}$, $1800^{\text{μετρ.μήκ.}}$, $7^{\text{μ.πλ.}}$, $3^{\text{σκλ.}}$, $1^{\text{σκλ.}}$· τὸ δεύτερον 860, 10, x, 2900, 12, 5, 3 (ἐπειδὴ ἡ γῆ εἶναι 3 φοραῖς πλέον δύσκολη εἰς τὸ νὰ σκαφθῇ παρὰ τὴν πρώτην, δυνάμεθα νὰ παῤῥησιάσωμεν τὴν σκληρότητα τῆς πρώτης γῆς διὰ 1, καὶ ἐκείνην τῆς δευτέρας διὰ 3, ὡς ἐδῶ φαίνεται).

Προσέτι ἐσημειώσαμεν διὰ X τὸν ἀριθμὸν τῶν ζητουμένων ἡμερῶν.

Τούτου τεθέντος, ἂς ὑποθέσωμεν κατὰ πρῶτον, ὅτι τὸ ἔργον, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ γένῃ ἀπὸ τοὺς δύο ἀριθμοὺς τῶν ἐργατῶν, εἶναι τὸ αὐτὸ, καὶ προσέτι ὅτι τόσον ὁ εἷς ἀριθμὸς, ὅσον καὶ ὁ ἄλλος τῶν ἐργατῶν νὰ ἐργάζωνται τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τῶν ὡρῶν καθ' ἡμέραν. Ἐπειδὴ εἰς ταύτην τὴν περίστασιν, ὅσον περισσότεροι ἐργάται εἶναι διὰ νὰ κάμουν αὐτὸ τὸ ἔργον, τόσον ὀλιγωτέρας ἡμέρας θέλουσι, διὰ τοῦτο ὑπάρχει ἐδῶ σχέσις ἀντιπεπονθυῖα μεταξὺ τῶν δύο αριθμῶν τῶν ἡμερῶν. Οὕτω σημειόνοντες διὰ χ τὸν ἀριθμὸν τὸν ἀναγκαῖον τῶν ἡμερῶν εἰς τοὺς 860 ἐργάτας διὰ νὰ σκάψωσι τὸ πρῶτον αὐλάκιον, τὸ καθ' ἡμέραν ἔργον ἀπὸ 12 ὥρας ὡς ἐκεῖνο τῶν 500 ἐργατῶν, λαμβάνομεν τὴν ἀναλογίαν (1), εἰς τὴν ὁποίαν 860 καὶ τὸ ἀντικείμενόν του χ σχηματίζουσι τὰ δύο ἄκρα.

Τώρα ἐὰν οἱ 860 ἄνθρωποι ἀντὶ νὰ ἐργασθῶσι 12 ὥρας, ἐργάζονται μόνον 10 ὥρας, ἀναγκαίως ἤθελαν δαπανήσει περισσοτέρας ἡμέρας, διὰ νὰ ἐκτελέσωσι τὸ αὐτὸ ἔργον. Οὕτω παρατηροῦντες τοὺς δύο ἀριθμοὺς τῶν ὡρῶν τῆς καθ' ἡμέραν ἐργασίας, ἐπειδὴ ὑπάρχουσιν ὀλιγώτεραι ὧραι ἐργασίας, χρειάζονται περισσότεραι ἡμέραι, ἔχομεν ἀκόμη ἀντιπεπονθυῖαν σχέσιν μεταξὺ τῶν δύο ἀριθμῶν τῶν ἡμερῶν 12$^{\text{αν.}}$ καὶ 10$^{\text{αν.}}$, καὶ τῶν δύο ἀριθμῶν χ, χ', καὶ οὕτως ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν . . . . . (2), εἰς τὴν ὁποίαν τὸ 10 καὶ τὸ ἀντικείμενόν του χ' σχηματίζουσι τὰ ἄκρα.

Δυνάμεθα πολλαπλασιάζοντες τὰς δύο ἀναλογίας (1) καὶ (2) τὴν μίαν ἐπὶ τὴν ἄλλην, καί

Παρατηροῦντες, ὅτι ὁ ὅρος χ ἐξαλείφεται ὡς κοινὸς παράγων τῶν δύο τελευταίων ὅρων τῆς νέας ἀναλογιας, δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν τὴν τιμὴν τοῦ χ', ἡ ὁποία ἐκφράζει τὰς ἀναγκαίας ἡμέρας εἰς τοὺς 860 ἐργάτας, ἐργαζομένους ἀπὸ 10 ὥρας τὴν ἡμέραν, διὰ νὰ σκάψωσι τὸ πρῶτον αὐλάκιον, ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ἀνωφελὲς, καὶ ἀρκεῖ νὰ θεωρήσωμεν τὸ χ' ὡς νὰ ἦτον γνωστόν.

Ἂς μεταβάλωμεν τώρα τὸ μῆκος τοῦ αὐλακίου, φυλάττοντές του τὸ αὐτὸ πλάτος, βάθος καὶ σκληρότητα τῆς γῆς.

Τώρα ἐὰν τὸ αὐλάκιον ἔχῃ περισσότερον μῆκος, ὅλων τῶν ἄλλων μενόντων τῶν αὐτῶν, χρειάζονται ἀναγκαίως περισσότεραι ἡμέραι διὰ τὸ σκάψιμον. Οὕτως ἔχομεν σχέσιν εὐθεῖαν μεταξὺ τῶν δύο ἀριθμῶν 1800, 2900· καὶ x', x'' (ἢ x δεύτερον) ἐκφράζουν τὸν ἀριθμὸν τῶν ἡμερῶν τῶν ἀντικειμένων εἰς τὸ μῆκος 2900. Ἐκ τούτου προκύπτει ἡ ἀναλογία (3), εἰς τὴν ὁποίαν 2900 καὶ x'' σχηματίζουν μέσον καὶ ἄκρον.

Ἐξακολουθοῦντες τοὺς αὐτοὺς συλλογισμοὺς σχετικῶς εἰς τὸ πλάτος καὶ βάθος, λαμβάνομεν τὰς δύο ἀναλογίας (4) καὶ (5), εἰς τὰς ὁποίας x''' καὶ x'''' (ἢ x τρία καὶ x τέσσαρα) ἐκφράζουσι τοὺς ἀριθμοὺς τῶν ἡμερῶν, αἱ ὁποῖαι ἀνταποκρίνονται εἰς τὰς μεταβολὰς τοῦ πλάτους καὶ βάθους.

Τέλος πάντων, ἐὰν παρατηρήσωμεν τὴν διαφορὰν τῆς σκληρότητος τῶν δύο γαιῶν, βλέπομεν, ὅτι ὑπάρχει σχέσις εὐθεῖα, καὶ συνάγομεν τὴν ἀναλογίαν (6), τῆς ὁποίας ὁ τελευταῖος ὅρος x''''' ἢ X, ἐκφράζει τὸν ἀριθμὸν τῶν ζητουμένων ἡμερῶν.

Πολλαπλασιάζοντες τώρα ὅρον ἐπὶ ὅρον τὰς ἓξ συσταθείσας διαδοχικῶς ἀναλογίας καὶ παρατηροῦντες, ὅτι ὅλοι οἱ ὅροι x, x', x'', x''', x'''' ἐξαλείφονται ὡς κοινοὶ παράγοντες εἰς τὸν δεύτερον ἡγούμενον καὶ εἰς τὸν δεύτερον ἑπόμενον τῆς νέας ἀναλογίας, λαμβάνομεν τὴν ἀναλογίαν (7), ἐκ τῆς ὁποίας ἐξάγεται ἡ τιμὴ τοῦ X, ἡ ὁποία, ἐκτελουμένης πάσης ἀναγωγῆς, ἄγεται εἰς $549^{\text{ἡμ.}}\ \frac{51}{371}$.

Οὕτως ὁ ἀριθμὸς τῶν ζητουμένων ἡμερῶν εἶναι 549 ἡμέραι σχεδόν.

Σ Η. Ἂς ἐνθυμηθῶμεν ὅτι, ὅταν φθάσωμεν εἰς τὴν ἔκφρασιν $X = \frac{500 \times 12 \times 2900 \times 12 \times 5 \times 3 \times 57}{860 \times 10 \times 1800 \times 7 \times 3 \times 1}$, πρέπει, πρὶν ἐκτελέσωμεν ὅλους τοὺς σημειωμένους πολλαπλασιασμούς, νὰ ἐξαλείψωμεν ὅλους τοὺς κοινοὺς παράγοντας, οἱ ὁποῖοι μᾶς παῤῥησιάζονται τόσον εἰς τὸν ἀριθμητὴν, ὅσον καὶ εἰς τὸν παρονομαστήν.

Οὕτω π. χ. ἀφ' οὗ ἐκτελέσωμεν ὅλας τὰς ἐξαλείψεις συνάγομεν $X = \frac{5 \times 4 \times 29 \times 5 \times 57}{43 \times 7}$, ἢ ἐκτελοῦντες τὸν ὑπολογισμὸν, $X = \frac{165300}{301} = 549 \frac{51}{301}$.

Τοῦτο τὸ παράδειγμα, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ πλέον σύνθετον ἀφ' ὅσα δύνανται νὰ προτεθῶσιν, ἀρκεῖ διὰ νὰ δείξῃ εἰς τοὺς ἀρχαρίους τὸν δρόμον, τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ ἀκολουθήσουν εἰς κάθε ἄλλο.

§. 223. Γενικὴ παρατήρησις περὶ τῆς μεθόδου τῶν τριῶν. Ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας ἐπροσδιορίσαμεν τὸν ἄγνωστον ἀριθμὸν εἰς τὰ δύο ἀνωτέρω ζητήματα, καλεῖται Μέθοδος σύνθετος τῶν τριῶν, ἐπειδὴ τῷ ὄντι φθάνομεν εἰς ἀναλογίαν, τῆς ὁποίας ὁ πρῶτος λόγος σχηματίζεται διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὅλων τῶν περιεχομένων λόγων εἰς τὴν ἔκφρασιν, ἐκτὸς ἐκείνου εἰς τὸν ὁποῖον ἡ ἄγνωστος ἀποτελεῖ μέρος, καὶ ὁ ὁποῖος εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν σχηματίζει τὸν δεύτερον λόγον τῆς ἀναλογίας.

Ἄλλοτε ἐδιαιροῦσαν ἀκόμη τὰς μεθόδους τῶν τριῶν εἰς μέθοδον τῶν τριῶν ἁπλῆν καὶ εὐθεῖαν, εἰς μέθοδον τῶν τριῶν ἁπλῆν καὶ ἀντίστροφον, εἰς μέθοδον τῶν τριῶν σύνθετον, εὐθεῖαν καὶ ἀντιπεπονθυῖαν εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν κ. τ. λ. Ἀλλ' ἐσυμφώνησαν μετὰ ταῦτα καὶ ἐπαραίτησαν ταύτας τὰς ὀνομασίας ὡς ἀνωφελεῖς εἰς τὴν λύσιν τῶν ζητημάτων.

Ἡ μόνη προσοχὴ, τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ ἔχωμεν, θέτοντες ὑπ' ἀλλήλας τὰς διαφόρους ἀναλογίας, τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον δίδει ἀναλογίαν ἔχουσαν ἄγνωστον ὅρον τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν, εἶναι νὰ βεβαιωθῶμεν, ἐὰν οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ, τοὺς ὁποίους συγκρίνομεν, διὰ κάθε ἀναλογίαν εἶναι εἰς εὐθεῖαν ἢ εἰς ἀντιπεπονθυῖαν ἀναλογίαν, καὶ νὰ γράφωμεν ταύτην τὴν ἀναλογίαν, ὡς πρέπει, κατὰ τὴν παρατήρησιν τοῦ ἀριθμοῦ 219.

Προτείνομεν ἐνταῦθα διὰ γύμνασιν καὶ τὰ ἀκόλουθα παραδείγματα.

Ὄγδοον παράδειγμα· 15 ἐργάται ἐργαζόμενοι 10 ὥρας τὴν ἡμέραν, ἐχρειάσθησαν 18 ἡμέρας, διὰ νὰ κάμουν 450 μέτρα ἔργου. Ζητεῖται πόσοι ἐργάται χρειάζονται, ἐργαζόμενοι 12 ὥρας τὴν ἡμέραν, διὰ νὰ κάμουν εἰς 8 ἡμέρας 480 μέτρα τοῦ ἰδίου ἔργου; [ἀπόκρισις· $x=30$ ἀνθρώπους].

Ἔννατον παράδειγμα. Χρειάζονται 1200 μέτρα ὑφάσματος ἀπὸ $\frac{3}{4}$ πλάτους, διὰ νὰ ἐνδυθῶσι 500 ἄνθρωποι. Ζητεῖται πόσα μέτρα χρειάζονται ἀπὸ $\frac{7}{8}$ πλάτους, διὰ νὰ ἐνδυθῶσιν 960;

[ἀπόκρισις· $3291^{\text{μέτρ.}}\frac{3}{7}$.]

Δέκατον παράδειγμα. Εἷς ταχυδρόμος περιπατῶν 15 ὥρας τὴν ἡμέραν διέτρεξε 375 λέγας εἰς 20 ἡμέρας. Ζητεῖται πόσας ὥρας θέλει περιπατεῖ τὴν ἡμέραν, διὰ νὰ κάμῃ 400 λέγας εἰς 18 ἡμέρας;

[ἀπόκρισις· $17^{\text{ὥρ.}}\frac{7}{9}$.]

Περὶ τῆς Μεθόδου τοῦ τόκου.

§. 224. Καλεῖται τόκος ἑνὸς ἀθροίσματος, τὸ κέρδος τὸ ὁποῖον προκύπτει ἐκ τῆς δανείσεως τοῦ τοιούτου ἀθροίσματος εἰς ἓν διάστημα χρόνου. Τὸ ἄθροισμα, τὸ ὁποῖον θέτομεν, καλεῖται κεφάλαιον.

Ο' τόκος ἑνὸς ἀθροίσματος ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν ποσότητα τοῦ κεφαλαίου, ἀπὸ τὸν καιρὸν, καθ' ὃν ἐβάλθη, καὶ ἀπὸ τὴν τιμὴν τοῦ τόκου.

Καλεῖται τιμὴ ὁ τόκος ἢ τὸ κέρδος τῶν 100 φράγκων δι' ἕνα χρόνον. Οὗτος ὁ τόκος εἶναι ἁπλῆ συμφωνία μεταξὺ τοῦ δανείζοντος καὶ δανειζομένου, μ' ὅλον τοῦτο ὑπάρχει εἰς τὸ ἐμπόριον ἢ εἰς τοὺς τραπεζίτας ὅρια, ἐκτὸς τῶν ὁποίων ὁ τόκος δὲν δύναται νὰ ὑψωθῇ, χωρὶς νὰ ὀνομασθῇ παράνομος τόκος. Ὁ ἀνομοτοκιστὴς εἶναι ἐκεῖνος, ὅστις δανείζει τὰ ἀργύριά του περισσότερον τῆς συνειθισμένης τιμῆς.

Ἡ μέθοδος τοῦ τόκου εἶναι μερική τις περίστασις τῆς μεθόδου τῶν τριῶν, καθὼς θέλομεν τὸ ἰδεῖ εἰς τὰ ἀκόλουθα ζητήματα.

Πρῶτον παράδειγμα. Ζητεῖται ὁ τόκος ἑνὸς ἀθροίσματος 4500 φράγκων διὰ 2 χρόνους καὶ 5 μῆνας, ἀπὸ 7 φράγκα τὰ $\frac{0}{0}$ τὸν χρόνον (οὕτω συνειθίζουν νὰ γράφουν οἱ ἔμποροι $\frac{0}{0}$ ἀντὶ 100). Αὕτη ἡ ἔκφρασις εἶναι ὁ σύντομος τρόπος τῆς ἀκολούθου.

100 φράγκα δίδουσιν 7 φράγκα τόκον τὸν χρόνον, πόσον θέλει προκύψει κατ' ἀναλογίαν ἀπὸ ἄθροισμα 4500 φράγκων δεδομένων, ἢ δανεισμένων διὰ 2 χρόνους καὶ 5 μῆνας;

Ἀνάλυσις καὶ λύσις. Ἐφαρμόζοντες εἰς τοῦτο τὸ ζήτημα τὰς συσταθείσας ἀνωτέρω ἀρχάς, λέγομεν, οἱ τόκοι δύο κεφαλαίων θεμένων διὰ τὸν αὐτὸν καιρὸν εἶναι κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογοι τῶν τοιούτων κεφαλαίων· οὕτως καλοῦντες χ τὸν τόκον τοῦ κεφαλαίου $4500^{\varphi\rho.}$, θεμένων διὰ ἕνα χρόνον, θέλομεν ἔχει τὴν ἀκόλουθον ἀναλογίαν.

$100 : 4500 :: 7 : \chi$ . . . . (1). Μετὰ ταῦτα, οἱ τόκοι τοῦ ἰδίου κεφαλαίου εἶναι κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογοι τῶν χρόνων, εἰς τοὺς ὁποίους ἐτέθησαν. Λοιπὸν ἐὰν σημειώσωμεν διὰ X τὸν τόκον τῶν $4500^{\varphi\rho.}$ διὰ 2 χρόνους καὶ 5 μῆνας, ἢ τὸν ζητούμενον τόκον, ἔχομεν ταύτην τὴν νέαν ἀναλογίαν,

$$\overset{\chi\rho.}{1} : \overset{\chi\rho.}{1}\ \overset{\mu\eta\nu.}{5} :: \chi : X \ . \ . \ . \ . \ (2)$$

λοιπὸν, πολλαπλασιάζοντες ὅρον ἐπὶ ὅρον τὰς ἀναλογίας (1) καὶ (2) ἔχομεν

$$100 : 4500 \times 2^{\chi\rho.}\, 5^{\mu\eta\nu.} :: 7 : X$$

καὶ διὰ τοῦτο $X = \dfrac{4500 \times 2^{\chi\rho}\, 5^{\mu\eta\nu.} \times 7}{100} = 318 + 2^{\chi.}\, 5^{\mu.}$

Καὶ ἐκτελοῦντες τὴν σημειωμένην πρᾶξιν διὰ $315 \times 2^{\chi\rho.}\, 5^{\mu.}$ κατὰ τὸν γιωστὸν κανόνα, καὶ ὡς ἐδῶ βλέπομεν, εὑρίσκομεν ἐξαγόμενον $761^{\varphi\rho.}$ καὶ 25 ἑκατοστημόρια. Οὕσως ὁ ζητούμενος τόκος φθάνει εἰς 761 φράγκα, καὶ 25 ἑκατοστημόρια.

$$\begin{array}{lrr} & 315 & \\ & 2^{\chi\rho.}\,5^{\mu.} & \\ \hline & 630 & \\ \mu\eta\nu. & & \\ 4\ .\ .\ . & 105 & \\ 1\ .\ .\ . & 26 & 25 \\ \hline & 761, & 25 \end{array}$$

Ἔστω ἐν γένει κεφάλαιον α τεθειμένον διά τινα χρόνον ἐκφραζόμενον διὰ τ, πρὸς ψ τὰ 100 τὸν χρόνον.

Συλλογιζόμενοι ὡς ἀνωτέρω θέλομεν φθάσει εἰς τὰς δύο ἀναλογίας ἐκ, τῶν ὁποίων ἐξάγομεν . . .

$$\left\{\begin{array}{l} 100 : \alpha :: \psi : \chi \\ \psi : \tau :: \chi : X \\ 100 : \alpha \times \tau :: \psi : X \end{array}\right.$$

καὶ διὰ τοῦτο $X = \dfrac{\alpha \times \tau \times \psi}{100} = \dfrac{\alpha\psi\tau}{100}$.

Οὗτος ὁ τύπος $X = \frac{\alpha\psi\tau}{100}$ περιέχει ὑπὸ ἁπλουστέραν μορφὴν τὸν τρόπον τοῦ προσδιορίζειν τὸν τόκον ἑνὸς ἀθροίσματος θεμένου εἰς ἕνα τινὰ χρόνον, καὶ κατά τινα τόκον.

Εἰς κοινὴν γλῶσσαν αὐτὸς φανερόνει, ὅτι πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ δεδομένον ἄθροισμα ἐπὶ τὸν τόκον δι' ἕνα χρόνον, μετὰ ταῦτα ἐπὶ τοῦ χρόνου, καθ' ὃν τὸ ἄθροισμα ἐβάλθη, καὶ νὰ διαιρέσωμεν τὸ ἐξαγόμενον διὰ τοῦ 100. Εἰς ταύτην τὴν πρᾶξιν συνίσταται ἡ μέθοδος τοῦ ἁπλοῦ τόκου.

§. 225. Δυνάμεθα νὰ φθάσωμεν εἰς αὐτὸν τὸν τύπον χωρὶς τὴν βοήθειαν τῶν ἀναλογιῶν, καὶ δι' ἑνὸς μέσου, τὸ ὁποῖον εἶναι ὠφέλιμον νὰ γνωρίσωμεν.

Ἐπειδὴ 100 φράγκα δίδουσιν ἀριθμὸν τινὰ φράγκων σημειωμένων διὰ ψ εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου ἢ εἰς ἕνα χρόνον, εἶναι φανερὸν, ὅτι ἓν μόνον φράγκον πρέπει νὰ δώσῃ $\frac{\psi}{100}$. Λοιπὸν ἓν ἄθροισμα ὁποιονδήποτε α θέλει δώσει $\frac{\psi}{100} \times \alpha$ ἢ $\frac{\psi\alpha}{100}$ εἰς ἕνα χρόνον· καὶ τὸ αὐτὸ ἄθροισμα ὕστερον ἀπὸ τ χρόνους θέλει δώσει $\frac{\alpha\psi}{100} \times \tau$ ἢ $\frac{\alpha\psi\tau}{100}$.

Σ. Κ. Τὸ κλάσμα $\frac{\psi}{100}$, τὸ ὁποῖον ἐκφράζει τὸν τόκον ἑνὸς φράγκου δι' ἕνα χρόνον, παριστάνεται εἰς μερικὰς περιστάσεις ὑπὸ ἁπλούστατον τύπον.

Ἔστω π. χ. $\psi = 5$, τὸ ὁποῖον δηλοῖ ὅτι ἓν ἄθροισμα ἐτέθη μὲ 5 τὰ 100 τὸν χρόνον, ἕπεται ὅτι $\frac{\psi}{100} = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$· ὅθεν $\frac{\alpha\psi}{100} = \frac{\alpha}{20}$. Λοιπὸν βλέπομεν, ὅτι ὁ τόκος ἑνὸς κεφαλαίου μὲ 5 τὰ 100 τὸν χρόνον, εἶναι ἴσος μὲ τὸ εἰκοστὸν τοῦ κεφαλαίου.

Ἔστω προσέτι $\phi = 10$, προκύπτει $\frac{\phi}{100} = \frac{10}{100}$. λοιπὸν $\frac{\alpha\phi}{100} = \frac{\alpha}{10}$, τουτέστι ὁ τόκος ἑνὸς κεφαλαίου θεμένου μὲ 10 τὰ 100, εἶναι ἴσος μὲ τὸ δέκατον τοῦ κεφαλαίου.

Λέγεται εἰς τὴν πρώτην περίστασιν, ὅτι τὸ κεφάλαιον ἐτέθη εἰς δηνάρια 20, καὶ εἰς τὴν δευτέραν εἰς δηνάρια 10.

Τέλος πάντων λέγοντες, ὅτι ἕνας ἔβαλε τὰ χρήματά του εἰς δηνάρια 40, ὑποθέτομεν, ὅτι λαμβάνει τὸν χρόνον διὰ τόκον, 40 μέρος τοῦ κεφαλαίου, ἢ μὲ ἄλλας λέξεις, ὅτι ὁ τόκος εἶναι ἀπὸ $2\frac{1}{2}$ τὰ 100 τὸν χρόνον.

Ἐπειδὴ ἔχομεν $\frac{2\frac{1}{2}}{100} = \frac{5}{200} = \frac{1}{40}$. λοιπὸν $\frac{\alpha\phi}{100} = \frac{\alpha \times 2\frac{1}{2}}{100} = \frac{\alpha}{10}$. Αὗται αἱ ὀνομασίαι συνηθίζονται εἰς τὸ ἐμπόριον.

§. 226. Μερικαῖς φοραῖς ἡ τιμὴ τοῦ τόκου δίδεται ὄχι δι' ἕνα χρόνον, ἀλλὰ 1 μῆνα ἢ διὰ 30 ἡμέρας· εἰς ταύτην τὴν περίστασιν λαμβάνεται ὁ μὴν ὡς μονὰς τοῦ χρόνου· ἀλλὰ ὁ τρόπος τῆς πράξεως εἶναι πάντοτε ὁ αὐτός.

Δεύτερον Παράδειγμα. Ζητεῖται ὁ τόκος 5000 φράγκων διὰ 315 ἡμέρας ἢ 10 μῆνας καὶ 15 ἡμέρας ἀπὸ $\frac{3}{4}$ τὰ 100 τὸν κάθε μῆνα.

Κάμνοντες εἰς τὸν τύπον $X = \frac{\alpha\phi\tau}{100}$, $\alpha = 5000$,

$\tau = 10^{\mu}\ \frac{1}{2}$, καὶ $\psi = \frac{3}{4}$, ἔχομεν $\chi = \frac{500 \times 10\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}}{100}$

$= 50 \times \frac{21}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3150}{8} = 393; 75$. Οὕτως ὁ ζητούμενος τόκος εἶναι 393 φράγκα, καὶ 75 ἑκατοστημόρια.

Τρίτον παράδειγμα. Ἓν ἄθροισμα ἀπὸ 3750 φράγκα ἔδωκε 719 φράγκα καὶ 25 ἑκατοστημόρια τόκον, ὕστερον ἀπὸ 2 χρόνους καὶ 6 μῆνας. Ζητεῖται ἡ τιμὴ τοῦ τόκου, διὰ τοῦ ὁποίου ἐτέθη τὸ ἄθροισμα.

Συλλογιζόμενοι, καθὼς εἰς τὸ πρῶτον παράδειγμα, φθάνομεν εἰς δύο ἀναλογίας,

$$\begin{cases} 3750 : 100 :: 719, 25 : \chi \\ 2^{\chi\rho.}\frac{1}{2} : 1 \quad :: \chi : X \end{cases}$$

ὅθεν ἐξάγομεν $3750 \times 2\frac{1}{2} : 100 :: 719, 25 : X$

Λοιπὸν $X = \frac{719,25 \times 100}{3750 \times 2\frac{1}{2}} = \frac{71925}{9375} = 7,672$· τουτέστι ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ τόκου εἶναι $7^{\varphi\rho.}, 67$, τὰ 100 τὸν χρόνον, μεῖον ἑνὸς ἑκατοστημορίου.

Δυνάμεθα νὰ βεβαιώσωμεν τοῦτο τὸ ἐξαγόμενον, προσδιορίζοντες τὸν τόκον τοῦ κεφαλαίου 3750 φράγκα, διὰ τὸ διάστημα 2 χρόνων καὶ 6 μηνῶν, ἀπὸ $7^{\varphi\rho.}, 67$ τὰ 100 τὸν χρόνον, μ' ὅλον τοῦτο εἶναι ἀνάγκη διὰ περισσοτέραν ἀκρίβειαν νὰ λάβωμεν διὰ τὸν τόκον 7, 672, καθὼς τὸ ἐλάβαμεν ἀνωτέρω.

Ὁ τύπος $X = \frac{\alpha\psi\tau}{100}$ εἶναι παρομοίως ἱκανὸς νὰ μᾶς δίδῃ τοῦτον τὸν τόκον. Τῷ ὄντι, αὐτὸς μᾶς δίδει φανερὰ $100X = \alpha \times \psi \times \tau$, ἐκ τοῦ ὁποίου $\psi = \frac{100X}{\alpha \times \tau}$.

Τώρα ἔχομεν $\alpha = 3750$, $\tau = 2^{\chi\rho.}$, $6^{\mu\eta\nu.}$, $X = 719, 25$.

Λοιπὸν $\psi = \dfrac{71925}{3750 \times 2\frac{1}{2}} = \dfrac{71925}{9375}$, ὡς καὶ ἀνωτέρω εὑρήκαμεν.

§. 227. Ἐν γένει ὁ τύπος περιέχει τέσσαρας ποσότητας α, ψ, τ, καὶ X, ἑκάστη τῶν ὁποίων δύναται νὰ ληφθῇ ὡς ἄγνωστος, ὅταν αἱ τρεῖς ἄλλαι εἶναι δεδομέναι. Εἶναι δὲ πάντοτε εὔκολον νὰ προσδιορίζωμεν ἐξ αὐτῶν τὴν ἄγνωστον ποσότητα.

Καὶ διὰ τοῦτο δυνάμεθα νὰ προτείνωμεν τέσσαρα οὐσιώδη ζητήματα διαφορετικὰ, τῶν ὁποίων ἰδοὺ ἡ ἔκφρασις. μὲ τὰ ἐξαγόμενα, τὰ ὁποῖα εἰς αὐτὰ ἀνταποκρίνονται.

1ον. Νὰ προσδιορίσωμεν τὸν τόκον ἑνὸς κεφαλαίου ὕστερον ἀπὸ κάποιον καιρὸν, σχετικῶς εἰς μίαν τινὰ τιμὴν τοῦ τόκου.

Ἔστω X ὁ ζητούμενος τόκος, ἔχομεν $X = \dfrac{\alpha\psi\tau}{100}$.

(Τὰ δύο πρῶτα παραδείγματα ἀναφέρονται εἰς τοῦτο τὸ ζήτημα.)

2ον. Νὰ προσδιορίσωμεν τὴν τιμὴν τοῦ τόκου, εἰς τὴν ὁποίαν ἓν ἄθροισμα πρέπει νὰ τεθῇ, διὰ νὰ δώσῃ ὕστερον ἀπὸ τινὰ καιρὸν, ἄλλο τι ἄθροισμα. Ὁ τύπος εἶναι $\psi = \dfrac{100X}{\alpha 9}$.

(Τὸ τρίτον παράδειγμα ἀναφέρεται εἰς τοῦτο τὸ ζήτημα.)

3ον. Νὰ προσδιορίσωμεν τὸν καιρὸν, εἰς τὸν ὁποῖον ἄθροισμά τι πρέπει νὰ τεθῇ, διὰ νὰ δώσῃ κατὰ μίαν τινὰ τιμὴν γνωστὴν, ἄλλοτι ἐσπίσης γνωστὸν ἄθροισμα.

Ὁ τύπος θέλει εἶναι τότε $\tau = \frac{100X}{\alpha \times \phi}$.

Αὕτη ἡ τιμὴ τοῦ τ πρέπει νὰ λογαριάζεται εἰς μονάδας τοῦ ἰδίου εἴδους, ὡς ἐκεῖναι τὰς ὁποίας μεταχειζόμεθα διὰ νὰ στερεώσωμεν τὴν τιμὴν, τουτέστιν εἰς χρόνους, ἢ εἰς μῆνας.

$\overline{4}^{ον}$. Νὰ προσδιορίσωμεν τὸ κεφάλαιον, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ θέσωμεν εἰς γνωστὸν καιρὸν, διὰ νὰ δώσῃ κατὰ μίαν τινὰ τιμὴν δεδομένην, ἄθροισμά τι παρομοίως γνωστόν.

Θέλομεν ἔχει τὸν τύπον $\alpha = \frac{100X}{\phi \times \tau}$.

Ἰδοὺ καὶ ἄλλα παραδείγματα, ἐπὶ τῶν ὁποίων δυνάμεθα νὰ γυμνασθῶμεν.

Τέταρτον παράδειγμα. Κεφάλαιόν τι θεμένον 27 μῆνας πρὸς $\frac{1}{2}$ τὰ 100 τὸν μῆνα, ἔδωκε 1312$^{φρ.}$, 65$^{ἑκ.}$ διὰ τόκον. Ζητεῖται ἡ τιμὴ τοῦ κεφαλαίου.

[ἀπόκρ. 9723$^{φρ.}$, 33$^{ἑκ.}$]

Πέμπτον Παράδειγμα. Ἀθροισμάτι ἀπὸ 7400$^{φρ.}$ ἔδωκεν εἰς 27 μῆνας 852$^{φρ.}$, 50$^{ἑκ.}$ Ζητεῖται πόσον ἓν ἄλλο ἄθροισμα ἀπὸ 8500$^{φρ.}$ θέλει δώσει, μὲ τὴν ἰδίαν τιμὴν τοῦ τόκου, διὰ 45 μῆνας, καὶ ποία εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ τόκου.

[ἀπόκρ. 1593$^{φρ.}$, 75$^{ἑκ.}$, καὶ 5 τὰ 100 τὸν χρόνον.]

Περὶ τῆς μεθόδου τῆς ὑφαιρέσεως.

§. 228. Ἡ ὑφαίρεσις ἄλλο δὲν εἶναι, εἰμὴ τὸ ὅ,τι κατεβάζομεν ἢ κρατοῦμεν ἀπὸ τὴν τιμὴν ἑνὸς γραμματίου, τὸ ὁποῖον μ᾽ ὅλον ὅτι πρέπει νὰ πληρω-