ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ.

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ.

Εἰσαγωγή.

§. 1. Καλεῖται μέγεθος ἢ ποσότης πᾶν ὅ,τι ναι δεκτικὸν αὐξήσεως ἢ ἐλαττώσεως, ὡς αἱ γραμαὶ, αἱ ἐπιφάνειαι, οἱ χρόνοι καὶ τὰ βάρη. Ἀδύναον δὲ εἶναι νὰ σχηματίσωμεν τελείαν ἰδέαν εἰς τὸν αυτόν μας περὶ ποσότητος τινὸς, ἐὰν δὲν τὴν συγρίνωμεν πρὸς ἄλλην τοῦ αὐτοῦ εἴδους. Ἡ δευτέρα η ποσότης καλεῖται μονὰς, καθ' ὅσον χρησιμεύει ς ὅρος συγκρίσεως ὅλων τῶν ποσοτήτων τοῦ ἰδίου δους· καθὼς, ὅταν λέγωμεν, ὅτι ἓν τεῖχος ἔχει κοσι μέτρων μῆκος, ἔχομεν τότε τὴν ἰδέαν τῆς μοάδος τοῦ μήκους, ἡ ὁποία καλεῖται μέτρον, ἔνθα ποθέτομεν, ὅτι, ἀφ' οὗ ἐφέραμεν εἴκοσι φοραῖς τὸ έτρον ἐπὶ τοῦ μήκους τοῦ τείχους, ἐφθάσαμεν εἰς ὸν σκοπόν μας.

Εἰς τὴν Μαθηματικὴν λοιπὸν ἡ μονὰς εἶναι ποσότης ὁποιουδήποτε εἴδους, λαμβανομένη κατὰ ἀρέσκειαν ἀπὸ τὴν φύσιν *), καὶ χρισιμεύει ὡς ὅρος συγκρίσεως εἰς ὅλας τὰς ποσότητας τοῦ ἰδίου εἴδους. Ἕπεται ἐκ τούτου, ὅτι εἶναι τόσα εἴδη μονάδων, ὅσα εἶναι εἴδη ποσοτήτων.

Καλεῖται Ἀριθμὸς τὸ ἐξαγόμενον τῆς συγκρίσεως ὁποιασδήποτε ποσότητος σχετικῶς πρὸς τὴν μονάδα της.

Ὁ ἀριθμὸς καλεῖται ἀκέραιος ἢ ὁλοσχερὴς **), ὅταν εἶναι ἄθροισμα πολλῶν μονάδων τοῦ ἰδίου εἴδους· οὕτως εἴκοσι φράγκα, τριάκοντα λίτραι, ὀκτὼ, δώδεκα, δεκαπέντε μονάδες ὁποιουδήποτε εἴδους εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός.

Κλάσμα εἶναι μέρος μονάδος.

Ἀριθμὸς κλασματικὸς εἶναι τὸ ἄθροισμα πολλῶν μονάδων τοῦ αὐτοῦ εἴδους, καὶ κλάσματός τινὸς, ἢ μέρους τῆς τοιαύτης μονάδος.

§. 2. Ὅταν ἐκφράζοντες ἀριθμόν τινα, προσθέτωμεν μετὰ τὴν τοιαύτην ἔκφρασιν τὸ ὄνομα, τὸ ὁποῖον φανερόνει τὸ εἶδος τῆς ποσότητος λαμβανομένης ὡς μονάδος, ὁ ἀριθμὸς καλεῖται συγκεκριμένος· καθὼς πέντε μέτρα, δεκαπέντε ὧραι, ἓξ λέγαι, εἶναι ἀριθμοὶ συγκεκριμένοι· κατὰ πρῶτον ὅταν ἐκφράζωμεν ἀριθμὸν τινὰ, ἄλλην ἰδέαν δὲν λαμβάνομεν παρὰ ἐκείνην τῆς μονάδος, μὲ τὴν ὁποίαν συγκρίνομεν ἄλλην τινὰ ποσότητα τοῦ ἰδίου εἴδους· ἀλλὰ κατ' ὀλίγον ὁ νοῦς συνειθίζων εἰς τὰ ἀφῃρημένα φθά-

*) Τὸ μέτρον, νέα μονὰς τοῦ μήκους, εἶναι μονὰς ληφθεῖσα ἀπὸ τὴν φύσιν· ὅρα ἀρ. 99.

**) Ἐπροτίμησα τὴν λέξιν «ἀκέραιος» ὡς κοινὴν καὶ συνήθη εἰς τὴν γλῶσσάν μας· ὁ Μ.

νει νὰ φαντασθῇ μίαν συλλογὴν πολλῶν ὁμοίων ὑποκειμένων, ἀλλ' ὁποιωνδήποτε, ἕκαστον τῶν ὁποίων εἶναι ἡ μονάς. Εἰς ταύτην τὴν περίστασιν ἡ συλλογὴ καλεῖται ἀριθμὸς ἀφῃρημένος, ἐπειδὴ ἐκφράζοντές την, κάμνομεν ἀφαίρεσιν τοῦ εἴδους τῆς μονάδος, εἰς τὴν ὁποίαν τὴν ἀνεφέραμεν. Καὶ οὕτω πρέπει νὰ θεωρῶμεν τοὺς ἀριθμοὺς εἰς τὴν ἔκθεσιν τῶν μεθόδων, ὅσαι ἀποβλέπουν τὰς διαφόρους ἐργασίας, τὰς ὁποίας μέλλομεν ἐπάνω εἰς αὐτοὺς νὰ ἐκτελέσωμεν, ἐὰν θέλωμεν νὰ ἦναι σταθεραὶ αὗται αἱ μέθοδοι, καὶ ἱκαναὶ νὰ ἐφαρμόζωνται εἰς ὅλα τὰ δυνατὰ ζητήματα.

Περὶ τῆς Ἀριθμήσεως.

§. 8. Αἱ πρῶται ἀναζητήσεις ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν ἐξ ἀνάγκης σκοπὸν εἶχαν νὰ δώσωσιν εἰς αὐτοὺς ὀνόματα εὐκολοενθυμητα, καὶ ἐπειδὴ ὑπάρχουν ἄπειροι ἀριθμοὶ, διότι εἰς ὁποῖονδήποτε σχηματισμένον ἀριθμὸν εἶναι δυνατὸν νὰ προστεθῇ νέα τις μονὰς καὶ νὰ σχηματισθῇ οὕτως ἄλλος ἀριθμὸς, εἰς τὸν ὁποῖον πάλιν ἠμπορεῖ νὰ προστεθῇ ἄλλη τις μονὰς, καὶ οὕτως ἐφεξῆς, ἐχρειάσθη νὰ εὑρεθῇ τὸ μέσον τοῦ ἐκφράζειν ὅλους τοὺς ἀριθμοὺς δι' ἀριθμοῦ λέξεων πεπερασμένου, αἱ ὁποῖαι ἁρμοδίως ἡ μία μὲ τὴν ἄλλην νὰ συμπλέκωνται, καὶ εἰς τοῦτο ἀφορᾷ ἡ λαλουμένη ἀρίθμησις.

Καὶ πρὸς ἀποφυγὴν τῆς διὰ πολλῶν γραμμάτων γραφῆς καθε λέξεως, ἐχρειάσθη νὰ ἐφευρεθῇ σύντομος γραφὴ τῶν λέξεων καὶ τῶν συμπλοκῶν των, ὥστε ὁ νοῦς μὲ πλειοτέραν εὐκολίαν καὶ ἐλευθερίαν νὰ συλλογίζηται ἐπάνω εἰς τοὺς ἀριθμούς. Εἰς τοῦτο δὲ ἀφορᾷ ἡ γραφομένη ἀρίθμησις, ἥτις συνίσταται εἰς τὸ νὰ παρασταίνῃ μὲ τὴν βοήθειαν πεπερασμένου ἀριθμοῦ χαρακτήρων ἢ ψηφίων τοὺς εἰς τὴν κοινὴν διάλεκτον ἐκφραζομένους ἀριθμούς.

§. 4. Λαλουμένη ἀρίθμησις. — Μ' ὅλον ὅτι ἡ ὀνοματολογία τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν εἶναι γνωστὴ εἰς τοὺς περισσοτέρους νέους, διὰ τοὺς ὁποίους τὰ στοιχεῖα ταῦτα ἐγράφησαν, στοχαζόμεθα ὅμως χρέος μας νὰ ἐκθέσωμεν σύντομον μὲν, πλὴν ἔλλογον ἀνάλυσιν αὐτῆς, ἐπειδὴ ἡ γραφομένη ἀρίθμησις, τοιαύτη, ὁποίαν ὅλοι οἱ τόποι τὴν παρεδέχθησαν, ἐπιστηρίζεται εἰς ταύτην τὴν ὀνοματολογίαν.

Οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ εἶναι ἕν, δύο, τρία, τέσσαρα, πέντε, ἕξ, ἑπτὰ, ὀκτὼ, ἐννέα, οἱ ὁποῖοι καλοῦνται ἁπλαῖ μονάδες, ἢ μονάδες πρώτης τάξεως.

Προσθέτοντες νέαν τινὰ μονάδα εἰς τὸν ἀριθμὸν ἐννέα, σχηματίζομεν τὸν ἀριθμὸν δέκα, ὅς τις θεωρεῖται ὡς μονὰς νέου εἴδους, τὸ ὁποῖον καλεῖται δεκὰς ἢ μονὰς δευτέρας τάξεως· ἀριθμοῦμεν δὲ κατὰ δεκάδας, ὡς ἠριθμήσαμεν κατὰ μονάδας ἁπλᾶς· δηλαδὴ μία δεκὰς, δύο δεκάδες, τρεῖς δεκάδες, τέσσαρες δεκάδες, πέντε, ἕξ, ἑπτὰ, ὀκτὼ, ἐννέα δεκάδες, ἢ δέκα, εἴκοσι, τριάκοντα, τεσσαράκοντα, πεντήκοντα, ἑξήκοντα, ἑβδομήκοντα, ὀγδοήκοντα, ἐννενήκοντα· μεταξὺ δὲ τῶν δέκα καὶ εἴκοσιν ὑπάρχουν ἐννέα ἄλλοι ἀριθμοὶ, οἵτινες εἶναι ἕνδεκα, δώδεκα, δεκατρία, δεκατέσσαρα, δεκαπέντε, δεκαέξ, δεκαεπτὰ, δεκαοκτὼ. δεκαεννέα.

Μεταξὺ εἴκοσι καὶ τριάκοντα ὑπάρχουν παρομοίως ἐννέα ἀριθμοὶ ἐκφραζόμενοι κατὰ τοῦτον τὸν τρόπον· εἰκοσιὲν, εἰκοσιδύο, εἰκοσιτρία, εἰκοσιτέσσαρα . . . . . . εἰκοσιεννέα. Ἠμποροῦμεν οὕτω νὰ ἐκφράσωμεν ὅλους τοὺς ἀριθμοὺς ἕως εἰς τοὺς ἐννενήκοντα ἐννέα.

Οὗτος ὁ τελευταῖος ἀριθμὸς αὐξανόμενος ἀπὸ ἓν δίδει δέκα δεκάδας, ἢ τὸν ἀριθμὸν 100· ὁ ὁποῖος θεωρεῖται ὡς νέα μονὰς, καλουμένη ἑκατοντὰς, ἢ μονὰς τρίτης τάξεως. Ἀριθμοῦμεν δὲ κατὰ ἑκατοντάδας ὡς ἠριθμήσαμεν κατὰ δεκάδας καὶ ἁπλᾶς μονάδας· οὕτω μία ἑκατοντὰς, δύο ἑκατοντάδες, τρεῖς ἑκατοντάδες . . . . . ὀκτὼ ἑκατοντάδες, ἐννέα ἑκατοντάδες ἐκφράζουν συλλογὰς μιᾶς ἑκατοντάδος, δύο, τριῶν . . . . ὀκτὼ, ἐννέα ἑκατοντάδων· καὶ θέτοντες διαδοχικῶς μεταξὺ τῶν λέξεων ἑκατὸν καὶ διακόσια, διακόσια καὶ τριακόσια . . . . . ὀκτακόσια καὶ ἐννεακόσια, καὶ εἰς τὴν ἐξακολούθησιν τῶν ἐννεακοσίων τὰ ὀνόματα τῶν ἀριθμῶν τῶν περιεχομένων μεταξὺ τοῦ ἑνὸς καὶ τῶν ἐννενήκοντα ἐννέα, σχηματίζομεν ὅλα τὰ ὀνόματα ὅλων τῶν ἀριθμῶν ἀπὸ ἑκατὸν ἕως ἐννεακόσια ἐννενήκοντα ἐννέα.

Παρατηρεῖται, ὅτι εἰς τὴν ἔκφρασιν ὅλων τούτων τῶν ἀριθμῶν μετεχειρίσθημεν τὰς γενικὰς λέξεις ἓν, δύο, τρία, τέσσαρα, πέντε, ἓξ, ἑπτὰ, ὀκτὼ, ἐννέα, δέκα, εἴκοσι, τριάκοντα, τεσσαράκοντα, πεντήκοντα, ἑξήκοντα, ἑβδομήκοντα, ὀγδοήκοντα, ἐννενήκοντα καὶ ἑκατόν.

Προσθέτοντες ἓν εἰς τὰ ἐννεακόσια ἐννενήκοντα ἐννέα λαμβάνομεν ἄλλην συλλογὴν ἀπὸ δέκα ἑκατοντάδας, ἢ τὸν ἀριθμὸν χίλια, ὅς τις σχηματίζει τὴν μονάδα τῶν χιλιάδων, ἢ τὴν μονάδα τῆς τετάρτης τάξεως. Ἀφ' οὗ δὲ ἔφθασαν εἰς τοῦτον τὸν ἀριθμὸν, ἐσυμφώνησαν, διὰ νὰ μὴ πολλαπλασιάζωσι τὰς λέξεις, νὰ θεωρήσωσι τὰ χίλια, ὡς νέαν ἀρχικὴν μονάδα, πρὸ τοῦ ὀνόματος τῆς ὁποίας ἐτέθησαν τὰ ὀνόματα τῶν ἐννεακοσίων ἐννενήκοντα ἐννέα πρώτων ἀριθμῶν. Οὕτω λέγομεν μία χιλιὰς, δύο χιλιάδες . . . . . ἐννέα χιλιάδες, δέκα χιλιάδες, ἕνδεκα χιλιάδες . . . . εἴκοσι χιλιάδες, εἰκοσιμία χιλιάς . . . . . . ἑκατὸν χιλιάδες, διακόσιαι χιλιάδες, ἐννεακόσιαι ἐννενήκοντα ἐννέα χιλιάδες.

Προσέτι μία δεκὰς χιλιάδος σχηματίζει τὴν μονάδα τῆς πέμπτης τάξεως· μία δὲ ἑκατοντὰς χιλιάδος τὴν μονάδα τῆς ἕκτης τάξεως.

Τιθεμένων ἔπειτα μεταξὺ δύο ἀριθμῶν διαδοχικῶν χιλιάδων, ὡς μεταξὺ εἴκοσι χιλιάδων καὶ εἰκοσιμιᾶς χιλιάδος, τῶν ὀνομάτων ὅλων τῶν ἀριθμῶν τῶν κατωτέρων τῆς χιλιάδος, δυνάμεθα προφανῶς νὰ ἐκφράσωμεν ὅλους τοὺς ἀριθμοὺς ἕως εἰς ἐννεακοσίας ἐννενήκοντα ἐννέα χιλιάδας καὶ ἐννεακοσίας ἐννενήκοντα ἐννέα μονάδας.

Ὁ τελευταῖος οὗτος ἀριθμὸς αὐξηθεὶς ἀπὸ μονάδα δίδει δέκα ἑκατοντάδας χιλιάδος, ἢ χιλιάκις χιλίας μονάδας ἢ κατὰ τὴν συνήθειαν χίλιες χιλιάδες, συλλογὴν δηλαδὴ, τὴν ὁποίαν ὠνόμασαν μιλλιόνιον. Παρομοίως ἡ συλλογὴ ἀπὸ χίλια μιλλιόνια καλεῖται διλλιόνιον· ἡ δὲ συλλογὴ ἀπὸ χίλια διλλιόνια καλεῖται Τριλλιόνιον, καὶ οὕτως ἐφεξῆς· ἀριθμοῦμεν δὲ κατὰ μιλλιόνια, διλλιόνια, τριλλιόνια, ὡς ἠριθμήσαμεν κατὰ χίλια. Εὐκόλως λοιπὸν βλέπομεν, ὅτι προσθέτοντες εἰς τὰς προειρημένας γενικὰς λέξεις τὰς λέξεις χίλια, μιλλιόνιον, διλλιόνιον, τριλλιόνιον, τετραλλιόνιον, πενταλλιόνιον . . . . . θέλομεν σχηματίσει τὴν ὀνοματολογίαν ὅλων ὅσων δυνάμεθα νὰ φαντασθῶμεν ἀριθμῶν.

Τελευταῖον, ἂς παρατηρήσωμεν ὅτι τὸ μιλλιόνιον εἶναι ἡ μονὰς τῆς ἑβδόμης τάξεως, ἡ δεκὰς τῶν μιλλιονίων εἶναι ἡ μονὰς τῆς ὀγδόης τάξεως, καὶ ἡ ἑκατοντὰς τῶν μιλλιονίων εἶναι ἡ μονὰς τῆς ἐννάτης τάξεως . . . . .

§. 5. Γραφομένη ἀρίθμησις. — Ὅσον ἁπλῆ καὶ ἂν ἦναι ἡ ὀνοματολογία τῶν ἀριθμῶν, ἠθέλαμεν δοκιμάσει μεγάλην δυσκολίαν εἰς τὴν μεταξύ των συμπλοκὴν, ἐὰν δὲν ὑπῆρχε μέθοδός τις τοῦ γράφειν αὐτοὺς μὲ συντομίαν· ἀλλ' αὕτη εὑρίσκεται εὐκόλως ἐκ τῆς ὀνοματολογίας των. Τῷ ὄντι παρατηροῦντες τὰ ὀνόματα, μὲ τὰ ὁποῖα ὠνομάσαμεν τοὺς ἀριθμοὺς ἄλλα μὲν ὡς ἓν, δέκα, ἑκατὸν, χίλια, δέκα χιλιάδες, ἑκατὸν χιλιάδες, μιλλιόνιον, δέκα μιλλιόνια ἐκφράζουν διαφόρων τάξεων μονάδας, ἄλλα δὲ ὡς ἓν, δύο, τρία, ... ἐννέα ἐκφράζουν ποσάκις ἑκάστη τοιούτου εἴδους μονὰς εἰσέρχεται εἴς τινα ἀριθμόν.

Ὅθεν ἐὰν συμφωνήσωμεν νὰ παρασταίνωμεν τοὺς ἐννέα πρώτους ἀριθμοὺς διὰ τῶν ἀκολούθων χαρακτήρων ἢ ψηφίων

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,
ἓν,	δύο,	τρία,	τέσσαρα,	πέντε,	ἕξ,	ἑπτὰ,

8	9.
ὀκτὼ,	ἐννέα,

ἡ δυσκολία πλέον συνίσταται εἰς τὸ νὰ εὕρωμεν τὸ μέσον τοῦ νὰ ἐκφράζωμεν μὲ τοὺς χαρακτῆρας τούτους τὰς διαφόρους τάξεις τῶν μονάδων, τὰς ὁποίας ὁ προβαλλόμενος ἀριθμὸς περικλείει· ἀλλ' ἐὰν συμφωνήσωμεν νὰ συστήσωμεν ταύτην τὴν ἀρχὴν ὅτι „πᾶς χαρακτὴρ βαλμένος εἰς τὰ ἀριστερὰ ἄλλου ἐκφράζει μονάδας τάξεως ἀμέσως ὑπερτέρας αὐτοῦ", ἢ μὲ ἄλλας λέξεις, ὅτι, „ὅταν πολλοὶ χαρακτῆρες γράφωνται κατ' ἐξακολούθησιν ὁ εἷς τοῦ ἄλλου, ὁ πρῶτος μὲν εἰς τὰ δεξιὰ χαρακτὴρ ἐκφράζει ἁπλᾶς μονάδας, ὁ ἀμέσως δὲ εἰς τὰ ἀριστερὰ αὐτοῦ μονάδας δεκάδων, ἢ ἁπλῶς δεκάδας, καὶ ὁ ἐκ δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερὰ ἑκατοντάδας, ὁ τέταρτος χιλιάδας, ὁ πέμπτος δεκάδας χιλιάδος . . . . εὐκόλως βλέπομεν, ὅτι δυνάμεθα ἐν γένει νὰ παρασταίνωμεν ὅλους τοὺς ἀριθμοὺς μὲ τὴν βοήθειαν τῶν προηγουμένων χαρακτήρων.

Παραδείγματος χάριν. Ἂς ἐκφρασθῇ μὲ χαρακτῆρας ἢ μὲ ψηφία ὁ ἀριθμὸς τριακόσια ἑβδομήκοντα ἐννέα· οὗτος σύγκειται φανερὰ ἀπὸ 9 μονάδας, πλέον ἑπτὰ δεκάδας, πλέον τρεῖς ἑκατοντάδας· ὅθεν κατὰ τὴν προσυσταθεῖσαν ἀρχὴν δύναται νὰ ἐκφρασθῇ διὰ 379.

Παρομοίως ὁ ἀριθμὸς εἰκοσιοκτὼ χιλιάδες διακόσια τεσσαράκοντα ἑπτὰ, σύγκειται ἀπὸ 7 μονάδας, 4 δεκάδας, 2 ἑκατοντάδας, 8 χιλιάδας, καὶ 2 δεκάδας χιλιάδος, ὅθεν παρασταίνεται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν πέντε χαρακτήρων 28247.

Χαρακτὴρ 0. Ἀλλ' ὅμως ὑπάρχουσι καὶ ἀριθμοὶ, οἵτινες δὲν γράφονται μὲ μόνα τὰ προηγούμενα ἐννέα ψηφία.

Ἂς γράψωμεν μὲ ψηφία τοὺς ἀριθμοὺς, δέκα, εἴκοσι, τριάκοντα, ... ὀγδοήκοντα, ἐννενήκοντα. Ἐπειδὴ οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι δὲν περιέχουν ἁπλᾶς μονάδας, εἶναι ἀνάγκη νὰ παραδεχθῶμεν ἓν ἄλλο ψηφίον, μὴ ἔχον μὲν καθ' ἑαυτὸ κἀμμίαν τιμὴν, ἀλλὰ δυνάμενον νὰ ἐπέχῃ τὴν θέσιν τῆς εἰς τὴν ἔκφρασιν τοῦ ἀριθμοῦ ἐλλειπούσης τάξεως τῶν μονάδων· τὸ ψηφίον τοῦτο εἶναι τὸ 0, τὸ ὁποῖον καλεῖται μηδὲν ἢ μηδενικὸν, καὶ μὲ τὸ ὁποῖον οἱ ἀριθμοὶ δέκα, εἴκοσι· τριάκοντα, κ. τ. λ. . . . ἐκφράζονται διὰ

10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90.

Κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον, οἱ ἀριθμοὶ ἑκατὸν, διακόσια, τριακόσια, μὴ περικλείοντες οὔτ' ἁπλᾶς μονάδας, οὔτε δεκάδας, ἐκφράζονται διὰ 100, 200, 300, 400, ... 900.

Ἐν γένει τὸ μηδὲν εἶναι ψηφίον, τὸ ὁποῖον δὲν ἔχει κἀμμίαν τιμὴν μερικὴν, ἀλλὰ τὸ μεταχειριζόμεθα εἰς τόπον τῶν διαφόρων τάξεων τῶν μονάδων, αἱ ὁποῖαι λείπουν εἰς τὴν ἔκφρασιν τινὸς ἀριθμοῦ.

Τ' ἄλλα δὲ ψηφία τὰ καλούμενα σημαντικὰ, ἔχουν δύο τιμάς· μίαν ἀπόλυτον εἴτε ἰδίαν, ἥτις τίποτ' ἄλλο δὲν εἶναι εἰμὴ ἡ τιμὴ, τὴν ὁποίαν ἔχει καθὲν ψηφίον ἰδικήν του, ὅταν θεωρῆται μόνον του, καὶ ἄλλην καλουμένην σχετικὴν, ἥτις εἶναι ἡ τιμὴ, τὴν ὁποίαν λαμβάνει ἐκ τῆς θέσεως, τὴν ὁποίαν κρατεῖ πρὸς τ' ἀριστερὰ τῶν ἄλλων ψηφίων.

Ἤδη ἐὰν παρατηρήσωμεν, ὅτι καθεῖς ἐκφρασμένος ἀριθμὸς συντίθεται ἐξ ἁπλῶν μονάδων, δεκάδων, ἑκατοντάδων . . . ὅτι ἡ συλλογὴ τῶν μονάδων ἑκάστης τάξεως εἶναι ὅλη τὸ περισσότερον ἴση μὲ ἐννέα, ὅτι ὅταν ὁ ἀριθμὸς στερῆται ἀπὸ τινὰς τάξεις μονάδων, ὑπάρχει τις χαρακτὴρ ἐπέχων τὴν θέσιν αὐτοῦ, βεβαιούμεθα, ὅτι δὲν εἶναι κἀνεῖς ἀκέραιος ἀριθμὸς ἀδύνατος νὰ ἐκφρασθῇ μὲ τὴν βοήθειαν μιᾶς τινος συμπλοκῆς τῶν δέκα χαρακτήρων

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.

Ἂς λάβωμεν νέον παράδειγμα τὸν ἀριθμὸν διακόσιαι ὀκτὼ χιλιάδες, δέκα ἐννέα, τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ γράψωμεν διὰ ψηφίων.

Οὗτος περιέχει 9 ἁπλᾶς μονάδας, 1 δεκάδα, 8 μονάδας χιλιάδος, καὶ δύο ἑκατοντάδας χιλιάδος· ἀλλὰ δὲν ἔχει οὔτ' ἑκατοντάδας ἁπλᾶς, οὔτε δεκάδας χιλιάδος· ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ γράψωμεν τὰ ψηφία 9, 1, 0, 8, 0, 2 ἀριστερόθεν τὸ ἓν εἰς τὸ ἄλλο, καὶ ὁ ἀριθμὸς θέλει παρασταθῆ διὰ 208019.

Ἔστω ἀκόμη ὁ ἀριθμός τριάκοντα ἓξ διλλιόνια, πεντακόσια μιλλιόνια, εἴκοσι χιλιάδες, τετρακόσια ἑπτά.

Ἡ ἔκφρασις τοῦ ἀριθμοῦ τούτου περιλαμβάνει 7 μονάδας ἁπλᾶς, 0 δεκάδας, 4 ἑκατοντάδας, 0 μονάδας χιλιάδος, 2 δεκάδας χιλιάδος, 0 ἑκατοντάδας χιλιάδος, 0 μονάδας μιλλιονίων, 0 δεκάδας μιλλιονίων, 5 ἑκατοντάδας μιλλιονίων, 6 μονάδας διλλιονίων, καὶ 3 δεκάδας διλλιονίων· λοιπὸν ὁ ἀριθμὸς θέλει παρασταθῆ διὰ 36510020407.

Τὸ σύστημα τῆς ἀριθμήσεως, τὸ ὁποῖον ἐκθέσαμεν, ὠνομάθη Σύστημα δεκαδικὸν, ἐπειδὴ μεταχειριζόμεθα δέκα χαρακτῆρας εἰς τὴν ἔκφρασιν παντὸς ἀριθμοῦ· ὁ δέκα, ἢ ὁ ἀριθμὸς τῶν δέκα μεταχειριζομένων χαρακτήρων καλεῖται βάσις τοῦ συστήματος.

§. 6. Ἂς κάμωμεν τώρα μίαν ἀναγκαίαν παρατήρησιν. Ἀποβαίνει ἐκ τῆς ὀνοματολογίας, ὅτι πᾶς ἀριθμὸς διαιρεῖται εἰς ἑκατοντάδας δεκάδας καὶ μονάδας ἁπλῶς· εἰς ἑκατοντάδας δεκάδας καὶ μονάδας χιλιάδος, εἰς ἑκατοντάδας, δεκάδας καὶ μονάδας μιλλιονίων κ. τ. λ. τουτέστιν εἰς τμήματα ἐκ μονάδων ἁπλῶν, χιλιάδων, μιλλιονίων, διλλιονίων, ἕκαστον τῶν ὁποίων γράφεται διὰ τριῶν ψηφίων, ἐξῃρημένου τοῦ τελευταίου, τὸ ὁποῖον περιέχει ἀνωτέρας μονάδας, καὶ τὸ ὁποῖον δύναται νὰ μὴ περιέχῃ παρὰ δύο ψηφία ἢ μόνον ἕν. Ὅταν λοιπὸν οἰκειωθῶμεν μὲ τὸν τρόπον τοῦ γράφειν τοὺς ἀριθμοὺς τριῶν ψηφίων, ἀρκεῖ νὰ γράφωμεν διαδοχικῶς τὸ εἰς τὰ ἀριστερὰ τοῦ ἄλλου, τουτέστι τὸ τμῆμα τῶν μονάδων, τὸ τῶν χιλιάδων, τὸ τῶν μιλλιονίων καὶ τὸ τῶν διλλιονίων.

Δυνάμεθα προσέτι νὰ ἀρχίσωμεν ἀπὸ τὰ ἀριστερὰ, τουτέστι νὰ γράφωμεν κατὰ πρῶτον τὸ τμῆμα τῶν ἀνωτέρων μονάδων, καὶ εἰς τὰ δεξιὰ, τὰ ἄλλα τμήματα κατὰ τάξιν τοῦ μεγέθους τῶν μονάδων· οὕτω πρέπει νὰ μάθωμεν νὰ γράφωμεν μὲ ψηφία ἀριθμόν τινα ὑπαγορευμένον εἰς τὴν συνήθη γλῶσσαν, μὴ οντα ἀκόμη γραμμένον· ἀλλὰ πρέπει νὰ προσέχωμεν νὰ μὴν παραιτῶμεν τὰ μηδενικὰ τὰ διωρισμένα εἰς τὸ νὰ καταστήσουν πλήρεις τὰς τάξεις τῶν μονάδων, αἱ ὁποῖαι λείπουν· δὲν θέλομεν δὲ δυσκολευθῆ ποτὲ εἰς τοῦτο, ἠξεύροντες, ὅτι κάθε τμῆμα, ἐξαιρουμένου τοῦ εἰς τ' ἀριστερὰ πρώτου, πρέπει πάντοτε νὰ περιέχῃ τρία ψηφία.

Ἔστω ὡς τελευταῖον παράδειγμα νὰ γράφωμεν τὸν ἀριθμὸν τετρακόσια ἓξ διλλιόνια, εἰκοσιοκτὼ μιλλιόνια, διακόσιας πεντήκοντα χιλιάδας, τεσσαράκοντα ὀκτώ.

Γράφε εἰς τὰ δεξιὰ ἀλλήλων τὸ τμῆμα τῶν διλλιονίων, τὸ τῶν μιλλιονίων, τὸ τῶν χιλιάδων, καὶ τελος, τὸ τῶν ἁπλῶν μονάδων, καὶ θέλεις ἔχει 409, 028, 250, 048.

§. 7. Ἐπὶ τῆς προηγουμένης λοιπὸν παρατηρήσεως ἐπιστηρίζεται τὸ μέσον τοῦ μεταφράζειν εἰς κοινὴν γλῶσσαν ὁποιονδήποτε μὲ ψηφία γραμμένον ἀριθμόν.

Ἀφ' οὗ, ἀρξάμενοι ἀπὸ τὰ δεξιὰ, χωρίσωμεν τὸν ἀριθμὸν εἰς τμήματα ἐκ τριῶν ψηφίων, ἐκφράζομεν διαδοχικῶς καθὲν τμῆμα, ἀρχίζοντες ἀπὸ τὸ πρῶτον εἰς τ' ἀριστερὰ, δίδοντες πάντοτε εἰς τὰ διάφορα τμήματα τὸ ἀνῆκον εἰς αὐτὰ ὄνομα.

Ἔστω πρὸς παράδειγμα ὁ ἀριθμὸς 70345601.

Οὗτος λοιπὸν ἀφ' οὗ μερισθῇ οὕτω 70,343,601 συντίθεται ἀπὸ ἑβδομήκοντα μιλλιόνια, τριακοσίας τεσσαράκοντα πέντε χιλιάδας, καὶ ἑξακοσίας μίαν μονάδας.

Εὑρίσκομεν παρομοίως ὅτι 5302400056702, ἢ 5, 302, 400, 056, 702 ἐκφράζει τὸν ἀριθμὸν πέντε τριλλιόνια, τριακόσια δύο διλλιόνια, τετρακόσια μιλλιόνια, πεντήκοντα ἓξ χιλιάδας καὶ ἑπτακοσίας δύο μονάδας.

§. 8. Ἄλλο δὲν λείπει διὰ νὰ καταστήσωμεν πλήρη τὴν θεωρίαν τῆς ἀριθμήσεως, παρὰ νὰ δείξωμεν τὸ μέσον τοῦ γράφειν διὰ ψηφίων τὰ κλάσματα· ἀλλὰ πρότερον εἶναι ἀνάγκη νὰ δώσωμεν καθαρὰν καὶ ἀκριβῆ ἰδέαν τῶν κλασμάτων, ὡς αὐτὰ θεωροῦνται εἰς τὴν Ἀριθμητικήν.

Ὑποτεθείσθω, ὅτι ἔχομεν νὰ προσδιορίσωμεν τὸ μῆκος ἑνὸς κομματίου ἀπὸ ὕφασμα. Λαμβάνοντες τὴν μονάδα καλουμένην μέτρον, καὶ φέροντες αὐτὴν μίαν, δύο φορὰς, καὶ ἐν ἑνὶ λόγῳ τόσας, ὅσας ἠμποροῦμεν, ἐπάνω εἰς τὸ μάκρος τοῦ κομματίου, παρατηροῦμεν, ὅτι ἠμποροῦν νὰ ἀκολουθήσωσι δύο περιστάσεις, ἢ ἀφ' οὗ ἡ μονὰς φερθῇ ἱκανὸν ἀριθμὸν φορῶν, δεκαπέντε φέρ' εἰπεῖν, δὲν ἀπομένει τίποτε, ἢ εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον μικρότερον τοῦ μέτρου· εἰς τὴν πρώτην περίστασιν τὸ κομμάτιον περιέχει ἀκέραιον τινὰ ἀριθμὸν μέτρων, δηλαδὴ δεκαπέντε· εἰς τὴν δευτέραν, σιμὰ εἰς ταῦτα τὰ δεκαπέντε μέτρα πρέπει διὰ νὰ ἔχωμεν τὸ ὅλον κομμάτιον νὰ προσθέσωμεν τὸ κλάσμα, ἢ τὸ μέρος τοῦ ἐναπολειφθέντος μέτρου. Ἀλλὰ πῶς νὰ ἐκτιμήσωμεν τὸ μέρος τοῦτο; ἢ πῶς νὰ τὸ συγκρίνωμεν μὲ τὴν μονάδα ἤγουν μὲ τὸ μέτρον; δυνάμεθα ἐξ ἀρχῆς νὰ ἐννοήσωμεν ταύτην τὴν μονάδα χωρισμένην εἰς δύο ἴσα μέρη, ἢ εἰς δύο ἡμίσεα, καὶ ἂν τὸ ὑπόλοιπον εἶναι κατ' ἀκρίβειαν ἴσον μὲ ἓν ἀπὸ ταῦτα τὰ ἡμίσεα, τότε λέγομεν, ὅτι τὸ κομμάτιον τοῦ ὑφάσματος περιέχει δεκαπέντε καὶ ἥμισυ μέτρα μήκους.

Ἐὰν τὸ ὑπόλοιπον ἦναι ὀλιγώτερον ἢ περισσότερον παρὰ τὸ ἥμισυ τοῦ μέτρου, κάθε ἥμισυ τοῦ μέτρου τὸ θεωροῦμεν διῃρημένον εἰς δύο νέα μέρη ἴσα καλούμενα τέταρτα· καὶ ἐὰν τὸ τέταρτον τοῦτο δύναται νὰ φερθῇ μίαν ἢ τρεῖς φορὰς ἀκριβῶς ἐπὶ τοῦ ὑπολοίπου, τότε λέγομεν, ὅτι τὸ ὑπόλοιπον εἶναι ἴσον μὲ τὸ τέταρτον ἢ μὲ τὰ τρία τέταρτα τοῦ μέτρου.

Ἀντὶ νὰ διαιρέσωμεν τὴν μοναδα εἰς δύο ἢ εἰς τέσσαρα μέρη ἴσα, δυνάμεθα νὰ τὴν θεωρήσωμεν διῃρημένην εἰς τρία ἴσα μέρη καλούμενα τρίτα, εἰς πέντε μέρη ἴσα καλούμενα πέμπτα, εἰς ἓξ καλούμενα ἕκτα κ. τ. λ. Ἂς ὑποθέσωμεν πρὸς ἀκριβῆ τοῦ πράγματος κατάληψιν, ὅτι τὸ μέτρον ἐδιαιρέθη εἰς δώδεκα μέρη ἴσα καλούμενα δωδέκατα, καὶ ὅτι τὸ δωδέκατον τοῦτο ἐφέρθη ἑπτάκις μὲ ἀκρίβειαν ἐπὶ τοῦ ὑπολοίπου· τότε λέγομεν, ὅτι τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο εἶναι ἴσον μὲ ἑπτὰ φοραῖς τὸ δωδέκατον, ἢ μὲ τὰ ἑπτὰ δωδέκατα τοῦ μέτρου· λοιπὸν τὸ κομμάτιον τοῦ ὑφάσματος περιέχει δεκαπέντε μέτρα καὶ ἑπτὰ δωδέκατα κατὰ μῆκος.

Βλέπομεν λοιπὸν, ὅτι διὰ νὰ λάβωμεν καθαρὰν ἰδέαν ἑνὸς κλάσματος ἔχοντος ὁποιουδήποτε εἴδους μονάδα, πρέπει νὰ ἐννοήσωμεν ὅτι αὐτὴ ἡ μονὰς διαιρεῖται εἰς ἀριθμὸν ἀκέραιον ἴσων μερῶν, καὶ ὅτι λαμβάνομεν ἓν, δύο, τρία, τέσσαρα κτλ. ἐκ τῶν μερῶν τούτων· τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν λαμβανομένων μερῶν συσταίνει τὸ κλάσμα· διὰ τοῦτο ἡ ἔκφρασις ἑνὸς κλάσματος περιλαμβάνει ἀναγκαίως δύο ἀριθμοὺς ἀκεραίους, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ μὲν εἷς σημειόνει εἰς πόσα μέρη ἐδιαιρέθη ἡ μονὰς καὶ καλεῖται Παρονομαστὴς, ὁ δὲ ἄλλος φανερόνει πόσα τούτων τῶν μερῶν λαμβάνονται εἰς σχηματισμὸν τοῦ κλάσματος, καὶ καλεῖται

Ἀριθμητής· λόγου χάριν, πέντε ὄγδοα τοῦ μέτρου, δεκατρία εἰκοστὰ τῆς λίτρας κ. τ. λ. εἶναι κλάσματα, εἰς τὸ πρῶτον τῶν ὁποίων καταλαμβάνομεν, ὅτι τὸ μέτρον ἐδιαιρέθη εἰς ὀκτὼ μέρη ἢ ὀκτὼ ὄγδοα, καὶ ὅτι λαμβάνομεν πέντε ἐξ αὐτῶν· τὸ ὀκτὼ εἶναι ὁ παρονομαστὴς, καὶ τὸ πέντε ὁ ἀριθμητής· εἰς δὲ τὸ δεύτερον, ἡ λίτρα θεωρεῖται διῃρημένη εἰς εἴκοσι μέρη καλούμενα εἰκοστὰ ἢ εἰκοστημόρια, ἐκ τῶν ὁποίων λαμβάνομεν δεκατρία· ὁ παρονομαστὴς εἶναι τὸ εἴκοσι, καὶ ὁ ἀριθμητὴς τὸ δεκατρία.

Ἕπεται προσέτι ἐκ τῶν προειρημένων, ὅτι τὸ κλάσμα εἶναι ποσότης ἀναφερομένη εἰς μέρος τί τῆς ἀρχικῆς μονάδος, τὸ ὁποῖον δυνάμεθα νὰ θεωρῶμεν ὡς ἓν εἶδος μερικὸν μονάδος· οὕτως ἐπειδὴ τὸ κλάσμα δεκατρία εἰκοστὰ τοῦ μέτρου, σύγκειται ἀπὸ δεκτατρεῖς φοραῖς τὸ εἰκοστὸν τοῦ μέτρου,. τὸ εἰκοστὸν τοῦτο εἶναι εἰδικήτις μονὰς, τὴν ὁποίαν τὸ δοθὲν κλάσμα περιέχει δεκατρεῖς φοραῖς. Τούτου τεθέντος, δύο κλάσματα καλοῦνται ὁμοειδῆ, ὅταν ἔχωσι τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν, φερ' εἰπεῖν πέντε δωδέκατα, ἑπτὰ δωδέκατα, ἕνδεκα δωδέκατα, εἶναι κλάσματα ὁμοειδῆ· ἀλλὰ τρία τέταρτα, καὶ δύο τρίτα εἶναι κλάσματα ἑτεροειδῆ, ἐπειδὴ ἔχουν διαφορετικὸν παρονομαστήν.

Διὰ νὰ ἐκφράσωμεν ἓν κλάσμα μὲ ψηφία, ἐσυμφωνήθη νὰ θέτωμεν τὸν ἀριθητὴν ἄνω τοῦ Παρονομαστοῦ, χωρίζοντες αὐτοὺς διὰ γραμμῆς· οὕτω τὸ κλάσμα τρία τέταρτα σημειοῦται διὰ $\frac{3}{4}$· ἑπτὰ δωδέκατα διὰ $\frac{7}{12}$· εἰκοσιτρία τριακοστὰ πέμπτα διὰ $\frac{23}{35}$.

Ἀντιστρόφως, $\frac{7}{8}$, $\frac{13}{15}$, $\frac{47}{72}$ παρασταίνουν τὰ κλάσματα έπτὰ ὄγδοα, δεκατρία δέκατα πέμπτα, τεσσαράκοντα έπτὰ ἑβδομηκοστὰ δεύτερα· τουτέστι προφέρομεν πρῶτον τὸν ἀριθμητὴν, καὶ ἔπειτα τὸν παρονομαστήν.

§. 9. Αἱ πρῶται τοῦ ἀνθρώπου χρεῖαι εἰς τὴν κοινωνίαν τὸν ὁδηγοῦν καθ' ἑκάστην νὰ ἐπιλύῃ ζητήματα, διὰ τὰ ὁποῖα ὑποχρεοῦται νὰ συμπλέκῃ δύο ἢ πλειοτέρους ἀριθμοὺς εἴτε τῆς αὐτῆς φύσεως εἴτε διαφορετικῆς. Αἱ συμπλοκαὶ αὗται συσταίνουν τὰς πράξεις τῆς ἀριθμητικῆς, ἢ τὸν ἀριθμητικὸν ὑπολογισμὸν, καὶ διὰ νὰ γνωστοποιήσωμεν τὴν γένεσιν καὶ σχέσιν των, ἐκθέτομεν τινὰ ζητήματα ἀποβλέποντα τὸ ἐμπόριον.

Πρῶτον. Ἔμπορος ὑφασμάτων ἀφ' οὗ ἐπώλησε πρῶτον 5 πήχας καὶ $\frac{2}{3}$· δεύτερον 7 καὶ $\frac{1}{2}$, καὶ τρίτον 12 καὶ $\frac{3}{4}$, ἐπιθυμεῖ νὰ γνωρίσῃ τὸν ἀριθμὸν τῆς πωλήσεως.

Πρέπει νὰ ἑνωθῶσιν εἰς ἕνα μόνον οἱ τρεῖς ἀριθμοὶ τῶν πωλημένων πηχῶν, ἢ μ' ἄλλας λέξεις πρέπει νὰ ἐκτελέσῃ τὴν πρόσθεσιν τούτων τῶν ἀπὸ ἀκεραίους ἀριθμοὺς καὶ κλάσματα συνθεμένων ἀριθμῶν. Ἐπειδὴ οἱ τρεῖς ἀριθμοὶ τῶν πηχῶν, ἐπάρθησαν ἀπὸ ἓν καὶ τὸ αὐτὸ κομμάτιον τοῦ ὑφάσματος, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος ἦτον 30 πῆχαι καὶ $\frac{2}{3}$, ζητεῖ νὰ μάθῃ πόσον πρέπει νὰ τοῦ μείνῃ ἀπὸ τὸ κομμάτιον. Θέλει ζητήσει λοιπὸν τὴν διαφορὰν μεταξὺ τοῦ ἀριθμοῦ $30\frac{2}{3}$ τοῦ ἐκφράζοντος τὸ μῆκος τοῦ κομματίου, καὶ τοῦ ὅλου ἀριθμοῦ τῶν πωλημένων πηχῶν, δηλαδὴ θέλει ὁδηγηθῇ εἰς τὴν ἀφαίρεαν τοῦ δευτέρου ἀριθμοῦ ἀπὸ τὸν πρῶτον.

Τρίτον. Ἠγόρασέ τις 48 πήχας πρὸς 25 φράγκα τὴν πήχην· ζητεῖται τὸ ἄθροισμα, τὸ ὁποῖον μέλλει νὰ πληρώσῃ διὰ τὰς 48 πήχας.

Εἶναι φανερὸν ὅτι διὰ νὰ εὕρῃ τὴν ὅλην τιμὴν, πρέπει νὰ λάβῃ 48 φοραῖς 25 φράγκα, ἢ νὰ κάμῃ ἓν ὅλον ἀπὸ 48 φοραῖς ἀριθμοὺς ἴσους μὲ τὰ 25 φράγκα. Αὕτη ἡ πρᾶξις καλεῖται πολλαπλασιασμὸς, καὶ βλέπομεν ὅτι οὗτος ἄλλο δὲν εἶναι εἰμὴ ἓν εἶδος προσθέσεως, διότι συνίσταται εἰς τὸ νὰ προστεθῇ ἀριθμός τις πολλαῖς φοραῖς εἰς τὸν ἑαυτόν του.

Ἂς ἀναλάβωμεν τὸ αὐτὸ ζήτημα ἀλλάττοντες μόνον τὰς τιμὰς τῶν ἀριθμῶν ἢ τὰ δοθέντα τοῦ ζητήματος.

Ἠγόρασέ τις $\frac{7}{12}$ πήχης πραγματείας τινὸς πρὸς $\frac{17}{20}$ τοῦ φράγκου τὴν πήχην, καὶ ζητεῖ νὰ μάθῃ τί ἔχει νὰ πληρώσῃ διὰ τὰ $\frac{7}{12}$ τῆς πήχης.

Καταλαμβάνομεν ἐδῶ, ὅτι, ἐὰν τὸ μέτρον ἀξίζῃ $\frac{17}{20}$ τοῦ φράγκου, $\frac{7}{12}$ πήχης, τὰ ὁποῖα ἐκφράζουν ἓν μέρος αὐτῆς, πρέπει νὰ ἀξίζωσιν ἓν μέρος τῶν $\frac{17}{20}$, παριστανόμενον διὰ $\frac{17}{20}$, δηλαδὴ διὰ νὰ ἀποκριθῶμεν εἰς τοῦτο πρέπει νὰ λάβωμεν τὰ $\frac{7}{12}$ τῶν $\frac{17}{20}$· ἡ τοιαύτη πρᾶξις καλεῖται ἀκόμη πολλαπλασιασμὸς κλασμάτων, ἥτις καλεῖται οὕτως, ἐπειδὴ τὸ παρὸν ζήτημα εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ἀνωτέρω, τὸ ὁποῖον μᾶς ἔφερεν εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν.

Κατὰ πρῶτον τὸ ὄνομα πολλαπλασιασμὸς, ὁμοῦ μὲ τὸν ὁποῖον εἰσέρχεται καὶ ἡ ἰδέα τῆς αὐξήσεως, δὲν φαίνεται ἐπιτήδειον εἰς τὸ νὰ φανερώσῃ καὶ μίαν ἐργασίαν συνισταμένην εἰς τὸ νὰ λάβῃ τὶς ἀφ' ἑνὸς ἀριθμοῦ ἓν μέρος σημειωμένον διά τινος κλάσματος· ἀλλ' οἱ Ἀριθμητικοὶ εὕρηκαν τὸ μέσον τοῦ νὰ συνδέωσι τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν μὲ τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν κλασμάτων λέγοντες, ὅτι τὸ νὰ πολλαπλασιάζωμεν ἀριθμόν τινα, ὁποῖος καὶ ἂν ἦναι, ἐπὶ ἄλλον, εἶναι τὸ νὰ συνθέσωμεν ἕνα τρίτον ἀριθμὸν μὲ τὸν πρῶτον, ὡς ὁ δεύτερος συνθέτεται ἐκ τῆς μονάδος. Ἐντεῦθεν βλέπομεν, ὅτι ἐὰν οἱ δύο ἀριθμοὶ ἦναι ἀκέραιοι, κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον, ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν τὸν πρῶτον τοσάκις, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ δεύτερος, καὶ ἂν οἱ δύο ἀριθμοὶ ἦναι κλάσματα, πρέπει νὰ λάβωμεν ἀπὸ τὸ πρῶτον κλάσμα ἓν μέρος παριστανόμενον ἀπὸ τὸ δεύτερον.

Τέταρτον. Ἠγόρασέ τις 12 πήχας ὑφάσματος διὰ 84 φράγκων, καὶ ζητεῖ τὴν τιμὴν ἑκάστης πήχης.

Ἂν ὑποθέσωμεν ὡς γνωστὴν τὴν τιμήν· καταλαμβάνομεν, ὅτι λαμβάνοντες αὐτὴν δωδεκάκις, ἢ πολλαπλασιάζοντές την ἐπὶ 12 πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸν ἀριθμὸν 84. Τὸ ζήτημα λοιπὸν μᾶς ὁδηγεῖ νὰ ζητήσωμεν ἀριθμὸν, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν δεύτερον, τουτέστι τὸν 12, δίδει γινόμενον ἴσον τῷ πρώτῳ, τουτέστιν 84: αὕτη ἡ πρᾶξις ἔλαβε τὸ ὄνομα Διαίρεσις.

Διὰ νὰ δώσωμεν τὸν λόγον τῆς ὀνομασίας ταύτης, ἥτις μᾶς ἀνακαλύπτει τὴν ἰδέαν τοῦ μερισμοῦ ἑνὸς ἀριθμοῦ εἰς πολλὰ ἴσα μέρη, ὑποτεθείσθω, ὅτι ἔχομεν νὰ μοιράσωμεν ἐξίσου τὸ ἄθροισμα ἀπὸ 84 φράγκα εἰς δώδεκα ἀνθρώπους. Εἶναι φανερὸν ὅτι, ἐὰν ἐγνωρίζαμεν ἑνὸς τούτων τὸ μερίδιον, πολλαπλασιάζοντές το ἐπὶ τὸ 12 ἠθέλαμεν εὕρει τὸ 84.

Βλέπομεν λοιπὸν, ὅτι τὸ νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 84 εἰς τόσα μέρη ἴσα, ὅσας μονάδας περιέχει ὁ ἀριθμὸς 12, ἄλλο δὲν εἶναι, εἰμὴ τὸ νὰ ζητήσωμεν τρίτον τινὰ ἀριθμὸν, ὅστις πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸν δεύτερον 12 ἀποτελεῖ τὸν πρῶτον 84, τουτέστιν ἡ αὐτὴ μὲ τὴν πρώτην πρᾶξις.

Ἂς ἀναλάβωμεν τὸ ἀνωτέρω ζήτημα, εἰσάγοντες ἀντὶ ἀκεραίων κλάσματα. Ἠγόρασέ τις $\frac{5}{6}$ πήχης διὰ $\frac{19}{20}$ φράγκου· ζητεῖται ἡ τιμὴ μιᾶς πήχης.

Καὶ ἐνταῦθα πρέπει νὰ ζητήσωμεν ἀριθμὸν τοιοῦτον, ὥστε λαμβάνοντες αὐτοῦ τὰ πέντε ἕκτα, ἢ πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ $\frac{5}{6}$, νὰ ἔχωμεν $\frac{19}{20}$. Ἐκ τούτου ὁδηγούμεθα εἰς τὸ νὰ ἐκτελέσωμεν καὶ ἐδῶ διαίρεσιν κατὰ τὴν ἰδέαν, τὴν ὁποίαν ἀπεδώκαμεν εἰς τὸ ὄνομα τοῦτο, καὶ ὄχι κατὰ τὴν ἔννοιαν μερισμοῦ εἰς ἴσα μέρη.

Ἐδυνάμεθα νὰ ἀναφέρωμεν πλῆθος ζητημάτων, τὰ ὁποῖα ὅλα νὰ μᾶς φέρωσιν εἰς τὰς τέσσαρας προειρημένας πράξεις· καὶ ἐπειδὴ ταῦτα κάθε στιγμὴν εἰς ὅλας τῆς ζωῆς τὰς περιστάσεις παῤῥησιάζονται, πρέπει νὰ ἔχωμεν μεθόδους τοῦ ἐκτελεῖν τὰς εἰς τὴν λύσιν των ἀπαιτουμένας ἐργασίας. Τοιοῦτον εἶναι τὸ πρώτιστον ἀντικείμενον τοῦ πρώτου μέρους τῆς Μαθηματικῆς.

Ἡ Ἀριθμητικὴ σκοπὸν ἔχει εἰδικὸν, τὸ νὰ συστήσῃ σταθεροὺς καὶ βεβαίους κανόνας εἰς τὴν ἐκτέλεσιν ὅλων τῶν πράξεων, ὅσαι ἠμποροῦν νὰ γένωσιν ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν. Περιλαμβάνει αὕτη προσέτι πλῆθος ἰδιοτήτων, αἵτινες ἐφευρέθησαν ἀπὸ τὰς ἐρεύνας, αἱ ὁποῖαι ἔπρεπε νὰ ἐκτελεσθῶσι διὰ νὰ φθάσωσιν εἰς μεθόδους τοῦ ὑπολογίζεσθαι, καὶ νὰ εὐκολύνωσι τούτων τὴν χρῆσιν.

Θέλομεν δὲ ἐκθέσει κατὰ διαδοχὴν τὰς ἐργασίας ταύτας, ἀνακαλοῦντες εἰς τὴν μνήμην μας (ἀρ. 2), ὅτι διὰ νὰ καταστήσωμεν τὰς μεθόδους ἀνεξαρτήτους ἀπὸ πᾶν εἶδος ζητήματος, πρέπει νὰ θεωρήσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς ὡς ἀριθμοὺς ἀφῃρημένους· μ' ὅλον τοῦτο εἰς τὰς ἐφαρμογὰς τὰς διωρισμένας πρὸς γύμνασιν τῶν ἀρχαρίων θέλομεν ἀναπτύξει καὶ ζητήματα μὲ ἀριθμοὺς διακεκριμένους.

Διὰ νὰ ἐξακολουθήσωμεν δὲ κανονικῶς, τουτέστι διατρέχοντες πρότερον τὴν ἁπλουστέραν ὁδὸν, καὶ μετὰ ταῦτα τὴν σύνθετον, ἐκθέτομεν πρῶτον τὰς ἐπάνω εἰς τοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς γινομένας πράξεις.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'.

Πράξεις ἐπὶ τῶν ἀκεραίων Ἀριθμῶν.

Περὶ τῆς Προσθέσεως.

§. 10. Τὸ νὰ συνάψωμεν ἢ νὰ προσθέσωμεν πολλοὺς ἀριθμοὺς μεταξύ των, εἶναι νὰ τοὺς ἑνώσωμεν ὅλους εἰς ἕνα μόνον, ἢ νὰ σχηματίσωμεν ἀλ-