Σ. Κ. Οἱ περισσότεροι συγγραφεῖς τῆς γεωμετρίας σημειόνουσιν ὑπὸ τῆς ὀνομασίας Ἐναλλὰξ καὶ Ἀντίστροφον, τὰς διαφόρους μεταλλαγὰς, τὰς ὁποίας ἔκαμαν ἐπὶ τῶν ὅρων μιᾶς ἀναλογίας.

Αἱ τροπαὶ, αἵτινες συνίστανται εἰς τὸ νὰ πολλαπλασιάσουν ἢ νὰ διαιρέσουν τοὺς ὅρους, καλοῦνται τροπαὶ τοῦ πολλαπλασιάζειν ἢ διαιρεῖν.

Αἱ ἀκόλουθοι ἰδιότητες εἶναι εὐχρηστότατοι εἰς τὴν Γεωμετρίαν, καὶ ἀπαιτοῦσιν ὅλην τὴν προσοχὴν τῶν ἀρχαρίων.

§. 212. Πρώτη. Εἰς κάθε ἀναλογίαν τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ τῶν δύο πρώτων ὅρων περιέχεται εἰς τὸν δεύτερον ὅρον, καθὼς τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ τῶν δύο ἄλλων ὅρων περιέχεται εἰς τὸν τέταρτον.

Οὕτως ἡ ἀναλογία $72 : 24 :: 45 : 15$

γίνεται, ὅταν προσθέσωμεν $72 + 24 : 24 :: 45 + 15 : 15$

καὶ, ὅταν ἀφαιρέσωμεν . $72 - 24 : 24 :: 45 - 15 : 15$,

ἀναλογία, τὴν ὁποίαν δυνάμεθα εὐκόλως νὰ βεβαιώσωμεν· Ἀλλὰ διὰ νὰ δώσωμεν λόγον ταύτης τῆς ἰδιότητος μὲ τρόπον γενικὸν, παρατηροῦμεν, ὅτι αὐξανομένου, ἢ ἐλαττουμένου ἑκάστου ἡγουμένου ἀπὸ τὸν ἑπόμενόν του, αὐξάνεται ἢ ἐλαττοῦται κατὰ μονάδα ἕκαστος τῶν δύο λόγων· καὶ ἐπειδὴ οὗτοι οἱ λόγοι ἦσαν ἴσοι πρότερον, μένουσιν ἴσοι καὶ μετὰ τὴν αὔξησιν καὶ μετὰ τὴν ἐλάττωσιν.

Ἀπὸ τὴν ἀναλογίαν $72 \pm 24 : 24 :: 45 \pm 15 : 15$

($\pm$ προφέρεται πλέον ἢ μεῖον) ἐξάγομεν, ἀλλάττοντες τοὺς μεσαίους ἀπὸ θέσιν (ἀριθμ. 211)

$$72 \pm 24 : 45 \pm 15 :: 24 : 15.$$

ἀλλ' ἔχομεν ἤδη $72 : 24 :: 45 : 15$ ·

ἢ . . . . . $72 : 45 :: 24 : 15.$

Λοιπὸν ἐπειδὴ δύο λόγοι ἴσοι μὲ ἕνα τρίτον εἶναι ἐξ ἀνάγκης ἴσοι ἀναμεταξύ τους, προκύπτει ἀκόμη

$$72 \pm 24 : 45 \pm 15 :: 75 : 45$$

ἢ . . . $72 \pm 24 : 72 :: 45 \pm 15 : 45$.

Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ εἴπωμεν οὕτως, ὅτι εἰς κάθε ἀναλογίαν τὸ ἄθροισμα, ἢ ἡ διαφορὰ τῶν δύο πρώτων ὅρων περιέχεται εἰς τὸν πρῶτον ὅρον, καθὼς τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ τῶν δύο ἄλλων ὅρων περιέχεται εἰς τὸν τρίτον· ἔκφρασις, τὴν ὁποίαν εὐκόλως ἐννοοῦμεν, καὶ μὲ μόνον τὰς λέξεις πλέον ἢ μεῖον.

§. 214. Δευτέρα. Εἰς κάθε ἀναλογίαν τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ τῶν ἡγουμένων περιέχεται εἰς τὸ ἄθροισμα ἢ εἰς τὴν διαφορὰν τῶν ἑπομένων, ὡς εἷς ὁποιοσδήποτε τῶν ἡγουμένων περιέχεται εἰς τὸν ἑπόμενόν του.

Ἃς ἐπαναλάβωμεν τὴν ἀνωτέρω ἀναλογίαν.

$$72 : 24 :: 45 : 15\cdot$$

καὶ ἂς ἀλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν μέσων· ἐντεῦθεν λαμβάνομεν

$$72 : 45 :: 24 : 15.$$

Ἤδη ἐφαρμόζοντες εἰς ταύτην τὴν ἀναλογίαν τὴν ἰδιότητα τοῦ ἀνωτέρω ἀριθμοῦ ἔχομεν,

$$72 \pm 45 : 45 :: 24 \pm 15 : 15\cdot$$

ἢ ἀλλάττοντες ἀπὸ θέσιν τοὺς μεσαίους,

$$75 \pm 45 : 24 \pm 15 :: 45 : 15 \text{ ἢ } :: 72 : 24.$$

Αὕτη ἡ ἀναλογία ἐκφραζομένη εἰς τὴν κοινὴν γλῶσσαν καὶ συγκρινομένη μὲ τὴν ἀναλογίαν $72 : 24 :: 45 : 15$ μᾶς ἄγει εἰς τὴν ἐκφρασθεῖσαν ἰδιότητα.

Ἐὰν εἰς τὴν ἀναλογίαν $72+45:24+15::45:15$ θεωρήσωμεν τὰ ἄνω σημεῖα, καὶ ὕστερον τὰ κάτω, ἐξάγομεν διαδοχικῶς,

$$72+45:24+15::45:15,$$
$$72-45:24-15::45:15,$$

καὶ ἐξ αἰτίας τοῦ κοινοῦ λόγου,

$$72+45:24+15::72-45:24-15.$$

ἢ ἀλλάττοντες τὴν θέσιν τῶν μέσων,

$$72+45:72-45::24+15:24-15\cdot$$

τουτέστιν, εἰς κάθε ἀναλογίαν τὸ ἄθροισμα τῶν ἡγουμένων περιέχεται εἰς τὴν διαφοράν των, ὡς τὸ ἄθροισμα τῶν ἑπομένων περιέχεται εἰς τὴν διαφοράν των.

§ 214. Συνέπειαι ταύτης τῆς ἰδιότητος. 1^{ον}. Ἔστω σειράτις ἀριθμῶν α, β, γ, δ, ε, ζ, η, ϑ, ι, $\varkappa$ . . . . . σχηματιζόντων ἀνὰ δύο λόγους ἴσους ὥστε νὰ ἔχωμεν,

$$\alpha:\beta::\gamma:\delta::\varepsilon:\zeta::\eta:\vartheta::\iota:\varkappa.$$

λέγω, ὅτι εἰς ταύτην τὴν σειρὰν τῶν ἴσων λόγων, τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν ἡγουμένων α, γ, ε, η, ι . . . περιέχεται εἰς τὸ ἄθροισμα τῶν ἑπομένων β, δ, ζ, ϑ, $\varkappa$ . . . ὡς εἰς ὁποιοσδήποτε τῶν ἡγουμένων περιέχεται εἰς τὸν ἑπόμενόν του.

Τῷ ὄντι οἱ δύο πρῶτοι λόγοι $\alpha:\beta::\gamma:\delta$ δίδουσιν ἐξαιτίας τῆς ἀνωτέρω ἰδότητος $\alpha+\gamma:\beta+\delta::\gamma:\delta\cdot$ ἀλλ' ἐπειδὴ ἔχομεν καὶ

. . . $\alpha:\beta::\varepsilon:\zeta$, ἕπεται ὅτι $\alpha+\gamma:\beta+\delta::\varepsilon:\zeta$.

Καὶ ἐφαρμόζοντες εἰς ταύτην τὴν νέαν ἀναλογίαν τὴν αὐτὴν ἰδιότητα ἔχομεν,

$$\alpha+\gamma+\varepsilon:\beta+\delta+\zeta::\varepsilon:\zeta$$

ἀλλ' ἔχομεν προσέτι $\varepsilon:\zeta::\eta:\vartheta$,

λοιπὸν . . $\alpha+\gamma+\varepsilon+\eta:\beta+\delta+\zeta+\vartheta::\eta:\vartheta\cdot$

καὶ διὰ τοῦτο $\alpha+\gamma+\varepsilon+\eta+\iota:\beta+\delta+\zeta+\vartheta+\varkappa::\eta:\vartheta\cdot$

καὶ οὕτως ἐφεξῆς, ὁποῖος καὶ ἂν εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἴσων λόγων.

2$^{\alpha}$. Ἔστω τὸ κλάσμα $\frac{8}{12}$ ἴσον μὲ τὸ $\frac{2}{3}$, ἐὰν λάβωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμητῶν, καὶ τὸ τῶν παρονομαστῶν τῶν δύο κλασμάτων, τὸ νέον προκύπτον κλάσμα $\frac{10}{15}$ θέλει εἶναι ἴσον μὲ ἕκαστον τῶν προτεθέντων κλασμάτων.

Τῷ ὄντι ἡ ἰσότης $\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$ ἄγεται εἰς τὴν ἀναλογίαν 8 : 12 :: 2 : 3. Λοιπὸν ἐφαρμόζοντες τὴν ἀνωτέρω ἰδιότητα, ἔχομεν

$$8+2 : 12+3 :: 8 : 12 :: 2 : 3.$$

λοιπὸν $\frac{8+2}{12+3}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$.

Ἤθελεν ἀκολουθήσει τὸ αὐτὸ, ἐὰν ἐλαμβάναμεν τὴν διαφορὰν τῶν ἀριθμητῶν, καὶ τὴν τῶν παρονομαστῶν.

Αἱ τροπαὶ, αἱ ὁποῖαι ἀναφέρονται εἰς τὰς ἀνωτέρω ἰδιότητας καλοῦνται εἰς τὴν Γεωμετρίαν τροπαὶ τοῦ προσθέτειν καὶ τροπαὶ τοῦ ἀφαιρεῖν.

§. 215. Τρίτη. Ἐὰν ἔχωμεν ἀριθμὸν τινὰ ἀναλογιῶν, καὶ, ἀφ' οὗ τὰς θέσωμεν τὴν μίαν ὑπὸ τὴν ἄλλην, τὰς πολλαπλασιάσωμεν κατὰ τάξιν, τὰ λαμβανόμενα γινόμενα θέλουν εἶναι εἰς ἀναλογίαν.

Ἔστωσαν π, χ. αἱ τρεῖς ἀναλογίαι

$$3 : 8 :: 12 : 32$$
$$7 : 15 :: 28 : 60$$
$$40 : 12 :: 50 : 15.$$

Ἕπεται ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ των, ὅτι δύνανται νὰ τεθῶσιν ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\frac{3}{8}=\frac{12}{32}$$
$$\frac{7}{15}=\frac{28}{60}$$
$$\frac{40}{12}=\frac{50}{15}$$

Ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὰς ἰσότητας μέλος ἐπὶ μέλος, θέλουν προκύψει ἀναγκαίως γινόμενα ἴσα. Ἀλλ' ἐκτελοῦντες τὴν ἐργασίαν κατὰ τὸν κανόνα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν κλασμάτων (ὅρα ἀριθμ. 56) ἔχομεν,

$$\frac{3\times7\times40}{8\times15\times12}=\frac{12\times28\times50}{32\times60\times15}.$$

Λοιπὸν $3\times7\times40 : 8\times15\times12 :: 12\times28\times50 : 32\times60\times15$· ἢ ἐκτελοῦντες τὰς πράξεις $840 : 1440 :: 16800 : 28800$, ἀναλογία, τὴν ὁποίαν μ' εὐκολίαν δυνάμεθα νὰ βεβαιώσωμεν· ἐπειδὴ διαιροῦντες τοὺς δύο τελευταίους ὅρους διὰ τοῦ 100, καὶ μετὰ ταῦτα διὰ τοῦ 2 εὑρίσκομεν

$$840 : 1440 :: 840 : 1440,$$

ἀναλογία φανερὰ (ἡ ὁποία καλεῖται ἀναλογία ταυτοσήμαντος).

Σ. Κ. Πρέπει νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι, κατὰ τὴν φύσιν τῶν πράξεων, τὰς ὁποίας ἐκτελέσαμεν, ὁ σταθερὸς λόγος τῆς ἀνωτέρω ἀναλογίας, τουτέστι $\frac{840}{1440}$, εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τῶν τριῶν σταθερῶν λόγων τῶν δεδομένων ἀναλογιῶν. Οὕτως οἱ τρεῖς σταθεροὶ λόγοι μὲ τὸ νὰ ἦναι, καθὼς δυνάμεθα νὰ βεβαιωθῶμεν, $\frac{3}{8}$, $\frac{7}{15}$, $\frac{10}{3}$, ἔχουν γινόμενον, $\frac{210}{360}$, ἢ, ἐξαλείφοντες τὸν κοινὸν παράγοντα 30 εἰς τοὺς δύο ὅρους, $\frac{7}{12}$, ἐξαγόμενον εἰς τὸ ὁποῖον τὸ κλάσμα $\frac{840}{1440}$ δύναται νὰ ἀχθῇ διὰ τῆς ἐκθλίψεως τοῦ κοινοῦ παράγοντος 120.

Οὗτος ὁ λόγος $\frac{7}{12}$, ὅςτις προέρχεται ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ πολλῶν ἄλλων λόγων, καλεῖται ἀπὸ τοὺς ἀριθμητικοὺς, λόγος σύνθετος.

Ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας γίνεται ἡ ἀνωτέρω ἰδιότης, καλεῖται πρᾶξις τοῦ συνθέτειν.

§. 216. Συνέπειαι ταύτης τῆς ἰδιότητος. $1^{ον.}$ Ὅταν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἦναι ἀνάλογοι, τὰ τετράγωνα, οἱ κύβοι, καὶ ἐν γένει αἱ ὅμοιαι δυνάμεις αὐτῶν εἶναι παρομοίως ἀνάλογοι.

Διὰ νὰ τὸ ἀποδείξωμεν, ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι ἐὰν ἡ ἀναλογία ἤθελε γραφθῆ ὑφ' ἑαυτὴν ἕνα τινὰ ἀριθμὸν φορῶν, ἠθέλαμεν ἔχει σειρὰν ἀναλογιῶν, αἱ ὁποῖαι πολλαπλασιαζόμεναι κατὰ τάξιν, δίδουσι γινόμενα ἀνάλογα κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἰδιότητα.

$2^{ον.}$ Ἀντιστρόφως, ὅταν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἦναι ἀνάλογοι, αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι καὶ κυβικαὶ, αἱ τέταρται κ. τ. λ. τῶν τοιούτων ἀριθμῶν εἶναι ἀνάλογοι.

Ἔστω ἡ ἀναλογία $\alpha:\beta::\gamma:\delta$ ἢ $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$.

Ἐπειδὴ οἱ δύο λόγοι $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\gamma}{\delta}$ εἶναι ἴσοι, αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι τῶν τοιούτων λόγων εἶναι καὶ αὐταὶ ἴσαι, καὶ ἔχομεν $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}=\sqrt{\frac{\gamma}{\delta}}$.

Ἀλλὰ διὰ νὰ ἐξάξωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἑνὸς κλάσματος, πρέπει (ἀριθμ. 190) νὰ ἐξάξωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ ἀριθμητοῦ, καὶ ἐκείνην τοῦ παρονομαστοῦ, καὶ διὰ τοῦτο ἔχομεν $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} =$

$\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$, $\sqrt{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\delta}}$. Λοιπὸν $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\delta}}$, ἢ $\sqrt{\alpha} : \sqrt{\beta} :: \sqrt{\gamma} : \sqrt{\delta}$.

Ὁ συλλογισμὸς εἶναι ὁ αὐτὸς καὶ διὰ τὰς κυβικὰς ῥίζας, ἢ δι᾽ ὁποιασδήποτε βαθμοῦ ῥίζας, κατὰ ταύτην τὴν γενικὴν ἀρχὴν ὅτι „διὰ νὰ ἐξάξωμεν ῥίζαν τινὰ ὁποιουδήποτε βαθμοῦ ἑνὸς κλάσματος, πρέπει νὰ ἐξάξωμεν τὴν ῥίζαν τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ τὴν τοῦ παρονομαστοῦ."

§. 217. Παρατήρησις. Ὅταν οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ, δ, δὲν ἦναι τέλεια τετράγωνα, αἱ ποσότητες, $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt{\beta}$, $\sqrt{\gamma}$, $\sqrt{\delta}$ εἶναι ἀριθμοὶ ἄλογοι, καὶ ἡ ἄνω ἀναλογία ὑπάρχει ἀκόμη μεταξὺ ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν· τουτέστι θεωροῦμεν λόγους μεταξὺ ἀσυμμέτρων ποσοτήτων, λόγους, τοὺς ὁποίους ἔπρεπε διὰ τὸν αὐτὸν λόγον νὰ τοὺς στοχασθῶμεν ὡς ἀλόγους καὶ τώρα ζητοῦμεν νὰ μάθωμεν, ἐὰν ἦναι δυνατὸν νὰ ἐφαρμόσωμεν εἰς τὰς ἀναλογίας τοῦ τοιούτου εἴδους ὅλας τὰς ἰδιότητας, τὰς ὁποίας πρότερον ἐσυστήσαμεν.

Ἡ ἀπόκρισις εἶναι καταφατικὴ, ἐὰν ἀνακαλέσωμεν εἰς τὴν μνήμην μας τὰ ὅσα εἴπομεν (εἰς τὸν ἀριθμὸν 190), ὅτι ἀλογός τις ἀριθμὸς δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἴσος μὲ ἀκριβῆ κλασματικὸν ἀριθμὸν μὴ διαφέροντα τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ, εἰμὴ κατὰ ποσότητα τόσον μικρὰν, ὥστε νὰ μὴ προξενῇ κἀνὲν ἀξιοθεώρητον σφάλμα διὰ τὴν παράβλεψίν της, καὶ τότε θεωροῦμεν τοὺς συσταθέντας λόγους μεταξὺ τῶν συμμετρικῶν ἀριθμῶν, εἰσαγομένων ἀντὶ τῶν ἀλόγων ποσοτήτων.

Ὅσον δὲ διὰ τοὺς λόγους μεταξὺ κλασματικῶν ἀκριβῶν ἀριθμῶν, μὲ εὐκολίαν γνωρίζομεν κατὰ τὸν κανόνα τῆς διαιρέσεως τῶν κλασμάτων, ὅτι δυνάμεθα νὰ ἀντεισάξωμεν δι' αὐτοὺς λόγους ἀκεραίων ἀριθμῶν.

Π. χ. ὁ λόγος τῶν $\frac{3}{7}$ πρὸς $\frac{5}{11}$ ἐπειδὴ εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τῶν $\frac{3}{7}$ διὰ $\frac{5}{11}$, εἶναι ἴσον (ἀριθμ. 59) μὲ $\frac{3}{7}\times\frac{11}{5}$ ἢ μὲ $\frac{33}{35}$, τουτέστι μὲ τὸν λόγον τοῦ 33 πρὸς 35.

Παρομοίως ὁ λόγος τῶν $\frac{7}{8}$ πρὸς $\frac{15}{23}$ εἶναι ἴσος μὲ $\frac{7}{8}\times\frac{23}{15}$ ἢ μὲ τὸν λόγον τοῦ 161 πρὸς τὸ 120. Οὕτως ὅλαι αἱ ἰδιότητες τῶν ἀναλογιῶν εἶναι ἀληθεῖς, ὁποῖοι καὶ ἂν ἦναι οἱ ἀριθμοὶ ἐπὶ τῶν ὁποίων συλλογιζόμεθα.

---

§. β. Περὶ τῆς Μεθόδου τῶν τριῶν, καὶ περὶ τῶν μεθόδων τῶν ἀπ' αὐτῆς ἐξαρτωμένων.

Περὶ τῆς Μεθόδου τῶν τριῶν.

§. 218. Εἰς τὴν ἀριθμητικὴν δίδουσι τὸ ὄνομα Μέθοδος τῶν τριῶν, εἰς τὴν πρᾶξιν, διὰ τῆς ὁποίας δοθέντων τριῶν ὅρων μιᾶς ἀναλογίας, προσδιορίζομεν τὴν τιμὴν τοῦ ἀγνώστου ὅρου. Ἐκθέσαμεν (ἀριθμ. 209) τὸν τρόπον τοῦ προσδιορίζειν τὸν τέταρτον τοῦτον ὅρον. Οὕτως διὰ νὰ λύσωμεν ζήτημά τι ἐξαρτώμενον ἐκ τῆς μεθόδου τῶν τριῶν, πρέπει νὰ σχηματίσωμεν τὴν ἀναλογίαν, τὴν ὁποίαν μᾶς δίδει ἡ ἔκφρασις τοῦ ζητήματος. Τὰ ἀκόλουθα παραδείγματα θέλουν διασαφήσει τὸ πρᾶγμα.

Πρῶτον παράδειγμα. Ζητεῖται ἡ τιμὴ 384 χιλιογράμμων μιᾶς πραγματείας, ὑποτιθεμένου, ὅτι 25 χιλιόγραμμα τῆς ἰδίας πραγματείας τιμῶνται μὲ 650$^{φρ.}$

Ἀνάλυσις τοῦ προβλήματος. Ἐπειδὴ 25$^{χιλ.}$ ἀξίζουσι 650$^{φρ.}$ εἶναι φανερὸν, ὅτι 2, 3, 4.... φοραῖς τόσα χιλιόγραμμα πρέπει νὰ ἀξίζωσι 2, 3, 4... φοραῖς περισσότερον. Οὕτως ὑπάρχει ἐξ ἀνάγκης ἀναλογία μεταξὺ τῶν δύο ἀριθμῶν τῶν χιλιογράμμων καὶ τῆς τιμῆς των.

Λοιπὸν ἐὰν σημειώσωμεν διὰ x τὴν ἄγνωστον τιμὴν τῶν 384$^{χιλ.}$, θέλομεν ἔχει τὴν ἀναλογίαν· 25$^{χιλ.}$: 384$^{χιλ.}$ :: 650$^{φρ.}$: x.

Ἐκ τῆς ὁποίας (ἀριθμ. 209) $x=\frac{384\times650}{25}=\frac{249600}{25}=9984$, τουτέστι 9984 φράγκα εἶναι ἡ τιμὴ τῶν 384 χιλιογράμμων.

Σ. Κ. Εἰς τοῦτο τὸ παράδειγμα, ἐδυνάμεθα νὰ καταστήσωμεν ἁπλουστέραν τὴν πρᾶξιν, παρατηροῦντες ὅτι οἱ δύο ἡγούμενοι τῆς ἀνωτέρω ἀναλογίας εἶναι διαιρετοὶ διὰ τοῦ 25· δυνάμεθα λοιπὸν (ἀριθμ. 211) νὰ ἐξαλείψωμεν τὸν κοινὸν τοῦτον παράγοντα, καὶ οὕτως θέλομεν ἔχει.

1 : 384 :: 26 : x, καὶ διὰ τοῦτο $x=384\times26=9984$.

Ὁσάκις παῤῥησιάζεται αὕτη ἡ εὐκολία δὲν πρέπει νὰ τὴν ἀμελῶμεν.

Δεύτερον παράδειγμα. Ἐπλήρωσέτις $743^{\lambda\acute{\iota}\beta.}$ $15^{\tau o\lambda.}$ $8^{\delta\eta\nu.}$ διὰ $43^{\acute{o}\rho.}$ $5^{\pi o\delta.}$ $4^{\delta\alpha\kappa.}$ ἑνός τινος τεχνήματος. Ζητεῖται πόσον πρέπει νὰ πληρώσῃ διὰ $77^{\acute{o}\rho.}$ $3^{\pi o\delta.}$ $8^{\delta\alpha\kappa.}$ τοῦ αὐτοῦ τεχνήματος.

Εἶναι φανερὸν, ὅτι ὑπάρχει ἀκόμη ἀναλογία μεταξὺ τῶν δύο κλασματικῶν ἀριθμῶν τῶν ὀργυιῶν, καὶ μεταξὺ τῆς τιμῆς τῶν δύο ἀριθμῶν.

Ἔστω λοιπὸν x ἡ ζητουμένη τιμή· ὅθεν ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν

$$43^{\acute{o}\rho.}\ 5^{\pi o\delta.}\ 4^{\delta\alpha\kappa.} : 77^{\acute{o}\rho.}\ 3^{\pi o\delta.}\ 8^{\delta\alpha\kappa.} :: 743^{\lambda\acute{\iota}\beta.}\ 15^{\tau o\lambda.}\ 8^{\delta\eta\nu.} : x.$$

Δυνάμεθα κατὰ τοὺς συσταθέντας κανόνας τοῦ ὑπολογισμοῦ τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν, νὰ σχηματίσωμεν τὸ γινόμενον τῶν δύο μέσων, καὶ νὰ διαιρέσωμεν τὸ γινόμενον διὰ τοῦ γνωστοῦ ἄκρου· ἀλλὰ συντέμνομεν ἐπαισθητῶς τὸν ὑπολογισμὸν, ἄγοντες τοὺς δύο πρώτους ὅρους, οἵτινες ἐκφράζουσι μονάδας τῆς ἰδίας φύσεως, εἰς τὰς ὑποδιαιρέσεις τοῦ πλέον μικροῦ εἴδους, τὸ ὁποῖον οἱ δύο ἀριθμοὶ περιέχουσι, δηλαδὴ εἰς δακτύλους, καὶ οὕτω λαμβάνομεν τὴν νέαν ἀναἀναλογίαν,

$$3160^{\delta.} : 5588^{\delta.} :: 744^{\lambda\acute{\iota}\beta.},\ 15^{\tau o\lambda.}\ 8^{\delta\eta\nu.} : x.$$

Ἢ ἐξαλείφοντες τὸν κοινὸν παράγοντα 4 τῶν δύο πρώτων ὅρων,

$$790 : 1397 :: 743^{\lambda.}\ 15^{\tau.}\ 8^{\delta.} : x.$$

Οὕτως ἔχομεν νὰ ἐκτελέσωμεν πολλασιασμὸν συμμιγοῦς ἀριθμοῦ δι' ἀκεραίου, καὶ νὰ διαιρέσωμεν τὸ προκύπτον γινόμενον δι' ἄλλου ἀκεραίου ἀριθμοῦ· ἡ ὁποία πρᾶξις εἶναι εὐκολωτέρα.

Κατὰ πρῶτον τὸ γινόμενον τῶν $743^{\lambda\acute{\iota}\beta.}$ $15^{\tau o\lambda.}$ $8^{\delta\eta\nu.}$ ἐπὶ 1397 εἶναι ἴσον μὲ $1039065^{\lambda\acute{\iota}\beta.}$ $6^{\tau o\lambda.}$ $4^{\delta\eta\nu.}$

Διαιροῦντες τοῦτο τὸ γινόμενον διὰ 790 εὑρίσκομεν τέλος πάντων πηλίκον $1315^{\lambda\iota\beta.}$ $5^{\sigma o\lambda.}$ $5^{\delta\eta\nu.}$ $\frac{326}{790}$ ἢ $\frac{163}{395}$.

Τοῦτο τὸ παράδειγμα εἶναι τὸ μόνον, τὸ ὁποῖον προτείνομεν ἐπὶ τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν, ἐπειδὴ μετὰ τὴν σύστασιν τοῦ νέου συστήματος τῶν βαρέων καὶ μέτρων, ἔχομεν νὰ θεωρήσωμεν ἀναλογίας μεταξὺ ἀκεραίων ἀριθμῶν, ἢ μεταξὺ κλασματικῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν. Ἀρκεῖ νὰ μὴ λησμονήσωμεν, ὅτι εἰς τὰ παραδείγματα τούτου τοῦ εἴδους εἶναι ἐν γένει πλέον εὔκολον νὰ ἄξωμεν τοὺς δύο πρώτους ὅρους τῆς ἀναλογίας (οἱ ὁποῖοι εἶναι πάντοτε τῆς ἰδίας φύσεως) εἰς μονάδας τῆς πλέον μικροτέρας ὑποδιαιρέσεως, τὴν ὁποίαν περιέχουν οἱ δύο ἀριθμοί.

Τρίτον παράδειγμα. Ἐχρειάσθησαν ἡμέραι 20 εἰς 135 ἀνθρώπους διὰ νὰ κάμουν μίαν τινὰ ἐργασίαν. Ζητεῖται πόσαι ἡμέραι χρειάζονται εἰς 300 ἀνθρώπους, διὰ νὰ κάμουν τὴν αὐτὴν ἐργασίαν;

Ἀνάλυσις. Ἐὰν ἀριθμός τις ἀνθρώπων χρειάζεται 20 ἡμέρας διὰ νὰ κάμῃ ἓν ἔργον, εἶναι φανερὸν, ὅτι εἷς ἀριθμὸς ἀνθρώπων 2, 3, 4 . . . φοραῖς μεγαλήτερος, πρέπει νὰ δαπανήσῃ 2, 3, 4 . . . φοραῖς ὀλιγώτερον καιρὸν, θεωρουμένων ὅλων τῶν ἄλλων ἐξ ἴσου. Λοιπὸν τόσαις φοραῖς ὁ πρῶτος ἀριθμὸς τῶν 135 ἀνθρώπων περιέχεται εἰς τὸν δεύτερον 300, ὅσαις φοραῖς ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀναγκαίων ἡμερῶν εἰς τὸν δεύτερον ἀριθμὸν τῶν ἀνθρώπων, τουτέστιν ὁ ζητούμενος x θέλει περιέχεται εἰς τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀναγκαίων ἡμερῶν εἰς τὸν πρῶτον ἀριθμὸν τῶν ἀνθρώπων.

Οὕτως ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν. $135^{\grave{\alpha}\nu\vartheta.} : 300^{\grave{\alpha}\nu\vartheta.} :: x^{\acute{\eta}\mu.} : 20^{\acute{\eta}\mu.}$

Καὶ θέτοντες τὰ μέσα εἰς τὴν θέσιν τῶν ἄκρων, διὰ νὰ ἔχωμεν τὸ χ τελευταῖον ὅρον 300 : 135 : : 20 : χ. ἐκ τῆς ὁποίας συνάγομεν $\chi = \frac{135\times20}{300} = \frac{2700}{300} = 9^{\text{ἡμ.}}$ (δυνάμεθα νὰ ἐξαλείψωμεν ἀπὸ τὴν ἀναλογίαν $1^{\text{ον.}}$ τὸν κοινὸν παράγοντα τῶν δύο πρώτων ὅρων, ὅστις εἶναι τὸ 15· $2^{\text{ον.}}$ τὸν κοινὸν παράγοντα 20 τῶν δύο ἡγουμένων, ὥστε συνάγομεν τὴν ἀναλογίαν 1 : 9 : : 1 : χ ἢ χ=9).

§. 219. Παρατήρησις περὶ τῶν εὐθέων καὶ ἀντιπεπονθότων λόγων.

Ἐδῶ πρέπει νὰ διατρίψωσι πολὺ οἱ ἀρχάριοι, διὰ νὰ καταλάβουν ὀνομασίας τινὰς, τὰς ὁποίας οἱ Μαθηματικοὶ μεταχειρίζονται πολλάκις.

Ἐν γένει, τὰ ζητήματα τὰ ὁποῖα ἐξαρτῶνται ἀπὸ ἁπλῆν μέθοδον τῶν τριῶν, περικλείουσιν εἰς τὴν ἔκφρασίν των τέσσαρας ἀριθμοὺς, ἐκ τῶν ὁποίων οἱ δύο εἶναι ἑνὸς εἴδους, καὶ οἱ δύο ἄλλοι ἄλλου εἴδους, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ ἕνας εἶναι ὁ ἄγνωστος ἀριθμός· προσέτι ἕκαστος ὅρος τοῦ δευτέρου εἴδους συνδέεται διὰ τῆς ἐκφράσεως μὲ ἕνα τῶν ὅρων τοῦ πρώτου εἴδους.

Οὕτως εἰς τὸ ἀνωτέρω πρῶτον παράδειγμα δύο τῶν τεσσάρων ἀριθμῶν ἐκφράζουσι βάρος, ἐνῷ οἱ δύο ἄλλοι ἐκφράζουσι τὰς ἀμοιβαίας τιμὰς τοῦ βάρους. Ἡ τιμὴ τοῦ πρώτου βάρους λοιπὸν εἶναι προσκολλημένη μὲ τοῦτο τὸ βάρος, καὶ δύναται δι' αὐτὸν τὸν λόγον νὰ ὀνομασθῇ ὅρος τοῦ δευτέρου εἴδους ἀντικειμένου εἰς τὸ πρῶτον βάρος· Παρομοίως ἡ τιμὴ τοῦ δευτέρου βάρους εἶναι ὁ ὅρος τοῦ δευτέρου εἴδους, ἀντικειμένου εἰς τὸ δεύτερον βάρος.

Εἰς τὸ δεύτερον παράδειγμα, δύο τῶν τεσσάρων ἀριθμῶν ἐκφράζουσι μήκη, καὶ οἱ δύο ἄλλοι εἶναι ἀκόμη αἱ τιμαὶ τῶν μηκῶν. Ἑκάστη τῶν δύο τιμῶν καλεῖται ὅρος τοῦ δευτέρου εἴδους, ἀντικείμενος εἰς τὸ ἐκτιμώμενον μῆκος διὰ ταύτης τῆς τιμῆς.

Τέλος πάντων εἰς τὸ τρίτον παράδειγμα θεωροῦμεν δύο ἀριθμοὺς ἀνθρώπων, καὶ δύο ἀριθμοὺς ἡμερῶν, τὰς ὁποίας μετεχειρίσθη ὁ ἀριθμὸς οὗτος τῶν ἀνθρώπων διὰ νὰ κάμῃ ἓν ἔργον· ὁ δὲ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν, τὰς ὁποίας μετεχειρίσθη ὁ πρῶτος ἀριθμὸς τῶν ἀνθρώπων καλεῖται ὁ ἀντικείμενος εἰς τοῦτον τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀνθρώπων· καὶ ὁ δεύτερος ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν καλεῖται ἀντικείμενος εἰς τὸν δεύτερον ἀριθμὸν τῶν ἀνθρώπων.

Τούτου τεθέντος, λέγεται ὅτι ὑπάρχει εὐθεῖα σχέσις μεταξὺ τῶν δύο ἀριθμῶν τοῦ πρώτου εἴδους, καὶ τῶν ἀριθμῶν τοῦ δευτέρου, ἢ ὅτι οἱ δύο ἀριθμοὶ τοῦ πρώτου εἴδους εἶναι κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογοι μὲ τοὺς ἀντικειμένους των τοῦ δευτέρου, ὅταν εἷς τῶν ἀριθμῶν τοῦ πρώτου εἴδους, καὶ ὁ ἀντικείμενος τοῦ δευτέρου εἴδους μέλλουν νὰ σχηματίσωσι τοὺς δύο ἡγουμένους τῆς ἀναλογίας, ἐνῷ ὁ ἄλλος ὅρος τοῦ πρώτου εἴδους, καὶ ὁ ἀντικείμενος τοῦ δευτέρου εἴδους μέλλουν νὰ σχηματίσωσι τοὺς δύο ἑπομένους· τουτέστιν ὅταν εἷς ὅρος τοῦ πρώτου εἴδους, καὶ ὁ ἀντικείμενος τοῦ δευτέρου μέλλουν νὰ σχηματίσωσιν ἓν ἄκρον καὶ ἓν μέσον εἰς τὴν ἀναλογίαν, καὶ ὅταν ὁ ἄλλος ὅρος τοῦ πρώτου εἴδους καὶ ὁ ἀτικείμενός του, μέλλουν νὰ σχηματίσουν ἓν μέσον καὶ ἓν ἄκρον.

Ἐξ ἐναντίας θέλομεν ἔχει ἀντίπεπονθυῖαν σχέσιν μεταξὺ τῶν τεσσάρων ἀριθμῶν, ἢ οἱ δύο ὅροι τοῦ πρώτου εἴδους καλοῦνται ἀμοιβαίως ἢ ἀντιστρόφως ἀνάλογοι εἰς τοὺς ἀντικειμένους των, ὅταν εἷς τῶν ὅρων τοῦ πρώτου εἴδους καὶ ὁ ἀντικείμενός του μέλλουν νὰ σχηματίσουν τὰ δύο μέσα.

Ἐπαναλαμβάνοντες τὰς ἀναλογίας τῶν ἀνωτέρω τριῶν παραδειγμάτων, μὲ εὐκολίαν βλέπομεν, ὅτι εἰς τὰς δύο πρώτας ὑπάρχει εὐθεῖα σχέσις μεταξὺ τῶν τεσσάρων ἀριθμῶν, τουτέστι τὰ δύο βάρη ἢ τὰ δύο μήκη εἶναι κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογα μὲ τὰς δύο τιμάς. Ἀλλὰ εἰς τὴν τρίτην ὑπάρχει ἀντιπεπονθυῖα σχέσις, ἢ οἱ δύο ἀριθμοὶ τῶν ἀνθρώπων εἶναι ἀντιστρόφως ἢ ἀμοιβαίως ἀνάλογοι μὲ τοὺς δύο ἀριθμοὺς τῶν ἡμερῶν.

Ἐπομένως ἡ ἀνάλυσις ἑνὸς προβλήματος μᾶς κάμνει πάντοτε νὰ γνωρίσωμεν, ἐὰν ὑπάρχῃ εὐθεῖα ἢ ἀντιπεπονθυῖα σχέσις· ἀρκεῖ νὰ ἠξεύρωμεν, ἐὰν ἑνὸς μεγέθους τοῦ πρώτου εἴδους αὐξανομένου ἢ ἐλαττουμένου, τὸ ἀντικείμενόν του αὐξάνει ἢ ἐλαττοῦται, ἢ ἐὰν ἐξ ἐναντίας ἑνὸς μεγέθους τοῦ πρώτου εἴδους αὐξανομένου ἢ ἐλαττουμένου, τὸ ἀντικείμενόν του πρέπει νὰ ἐλαττοῦται ἢ νὰ αὐξάνεται.

Εἰς τὴν πρώτην περίστασιν ἔχομεν εὐθεῖαν σχέσιν, ἢ οἱ δύο ἀριθμοὶ τοῦ πρώτου εἴδους εἶναι κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογοι εἰς τοὺς ἀντικειμένους των.

Εἰς τὴν δευτέραν ἔχομεν ἀντιπεπονθυῖαν σχέσιν, τουτέστιν οἱ δύο ἀριθμοὶ τοῦ πρώτου εἴδους εἶναι ἀμοιβαίως ἀνάλογοι εἰς τοὺς ἀντικειμένους των. Λέγεται προσέτι εἰς τὴν πρώτην περίστασιν, ὅτι ἕκαστον μέγεθος τοῦ πρώτου εἴδους εἶναι εἰς εὐθὺν λόγον τοῦ ἀντικειμένου του, καὶ εἰς τὴν δευτέραν, ὅτι εἶναι εἰς ἀντιπεπονθότα λόγον τοῦ ἀντικειμένου του.

Π. χ. Ἡ τιμὴ μιᾶς πραγματείας εἶναι εἰς εὐθὺν λόγον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μονάδων ταύτης τῆς πραγματείας, ἐπειδὴ ὅσας περισσοτέρας μονάδας ἔχει αὔτη ἡ πραγματεία, τόσον περισσότερον πρέπει νὰ πληρώσωμεν διὰ τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων της· ἐξ ἐναντίας ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀναγκαίων ἡμερῶν εἰς ἀριθμόν τινὰ ἀνθρώπων διὰ νὰ κάμωσιν ἓν ἔργον, εἶναι εἰς ἀντιπεπονθότα λόγον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἀνθρώπων, ἐπειδὴ ὅσον περισσότεροι ἄνθρωποι κάμνουσι τὸ αὐτὸ ἔργον, τόσον ὀλιγώτεραι ἡμέραι χρειάζονται.

§. 220. Αὐτὰς τὰς διαφόρους φράσεις συχνὰ μεταχειρίζονται οἱ Μαθηματικοί· οὕτως ὁμιλοῦντες διὰ δύο κλάσματα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, λέγουσιν, ὅτι αὐτὰ εἶναι εἰς εὐθὺν λόγον τῶν ἀριθμητῶν των· καὶ δύο κλάσματα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὸν αὐτὸν ἀριθμητὴν, εἶναι εἰς ἀντιπεπονθότα λόγον τῶν παρονομαστῶν των.

Διὰ νὰ ἐξηγήσωμεν ταύτας τὰς δύο ἐκφράσεις, ἂς θεωρήσωμεν κατὰ πρῶτον τὰ δύο κλάσματα $\frac{7}{12}$, $\frac{11}{12}$, τὰ ὁποῖα ἔχουσι τὸν αὐτὸν παρονομαστήν.

Ἔχομεν φανερὰ τὴν ἀναλογίαν $\frac{7}{12} : \frac{11}{12} :: 7 : 11$, εἰς τὴν ὁποίαν ὁ δεύτερος λόγος εἶναι ὁ πρῶτος, τοῦ ὁποίου οἱ δύο ὅροι ἐπολλαπλασιάσθησαν ἐπὶ 12.

Ἤδη τὸ κλάσμα $\frac{7}{12}$ καὶ ὁ ἀριθμητὴς 7, ὅς τις εἰς αὐτὸ ἀνταποκρίνεται, σχηματίζουσι τοὺς δύο ἡγουμένους, ἐνῷ τὸ κλάσμα $\frac{11}{12}$, καὶ ὁ ἀριθμητὴς 11 ὁ εἰς αὐτὸ ἀνταποκρινόμενος σχηματίζουσι τοὺς δύο ἑπομένους· οὕτως τὰ δύο κλάσματα εἶναι κατ' εὐθὺν λόγον ἀνάλογα τοῦ ἀριθμητοῦ των.

Ἔστωσαν τώρα τὰ κλάσματα $\frac{15}{23}$, $\frac{15}{36}$, τὰ ὁποῖα ἔχουσι τὸν αὐτὸν ἀριθμητήν. Ἔχομεν κατὰ πρω-τον τὴν ἀναλογίαν $\frac{15}{23} : \frac{15}{36} :: \frac{1}{23} : \frac{1}{36}$, εἰς τὴν ὁποίαν ὁ δεύτερος λόγος εἶναι ὁ πρῶτος, τοῦ ὁποίου οἱ δύο ὅροι ἐδιαιρέθησαν διὰ τοῦ 15.

Ἀλλ' ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δύο ὅρους τοῦ δευτέρου λόγου ταύτης τῆς ἀναλογίας ἐπὶ 23×36, εὑρίσκομεν μετὰ τὴν ἀναγωγὴν

$$\frac{15}{23} : \frac{15}{36} :: 36 : 23.$$

Ἤδη τὸ πρῶτον κλάσμα $\frac{15}{23}$ καὶ ὁ παρονομαστής του 23 σχηματίζουν τὰ ἄκρα μιᾶς ἀναλογίας, τῆς ὁποίας τὸ δεύτερον κλάσμα $\frac{15}{36}$ καὶ ὁ παρονομαστὴς 36 σχηματίζουν τὰ μέσα, καὶ διὰ τοῦτο τὰ δύο κλάσματα εἶναι ἀμοιβαίως ἀνάλογα εἰς τοὺς παρονομαστάς των, ἢ αὐτὰ εἶναι εἰς ἀντιπεπονθότα λόγον τῶν παρονομαστῶν των.

Εἴδομεν ἀκόμη (ἀριθμ. 42), ὅτι τὸ κλάσμα εἶναι τόσον μεγαλήτερον, ὅσον ὁ ἀριθμητής του εἶναι μεγαλήτερος, τοῦ παρονομαστοῦ μένοντος πάντοτε τοῦ αὐτοῦ· καὶ ὅτι ἐξ ἐναντίας αὐτὸ εἶναι τόσον μικρότερον, ὅσον ὁ παρονομαστής του εἶναι μεγαλήτερος, τοῦ ἀριθμητοῦ μένοντος πάντοτε τοῦ αὐτοῦ.

Ἐστοχάσθημεν καλὸν νὰ ἐκτανθῶμεν ὀλίγον περισσότερον εἰς ταύτας τὰς ἀρχάς, ἐπειδὴ ἐπαρατηρήσαμεν, ὅτι ἡ νεολαία διὰ τὴν ἄγνοιαν αὐτῶν ἀπατᾶται συχνὰ εἰς τὴν λύσιν τῶν ζητημάτων, ὅσα ἀποβλέπουν τὰς ἀναλογίας.

§. 221. Εἶναι συνήθεια, ὅταν θέλωμεν νὰ λύσωμεν κἀνὲν ζήτημα ἐξαρτώμενον ἐκ τῆς μεθόδου τῶν τριῶν, νὰ βάλλωμεν εἰς τὸν τελευταῖον ὅρον τῆς ἀναλογίας τὸν ἄγνωστον ὅρον.

Διὰ νὰ γίνῃ πλήρης αὕτη ἡ συνθήκη ἀρχίζομεν νὰ γράφωμεν τὸν λόγον τῶν δύο ὅρων τοῦ εἴδους, ὁ εἷς τῶν ὁποίων παριστάνει τὴν ἄγνωστον· μετὰ ταῦτα ἀφ' οὗ γνωρίσωμεν διὰ τῆς ἀναλύσεως τοῦ προβλήματος, ἂν ἡ σχέσις μεταξὺ τῶν τεσσάρων ἀριθμῶν εἶναι εὐθεῖα ἢ ἀντιπεπονθυῖα, θέτομεν τὸν ἄλλον λόγον εἰς τὰ ἀριστερὰ τούτου, εἰς τρόπον ὥστε ὁ ὅρος τοῦ ὁποίου τὸ x εἶναι ὁ ἀντικείμενος, νὰ εἶναι ὁ πρῶτος μεταῖος, ἢ ὁ πρῶτος τῶν ἄκρων, καθὼς ἡ σχέσις εἶναι εὐθεῖα ἢ πλαγία (ὅρα ἀριθμ. 219).

Τέταρτον παράδειγμα. Ὑποθέτομεν, ὅτι 45 ἐργάται ἔκαμαν 280 μέτρα οἰκοδομῆς, καὶ ζητεῖται πόσον 76 ἐργάται θέλουν κάμει ἀπὸ τὸ αὐτὸ ἔργον εἰς τὸν αὐτὸν καιρόν.

Ἔστω x ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν μέτρων. Γράφομεν κατὰ πρῶτον τὸν λόγον $280 : x$· μετὰ ταῦτα παρατηροῦμεν, ὅτι ὅσον περισσότεροι ἄνθρωποι εἶναι, τόσον περισσότερον ἔργον κάμνουσιν. Ἡ σχέσις λοιπὸν εἶναι εὐθεῖα· λοιπὸν ἐπειδὴ x εἶναι ἑπόμενος ἢ ἄκρος, ὁ ἀντικείμενος τοῦ 76 πρέπει νὰ ἦναι ὁ πρῶτος ἑπόμενος, ἢ τὸ πρῶτον ἄκρον, καὶ οὕτως, ἔχομεν· $45 : 76 :: 280 : x$, ἐκ τῆς ὁποίας ἔχομεν

$$x = \frac{280 \times 76}{45} = 472^{\text{μέτ.}},\ 89,\ \text{μεῖον}\ 0{,}01.$$

Πέμπτον παράδειγμα. Δι' ἀποσκευὴν πλοίου εὑρίσκονται μόνον 20 ἡμερῶν ζωοτροφίαι, ἐν ᾧ πρέπει τὸ πλοῖον νὰ μείνῃ εἰς τὴν θάλασσαν 35 ἡμέρας. Ζητεῖται πόσον πρέπει νὰ ὀλιγοστευθῇ τὸ σιτηρέσιον ἑκάστου ἀνθρώπου τὴν ἡμέραν.

Ἀνάλυσις. Ἔστω 1 τὸ σιτηρέσιον ἑκάστου ἀνθρώπου, καὶ x ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ τοῦ δο-