μοῦ ἑνὸς δυωνύμου, καὶ ὁ τύπος, ὅς τις ἔχει σχέσιν μὲ ταύτην τὴν σύνθεσιν, ἀπαιτεῖ πολλὰς ἐκτεταμένας γνώσεις τῆς Ἀλγέβρας. Ἀλλὰ θέλομεν δώσει εἰς τὸ τελευταῖον κεφάλαιον τούτου τοῦ συγγράμματος σύντομόν τι μέσον τοῦ νὰ ἐκτελῶμεν ἐξαγωγὰς ῥιζῶν παντὸς βαθμοῦ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ζ΄.

Ἐφαρμογαὶ τῶν κανόνων τῆς Ἀριθμητικῆς. Θεωρία τῶν λόγων καὶ ἀναλογιῶν.

§. 200. Εἰσαγωγή. Ἀφ' οὗ ἐγνωστοποιήσαμεν τὰς πᾶν εἶδος ἐργασιῶν τῆς ἀριθμητικῆς ἀποβλεπούσας μεθόδους, μᾶς μένει ἀκόμη νὰ ἐκπληρώσωμεν ὄχι εὔκολον μέρος αὐτῆς, δηλαδὴ νὰ διδάξωμεν τοὺς ἀρχαρίους τὸ λύειν ὅλα τὰ ἀριθμητικὰ ζητήματα.

Διακρίνονται δὲ δύο ἀρχικὰ γένη ζητημάτων, τὰ θεωρήματα καὶ τὰ προβλήματα.

Ὅταν ἔχωμεν σκοπὸν νὰ ἀποδείξωμεν τὴν ὕπαρξιν μερικῶν ἰδιοτήτων σχετικῶς εἰς γνωστοὺς καὶ δεδομένους ἀριθμούς, τότε τὸ ζήτημα τοῦτο ὀνομάζεται θεώρημα. Τὸ πέμπτον κεφάλαιον προσφέρει πλῆθος ζητημάτων τούτου τοῦ γένους. Αἱ ἀρχαὶ ἐπὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ δύο ἢ περισσοτέρων παραγόντων καθ' ὁποιανδήποτε τάξιν, καὶ ἐπὶ τῆς διαιρετότητος τῶν ἀριθμῶν, αἱ ἰδιότητες τῶν δεκαδικῶν περιοδικῶν κλασμάτων, καὶ τῶν συνεχῶν κλασμάτων εἶναι τόσα θεωρήματα.

Ὅταν δὲ προτείνεται νὰ προσδιορίσωμεν μερικοὺς ἀριθμοὺς διὰ τῆς γνώσεως ἄλλων ἀριθμῶν, οἵ τινες ἔχουσι μὲ τοὺς πρώτους σχέσεις δεικνυομένας ἀπὸ τὴν ἔκφρασιν, τότε τοῦτο, τὸ ὁποῖον θέλομεν νὰ λύσωμεν ζήτημα, λέγεται πρόβλημα. Τοιαῦτα εἶναι τὰ ζητήματα, τὰ ὁποῖα ἐπαῤῥησιάσαμεν εἰς τὸν δρόμον τῶν δύο πρώτων κεφαλαίων, ὡς ἐφαρμογὰς τῶν διαφόρων κανόνων τῆς ἀριθμητικῆς.

Ὅταν δὲ λύωμεν προβλήματα πλέον συμπεπλεγμένα, τὰ ὁποῖα κατὰ τὴν ἔκφρασίν των ἀπαιτοῦν περισσότερον ἀγῶνα εἰς τὸ νὰ ἀνακαλύψωμεν καὶ νὰ προσδιορίσωμεν τὴν σειρὰν τῶν πράξεων, τὰς ὁποίας πρέπει νὰ ἐκτελέσωμεν ἐπὶ τῶν γνωστῶν καὶ δεδομένων ἀριθμῶν, διὰ νὰ φθάσωμεν εἰς τὴν γνῶσιν τῶν ἀριθμῶν, τοὺς ὁποίους ζητοῦμεν, τότε ὁ προσδιορισμὸς οὗτος συγκροτεῖ τὴν λεγομένην ἀνάλυσιν, εἴτε ἐπίλυσιν τοῦ προβλήματος.

Εἰς κλάσιν τινὰ τινῶν προβλημάτων δυνάμεθα νὰ συστήσωμεν κανόνας σταθεροὺς καὶ βεβαίους. Ταῦτα εἶναι ὅσα ἐξαρτῶνται ἀπὸ τὴν θεωρίαν τῶν λόγων καὶ ἀναλογιῶν. Φυσικὰ λοιπὸν πρέπει νὰ ἀναπτύξωμεν πρῶτον αὐτὴν τὴν θεωρίαν, ἥτις, ἐξ αἰτίας τῶν ἀπείρων ἐφαρμογῶν της, πρέπει νὰ θεωρῆται ὡς ἡ πλέον ἀξιόλογος εἰς τὴν Μαθηματικήν.

§. α΄. Περὶ λόγων καὶ Ἀναλογιῶν.

§. 201. Εἴπομεν ἤδη (ἀριθμ. 1.) ὅτι δὲν ὑπάρχει ἀπόλυτος ποσότης, καὶ ὅτι διὰ νὰ ἐννοήσωμεν ποσότητα τινὰ, πρέπει νὰ τὴν συγκρίνωμεν μὲ ἄλλην, λαμβανομένην κατὰ συμφωνίαν, τοῦ ἰδίου εἴδους, ἥτις δύναται νὰ ληφθῇ κατ᾽ ἀρέσκειαν, ἢ ἀπὸ τὴν φύσιν· τὸ δὲ ἐξαγόμενον ταύτης τῆς συγκρίσεως ὠνομάσαμεν ἀριθμόν.

Ἐὰν ὅμως ἀντὶ νὰ συγκρίνωμεν τὴν ποσότητα μὲ τὴν μονάδατης, θελήσωμεν νὰ συγκρίνωμεν δύο ὁποιασδήποτε ποσότητας τοῦ ἰδίου εἴδους, τὸ ὁποῖον ἄλλο δὲν εἶναι, εἰμὴ σύγκρισις τῶν δύο ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι τὰς ἐκφράζουσι, τὸ ἐξαγόμενον ταύτης τῆς συγκρίσεως καλεῖται ἀναφορὰ ἢ λόγος τῶν δύο ἀριθμῶν. Αἱ δύο αὗται λέξεις „ἀναφορὰ καὶ λόγος" εἶναι συνώνυμοι εἰς τὴν μαθηματικὴν, καὶ ἐκφράζουν τὴν ἰδέαν τῆς ποσότητος, τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν, διὰ μέσου ἐκείνης μὲ τὴν ὁποίαν τὴν συγκρίνομεν, καὶ ἡ ὁποία πρέπει νὰ ἦναι οὐσιωδῶς τοῦ ἰδίου εἴδους.

Κατὰ ταύτην τὴν ἔννοιαν ὁ ἀριθμὸς εἶναι ἡ ἔκφρασις τοῦ λόγου τῆς ποσότητος πρὸς τὴν μονάδα της.

Ἐν γένει ὑπάρχουν δύο τρόποι τοῦ συγκρίνειν δύο ποσότητας τὴν μίαν μὲ τὴν ἄλλην. Ἢ ζητοῦμεν πόσον ἡ μεγαλητέρα ὑπερβαίνει τὴν μικροτέραν, καὶ τὸ ἐξαγόμενον λαμβάνεται διὰ τῆς ἀφαιρέσεως τῆς μικροτέρας ἀπὸ τὴν μεγαλητέραν· ἢ ζητοῦμεν ποσάκις ἡ μεγαλητέρα περιέχει τὴν μικροτέραν, ἢ ποσάκις ἡ μικροτέρα περιέχεται εἰς τὴν μεγαλητέραν· τοῦτο δὲ ἐκτελοῦμεν διαιροῦντες τὴν μίαν ποσότητα διὰ τῆς ἄλλης.

Οὕτως ἔστωσαν 24 καὶ 6 οἱ δύο ἀριθμοὶ, τοὺς ὁποίους θέλομεν νὰ συγκρίνωμεν.

Ἔχομεν $24-6=18$, καὶ $\frac{24}{6}=4$.

Τὸ ἐξαγόμενον τῆς συγκρίσεως διὰ τῆς ἀφαιρέσεως εἶναι 18, ἐνῷ τὸ ἐξαγόμενον τῆς συγκρίσεως διὰ τῆς διαιρέσεως εἶναι 4.

Πρὸς διάκρισιν τῶν δύο τούτων εἰδῶν τοῦ λόγου, ὠνόμασαν ἄλλοτε τὸ πρῶτον ἀριθμητικὸν λόγον, καὶ τὸ δεύτερον λόγον γεωμετρικόν. Ἀλλ' ἀντ' αὐτῶν τῶν ἀσημάντων ὀνομασιῶν ἀντεισήχθησαν τώρα αἱ ἀκόλουθοι· λόγος κατ' ἀφαίρεσιν, ἢ ἁπλῶς διαφορὰ, ἐπειδὴ τοῦτο εἶναι τὸ ἐξαγόμενον τῆς ἀφαιρέσεως δύο ἀριθμῶν τοῦ ἑνὸς ἀπὸ τὸν ἄλλον, καὶ λόγος κατὰ διαίρεσιν, ἢ ἁπλῶς λόγος, ἐπειδὴ τὸν μεταχειριζόμεθα, διὰ νὰ γνωρίσωμεν μόνον πόσαις φοραῖς ἡ μία τῶν ποσοτήτων περιέχει τὴν ἄλλην, ἢ πόσαις φοραῖς ἡ μικροτέρα περιέχεται εἰς τὴν μεγαλητέραν, ὅταν συγκρίνωμεν δύο μεγέθη εἰς τὴν Μαθηματικήν.

Π. χ. εἰς τὴν θεωρίαν τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν, ὁ λόγος τῆς ἀρχικῆς μονάδος ὁποιασδήποτε φύσεως πρὸς μίαν τῶν ὑποδιαιρέσεών της, ἢ ὁ λόγος μεταξὺ δύο ὑποδιαιρέσεων εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν φορῶν, καθ' ἃς ἡ μία περιέχει τὴν ἄλλην. Εἰς τὴν σύγκρισιν τοῦ νέου συστήματος τῶν βαρέων καὶ μέτρων πρὸς τὸ παλαιὸν, ὁ λόγος τοῦ μέτρου πρὸς τὴν ὀργυιὰν, ἢ τῆς ὀργυιᾶς πρὸς τὸ μέτρον, ὁ λόγος τοῦ χιλιογράμμου πρὸς τὴν λίτραν, ἢ τῆς λίτρας πρὸς τὸ χιλιόγραμμον, εἶναι ὁ ἀριθμὸς ἀκέραιος ἢ κλασματικὸς, ὅς τις προκύπτει ἀπὸ τὴν διαίρεσιν δύο ἀριθμῶν, οἵτινες ἐκφράζουσιν εἰς μονάδας τοῦ ἰδίου εἴδους τὰ μέτρα, τὰ ὁποῖα συγκρίνομεν. Διὰ τοῦτο εἰς τὸ ἑξῆς, ὅταν μεταχειριζώμεθα τὴν λέξιν λόγος, θέλομεν ἐννοεῖ τὸ ἐξαγόμενον, ἢ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τῶν δύο ἀριθμῶν· καὶ ἐὰν θέλωμεν νὰ φανερώσωμεν, ὅτι δύο ἀριθμοὶ συγκρίνονται μεταξύ των κατ' ἀφαίρεσιν, τότε μεταχειριζόμεθα τὴν λέξιν διαφορὰ ἢ λόγος κατ' ἀφαίρεσιν.

Εἰς κάθε λόγον εἴτε κατ' ἀφαίρεσιν, εἴτε κατὰ διαίρεσιν διακρίνονται δύο ὅροι, οἵτινες εἶναι οἱ ἀριθμοὶ, τοὺς ὁποίους συγκρίνομεν. Ὁ ὅρος, τὸν ὁποῖον ἐκφράζομεν ἢ γράφομεν πρῶτον, καλεῖται ἡγούμενος· καὶ ὁ δεύτερος, ἑπόμενος.

§. 202. Ὅταν δύο κατ' ἀφαίρεσιν λόγοι ἦναι ἴσοι, τὸ ἄθροισμα τῶν τεσσάρων ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι τοὺς συσταίνουν, καλεῖται Ἰσοδιαφορά, ὡς οὖσα ἔκφρασις δύο ἴσων διαφορῶν. (ἄλλοτε ἐκαλεῖτο ἀναλογία ἀριθμητική.)

Π. χ. Ἔστωσαν οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ 12, 5, 24, 17. Ἐπειδὴ ἡ διαφορὰ τοῦ 5 ἀπὸ τὸ 12 εἶναι 7, καὶ ἡ διαφορὰ τοῦ 17 ἀπὸ τὸ 24, εἶναι παρομοίως 7, λέγεται ὅτι αἱ ποσότητες αὗται σχηματίζουσιν Ἰσοδιαφοράν, τὴν ὁποίαν γράφομεν οὕτως,

$$12 . 5 : 24 . 17$$

τιθεμένης μιᾶς στιγμῆς μεταξὺ τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου ὅρου, δύο στιγμῶν μεταξὺ τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου, καὶ μιᾶς μεταξὺ τοῦ τρίτου καὶ τετάρτου.

Τὴν ἐκφράζομεν δὲ κατὰ τὸν ἀκόλουθον τρόπον.

12 εἶναι πρὸς 5, καθὼς 24 πρὸς 17,

τὸ ὁποῖον δηλοῖ, ὅτι 12 ὑπερβαίνει τὸ 5 κατὰ τόσας μονάδας, καθ' ὅσας τὸ 24 ὑπερβαίνει τὸ 17.

Καὶ δυνάμεθα νὰ γράφωμεν αὐτὴν κατὰ τὴν ὁποίαν παρεδέχθημεν ἀρχήν,

$$12 - 5 = 24 - 17.$$

Εἰς τὴν ἰσοδιαφορὰν 12 . 5 : 24 . 17 ὁ πρῶτος καὶ ὁ τρίτος ὅρος 12 καὶ 24 καλοῦνται ἡγούμενοι, ὁ δεύτερος καὶ ὁ τέταρτος καλοῦνται ἑπόμενοι. Αὗται αἱ ὀνομασίαι συμφωνοῦσι μὲ τὰς ὁποίας ἐδώκαμεν εἰς τοὺς δύο ὅρους λόγου τινὸς κατ' ἀφαίρεσιν.

Ὁ πρῶτος καὶ ὁ τελευταῖος ὅρος 12 καὶ 17 καλοῦνται τὰ δύο ἄκρα· ὁ δεύτερος καὶ ὁ τρίτος ὅρος 5 καὶ 24 καλοῦνται τὰ δύο μέσα.

Ὅταν δύο κατὰ διαίρεσιν λόγοι ἦναι ἴσοι, τὸ ἄθροισμα τῶν τεσσάρων ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι τοὺς συσταίνουσι, καλεῖται ἀναλογία, (ἄλλοτε γεωμετρικὴ ἀναλογία), ἢ καὶ κατ' ἄλλον τρόπον Ἰσοπηλικότης, ἐπειδὴ παῤῥησιάζει τὴν ἔκφρασιν δύο ἴσων πηλίκων· ἀλλὰ ἡ λέξις ἀναλογία, εἶναι ἡ μόνη παρὰ πᾶσιν ἀποδεκτή.

Ἔστωσαν π. χ. οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ 15, 5, 36, 12. Ἐπειδὴ ὁ λόγος τοῦ 15 πρὸς τὸ 5, ἢ τὸ πηλίκον τοῦ 15 διὰ τοῦ 5 εἶναι 3, καθὼς καὶ ὁ λόγος τοῦ 36 πρὸς τὸ 12, οἱ τέσσαρες ὁμοῦ σχηματίζουν ἀναλογίαν, τὴν ὁποίαν γράφομεν οὕτως,

$$15 : 5 :: 36 : 12.$$

τιθεμένων δύο στιγμῶν μεταξὺ τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου, μεταξὺ τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου τεσσάρων, καὶ μεταξὺ τοῦ τρίτου καὶ τοῦ τετάρτου δύο.

Τὴν προφέρομεν δὲ ὡς καὶ τὴν ἰσοδιαφορὰν, 15 πρὸς 5, καθὼς 36 πρὸς 12· τὸ ὁποῖον δηλοῖ, ὅτι τὸ 15 περιέχει τὸ 5 τοσάκις, ὁσάκις 36 περιέχει 12. Διὰ ταῦτο δυνάμεθα νὰ γράφωμεν αὐτὴν καὶ ὑπὸ ταύτην τὴν ἄλλην μορφὴν $\frac{15}{3}=\frac{36}{12}$.

Αἱ ὀνομασίαι τῶν ὅρων εἶναι αἱ αὐταὶ, ὡς καὶ εἰς τὴν Ἰσοδιαφοράν.

Οὕτως 15 καὶ 36 εἶναι οἱ ἡγούμενοι, 5 καὶ 12 εἶναι οἱ ἑπόμενοι· τέλος πάντων 15 καὶ 12 καλοῦνται ἄκρα, 5 καὶ 36 μέσα τῆς ἀναλογίας.

Τῶν ἰσοδιαφορῶν καὶ μάλιστα τῶν ἀναλογιῶν τὰς πολυπληθεῖς ἰδιότητας ἀναπτύσσομεν ἤδη κατὰ διαδοχήν.

Περὶ τῶν Ἰσοδιαφορῶν.

§. 204. Καλεῖται Ἰσοδιαφορὰ (ἀριθμ. 202) ἡ ἔκφρασις δύο ἴσων διαφορῶν.

Θεμελιώδης Ἰδιότης. Εἰς κάθε ἰσοδιαφορὰν τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν μέσων.

Ἔστω ἡ Ἰσοδιαφορὰ 11 . 7 : 19 . 15·

Βλέπομεν φανερὰ, ὅτι 11+15=7+19.

Διὰ νὰ δώσωμεν λόγον ταύτης τῆς προτάσεως κατὰ γενικόν τινὰ τρόπον, παρατηροῦμεν, ὅτι, ἐὰν οἱ ἑπόμενοι ἦσαν ἴσοι μὲ τοὺς ἡγουμένους των, π. χ. ἐὰν εἴχαμεν 11 . 11 : 19 . 19,

ἡ πρότασις ἤθελεν εἶναι φανερά· διότι 11+19 = 11+19· ὅθεν διὰ νὰ φέρωμεν τὴν ἰσοδιαφορὰν εἰς ταύτην τὴν κατάστασιν, ἀρκεῖ νὰ αὐξήσωμεν ἕκαστον τῶν ἑπομένων μὲ τὴν ἰδίαν διαφορὰν 4.

Ἀλλὰ διὰ ταύτης τῆς προσθέσεως βλέπομεν ὅτι αὐξήσαμεν ἓν τῶν μέσων, καὶ ἓν τῶν ἄκρων μὲ τὸν ἴδιον ἀριθμὸν 4· οὕτως τὸ ἄθροισμα τῶν μεσαίων καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων εὑρίσκονται αὐξημένα ἀπὸ τὸν ἴδιον ἀριθμόν. Λοιπὸν ἐπειδὴ διὰ ταύτης τῆς προσθέσεως δύο ἀθροίσματα εἶναι ἴσα, ταῦτά ἄρα ἦσαν καὶ πρότερον ἴσα.

Παρατηροῦμεν προσέτι, ὅτι ἐὰν δὲν ἦτον ἰσοδιαφορὰ μεταξὺ τῶν τεσσάρων ἀριθμῶν, ἔπρεπε, διὰ νὰ καταστήσωμεν τοὺς ἑπομένους ἴσους μὲ τοὺς ἡγουμένους, νὰ προσθέσωμεν εἰς ἕκαστον τούτων ἀριθμὸν διαφορετικὸν, καὶ ἐπειδὴ μετὰ ταύτην τὴν πρόσθεσιν τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων γίνεται ἴσον μὲ τὸ τῶν μέσων, ἕπεται ὅτι τὰ δύο ἀθροίσματα ἦτον ἄνισα πρὸ τῆς προσθέσεως.

Λοιπὸν ἐὰν τέσσαρες ἐκφρασμένοι ἢ γραμμένοι ἐπὶ τῆς αὐτῆς γραμμῆς ἀριθμοὶ σχηματίζουν ἰσοδιαφορὰν, τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν μέσων.

Καὶ ἀντιστρόφως, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τοῦ πρώτου καὶ τελευταίου ἀριθμοῦ ἦναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου, ἢ ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων ἦναι ἴσον μὲ τὸ τῶν μέσων, οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ σχηματίζουσιν ἰσοδιαφορὰν εἰς τὴν τάξιν, εἰς τὴν ὁποίαν εἶναι γραμμένοι· ἐπειδὴ ἐὰν δὲν ὑπῆρχεν ἰσοδιαφορὰ, εἴδομεν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων δὲν ἤθελεν εἶναι ἴσον μὲ ἐκεῖνο τῶν μέσων· τὸ ὁποῖον εἶναι ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως.

Σ. Κ. Συμβαίνει κάποτε νὰ ἦναι οἱ ἡγούμενοι μικρότεροι τῶν ἑπομένων των, καθὼς εἰς τὴν ἰσοδιαφοράν,

$$9 . 14 : 18 . 23 .$$

Ἀλλ' οἱ συλλογισμοὶ ἤθελαν εἶναι οἱ ἴδιοι ὡς εἰς τὴν ἀνωτέρω περίστασιν. Ἤρκει δὲ νὰ προσθέσωμεν εἰς τοὺς δύο ἡγουμένους τὴν σταθερὰν διαφορὰν 5, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ αὐτὸ, ὡς νὰ ἐπροσθέταμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν εἰς τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων, καὶ εἰς τὸ ἄθροισμα τῶν μέσων.

Ἂς ἴδωμεν τώρα μὲ ποίαν ἀκρίβειαν ἐφαρμόζονται αἱ Ἀλγεβραϊκαὶ γραφαὶ εἰς τὴν ἀνωτέρω ἰδιότητα, καὶ εἰς τὴν ἀντίστροφόν της.

Ἔστωσαν τέσσαρες ἀριθμοὶ α, β, γ, δ, τοὺς ὁποίους ὑποθέτομεν, ὅτι σχηματίζουν ἀναμεταξύ των ἰσοδιαφοράν.

Ἔχομεν λοιπὸν $\alpha . \beta : \gamma . \delta$, ἢ κατ' ἄλλον τρόπον $\alpha - \beta = \gamma - \delta$.

Τούτου τεθέντος προσθέτομεν εἰς τὰ δύο μέλη ταύτης τῆς ἰσότητος, $\beta + \delta$, καὶ οὕτω συνάγομεν,

$$\alpha - \beta + \beta + \delta = \gamma - \delta + \beta + \delta$$

ἢ ἀνάγοντες, $\alpha + \delta = \gamma + \beta$. Λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων α καὶ δ, εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν μέσων γ καὶ β.

Ἀντιστρόφως, ἔστωσαν οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ α, β, γ, δ, τοιοῦτοι ὥστε $\alpha + \delta = \beta + \gamma$.

Ἂς ἀφαιρέσωμεν $\beta + \delta$ ἀπὸ τὰ δύο μέλη ταύτης τῆς ἰσότητος, ὅθεν ἔχομεν $\alpha + \delta - \beta - \delta = \beta + \gamma - \beta - \delta$, ἢ ἀνάγοντες $\alpha - \beta = \gamma - \delta$ ἢ $\alpha . \beta : \gamma . \delta$. Λοιπὸν οὗτοι οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ σχηματίζουσιν ἰσοδιαφορὰν, τῆς ὁποίας τὰ ἄκρα εἶναι οἱ δύο ὅροι τοῦ πρώτου ἀθροίσματος, καὶ τὰ μέσα, οἱ δύο ὅροι τοῦ δευτέρου ἀθροίσματος.

§. 205. Συνέπεια. Ἕπεται ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἰδιότητος, ὅτι γνωρίζοντες τοὺς τρεῖς ὅρους τῆς ἰσοδιαφορᾶς προσδιορίζομεν τὸν τέταρτον, ἀφαιροῦντες, ἐὰν εἶναι ἓν τῶν ἄκρων, τὸ γνωστὸν ἄκρον ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τῶν μέσων, καὶ, ἐὰν εἶναι ἓν τῶν μέσων, τὸ γνωστὸν μέσον ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἄκρων.

Οὕτως ἔστω ἡ ἰσοδιαφορὰ $23 . 11 : 49 . \chi$ (χ παῤῥησιάζοντος τὸν ἄγνωστον ὅρον).

Ἐπειδὴ δὲ ἔχομεν κατὰ τὴν ἰδιότητα $\chi + 23 = 11 + 49$, προκύπτει $\chi = 11 + 49 - 23 = 37$, τὸ ὁποῖον μᾶς δίδει

$$23 . 11 : 49 . 37.$$

Παρομοίως εἰς τὴν ἰσοδιαφορὰν $31 . 25 : \chi . 78$ ἔχομεν $\chi + 25 = 31 + 78$. Λοιπὸν $\chi = 31 + 78 - 25 = 84$, καὶ ἐπομένως $31 . 25 : 84 . 78$.

§. 206. Συμβαίνει κἄποτε νὰ θεωρῶμεν ἰσοδιαφορὰν, τῆς ὁποίας τὰ δύο μέσα εἶναι ἴσα. Αὕτη καλεῖται συνεχὴς ἰσοδιαφορὰ (ἢ συνεχὴς ἀριθμητικὴ ἀναλογία) π. χ. $27 . 39 : 39 . 51$, εἶναι συνεχὴς ἰσοδιαφορά. Ἐπειδὴ, εἰς ταύτην τὴν περίστασιν, τὸ διπλοῦν ἑνὸς τῶν μεσαίων πρέπει κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἰδιότητα νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων, ἕπεται ὅτι τὸ μέσον τοῦτο εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν δύο ἄκρων.

Οὕτως εἰς τὴν ἰσοδιαφορὰν $23 . \chi : \chi . 49$,

συνάγομεν $$\chi = \frac{49 + 23}{2} = 36.$$

Αὕτη ἡ τιμὴ τοῦ x καλεῖται ἓν μέσον διαφορᾶς (ἢ μέσον ἀριθμητικῶς ἀνάλογον), μεταξὺ τῶν δύο ἀριθμῶν 23 καὶ 49.

§. 207. Ἰδοὺ καὶ μερικαὶ ἄλλαι ἰδιότητες τῶν ἰσοδιαφορῶν.

Δυνάμεθα νὰ αὐξήσωμεν τοὺς δύο ἡγουμένους, ἢ νὰ τοὺς ἐλαττώσωμεν, νὰ αὐξήσωμεν τοὺς δύο ἑπομένους, ἢ νὰ τοὺς ἐλατταττώσωμεν μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, νὰ αὐξήσωμεν ἢ νὰ ἐλαττώσωμεν τοὺς δύω πρώτους ὅρους, ἢ τοὺς δύο τελευταίους μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, χωρὶς ἡ ἰσοδιαφορὰ νὰ παύσῃ ἀπὸ τοῦ νὰ ὑπάρχῃ.

Τῷ ὄντι εἶναι φανερὸν ὅτι δι' ὅλων τούτων τῶν μεταβολῶν, ἢ αὐξάνομεν ἢ ἐλαττοῦμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων, καὶ ἐκεῖνο τῶν μέσων μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, διὰ τοῦτο ἡ ἰσότης των μένει ἡ αὐτή· καὶ διὰ τοῦτο ὑπάρχει τὸ αὐτὸ καὶ διὰ τὸ ἀντίστροφον τῆς θεμελιώδους ἰδιότητος.

Δυνάμεθα παρομοίως νὰ τρέψωμεν τὴν τάξιν τῶν δύο ἄκρων εἰς ἐκείνην τῶν δύο μέσων, ἢ νὰ θέσωμεν τὰ μέσα εἰς τὸν τόπον τῶν ἄκρων, χωρὶς νὰ χαλάσῃ ἡ ἰσοδιαφορὰ, ἐπειδὴ εἶναι φανερὸν, ὅτι μετὰ ταύτας τὰς ἀλλαγὰς, τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων εἶναι ἀκόμη ἴσον μὲ ἐκεῖνο τῶν μέσων.

Ἐν γένει, κάθε τροπὴ ἐκτελουμένη ἐπὶ ἰσοδιαφορᾶς, οὔσης τοιαύτης, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων νὰ μένῃ πάντοτε ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν μέσων, δὲν φθείρει παντελῶς τὴν ἰσοδιαφοράν.

Ἀλλ' εἶναι ἀνωφελὲς νὰ ἐκτανθῶμεν περισσότερον εἰς τὰς ἰδιότητας τῶν ἰσοδιαφορῶν, ἐπειδὴ πολλὰ ὀλίγον τὰς μεταχειρίζονται.

Ἂς περάσωμεν λοιπὸν εἰς τὰς ἰδιότητας τῶν κυρίως λεγομένων ἀναλογιῶν (ἢ μὲ ἄλλας λέξεις γεωμετρικῶν ἀναλογιῶν).

Περὶ ἀναλογιῶν.

§. 208. Ἀναλογίαν ἐννοοῦμεν τὴν ἔκφρασιν δύο λόγων, ἢ δύο ἴσων πηλίκων.

Ὅταν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἦναι ἀνάλογοι, ὁ σταθερὸς λόγος, ὅστις ὑπάρχει μεταξὺ τῶν δύο πρώτων ὅρων, καὶ μεταξὺ τῶν δύο τελευταίων, δύναται νὰ ἦναι ἀκέραιος ἢ κλασματικὸς ἀριθμὸς, ἢ κύριόν τι κλάσμα.

Ἔστωσαν αἱ ἀναλογίαι π. χ.

$$18 : 6 :: 24 : 8$$
$$12 : 9 :: 36 : 27$$
$$5 : 12 :: 20 : 48$$

Εἰς τὴν πρώτην ὁ σταθερὸς λόγος εἶναι 3. Εἰς τὴν δευτέραν εἶναι $\frac{12}{9}$ ἢ $\frac{36}{27}=\frac{4}{3}$, ἀφ' οὗ ἐξαλειφθῶσιν οἱ παράγοντες τῶν δύο ὅρων. Λοιπὸν $\frac{4}{3}$ εἶναι ὁ σταθερὸς λόγος. Τέλος πάντων εἰς τὴν τρίτην ἔχομεν $\frac{20}{48}=\frac{5}{12}$, ἀφ' οὗ ἐξαλειφθῇ ὁ κοινὸς παράγων 4 ἀπὸ τοὺς δύο ὅρους, οὕτως $\frac{5}{12}$ εἶναι ὁ σταθερὸς λόγος.

Θεμελιώδης ἰδιότης. Εἰς κάθε ἀναλογίαν τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν μέσων.

Τῷ ὄντι, αὕτη ἡ ἰδιότης ἤθελεν εἶναι φανερὰ, ἐὰν ἀντὶ τῆς ἀναλογίας

$$18 : 6 :: 24 : 8$$

εἴχαμεν ἄλλην, τῆς ὁποίας οἱ ἡγούμενοι ἤθελαν εἶναι ἴσοι μὲ τοὺς ἑπομένους της, ὡς π. χ. $18 : 18 :: 24 : 24$.

Ὅθεν διὰ νὰ ἄξωμεν τὴν πρώτην ἀναλογίαν εἰς ταύτην τὴν περίστασιν, ἀρκεῖ προφανῶς νὰ πολλαπλα-

σιάσωμεν ἕκαστον ἑπόμενον ἐπὶ τὸν σταθερὸν λόγου 3
ἀλλὰ διὰ τοῦ τοιούτου πολλαπλασιασμοῦ ἓν τῶν μέσων καὶ ἓν τῶν ἄκρων πολλαπλασιάζονται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, διὰ τοῦτο ἀκολουθεῖ τὸ αὐτὸ εἰς τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων καὶ εἰς τὸ γινόμενον τῶν μέσων, καὶ ἐπειδὴ τότε αὐτὰ τὰ δύο γινόμενα εἶναι ἴσα, πρέπει νὰ ἦτον ἴσα καὶ πρὸ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Παρατηροῦμεν προσέτι, ὅτι ἐὰν οἱ τέσσαρες δεδομένοι ἀριθμοὶ δὲν ἐσχημάτιζαν ἀναλογίαν, ἔπρεπε, διὰ νὰ σχηματίσωμεν τοὺς ἑπομένους ἴσους μὲ τοὺς ἡγουμένους, νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς τοιούτος ἑπομένους ἕκαστον ἐπὶ ἀριθμὸν τινὰ διάφορον ἐκφράζοντα τὸν λόγον τοῦ πρώτου ὅρου πρὸς τὸν δεύτερον, ἢ τοῦ τρίτου ὅρου πρὸς τὸν τέταρτον· καὶ ἐπειδὴ μετὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων γίνεται ἴσον μὲ ἐκεῖνο τῶν μέσων, διὰ τοῦτο πρὸ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τὰ δύο γινόμενα δὲν ἦτον ἴσα.

Ἐκ τούτου πορίζομεν, ὅτι ἐὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ προφερόμενοι ἢ γραφόμενοι ἐπὶ μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς γραμμῆς, εἶναι ἀνάλογοι, τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων εἶναι ἴσον μὲ ἐκεῖνο τῶν μέσων.

Ἀντιστρόφως, ἐὰν τὸ γινόμενον τῶν δύο ἄκρων εἶναι ἴσον μὲ ἐκεῖνο τῶν μέσων, οἱ ἀριθμοὶ σχηματίζουσιν ἀναλογίαν εἰς τάξιν, καθ' ἣν εἶναι γραμμένοι· ἐπειδὴ ἐὰν δὲν ὑπῆρχεν ἀναλογία μεταξὺ τῶν τεσσάρων ἀριθμῶν, τότε, ὡς εἴπομεν, τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων δὲν ἤθελεν εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν μέσων, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ἐναντίον τῆς συσταθείσης ὑποθέσεως.

Ἂς ἐφαρμόσωμεν τὰς ἀλγεβραϊκὰς γραφὰς εἰς τὴν ἀπόδειξιν ταύτης τῆς ἰδιότητος καὶ τῆς ἀντιστρόφου της.

Ἔστωσαν οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ, α, β, γ, δ εἰς ἀναλογίαν, τουτέστι νὰ ἔχωμεν $\alpha:\beta::\gamma:\delta$· ἤ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ αὐτὸ, $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$. Πολλαπλασιάζομεν τὰ δύο μέλη ταύτης τῆς ἰσότητος διὰ $\beta\delta$ καὶ ἔχομεν $\frac{\alpha\beta\delta}{\beta}=\frac{\gamma\beta\delta}{\delta}$, καὶ ἀνάγοντες εὑρίσκομεν $\alpha\delta=\beta\gamma$.

Λοιπὸν τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων $\alpha\delta$ εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν μέσων $\beta\gamma$.

Ἀντιστρόφως. Ἔστωσαν οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ α, β, γ, δ τοιοῦτοι ὥστε $\alpha\times\delta=\beta\times\gamma$.

Καὶ διαιροῦντες τὰ δύο μέλη ταύτης τῆς ἰσότητος διὰ $\beta\times\delta$, ἔχομεν $\frac{\alpha\times\delta}{\beta\times\delta}=\frac{\beta\times\gamma}{\beta+\delta}$.

Καὶ ἐξαλείφοντες τοὺς κοινοὺς παράγοντας, $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$, τουτέστιν . . . . ἔχομεν $\alpha:\beta::\gamma:\delta$.

Λοιπὸν οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ σχηματίζουσιν ἀναλογίαν, τῆς ὁποίας τὰ ἄκρα εἶναι οἱ παράγοντες τοῦ πρώτου γινομένου, καὶ τὰ μέσα εἶναι οἱ παράγοντες τοῦ δευτέρου γινομένου.

§. 209. Συνέπεια. Ἐκ ταύτης τῆς θεμελιώδους ἰδιότητος προκύπτει· ὅτι γνωρίζοντες τοὺς τρεῖς ὅρους μιᾶς ἀναλογίας, διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὸν τέταρτον, διαιροῦμεν τὸ γινόμενον τῶν μέσων διὰ τοῦ γνωστοῦ ἄκρου, ἢ τὸ γινόμενον τῶν δύο ἄκρων διὰ τοῦ γνωστοῦ μέσου, καθ' ὅσον ὁ ὅρος, τὸν ὁποῖον ζητοῦμεν εἶναι ἐκ τῶν ἄκρων, ἢ ἐκ τῶν μέσων.

Οὕτως ἔστω ἡ ἀναλογία $18:24::72:x$.

Ἐπειδὴ δὲ ἔχομεν $18 \times x = 24 \times 72$, προκύπτει

$$x = \frac{24 \times 72}{18} = 96.$$

Ὥστε μᾶς δίδει $18 : 24 :: 72 : 96$.

§. 210. Κάποτε τὰ δύο μέσα τῆς ἀναλογίας εἶναι ἀναμεταξύ των ἴσα, καθὼς εἰς τὴν ἀκόλουθον,

$$9 : 12 :: 12 : 16.$$

Ἡ ἀναλογία καλεῖται τότε συνεχὴς ἀναλογία.

Εἰς ταύτην δὲ τὴν περίστασιν τὸ γινόμενον τῶν δύο μέσων εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετράγωνον ἑνὸς αὐτῶν, καὶ ἑπομένως τὸ τετράγωνον εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων. Λοιπὸν ἓν τῶν μέσων ἔχει τιμὴν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ γινομένου τῶν ἄκρων.

Ἔστω π. χ. ἡ ἀναλογία $50 : x :: x : 8$, ὄντος x τοῦ μέσου ἀγνώστου ὅρου συνεχοῦς τινὸς ἀναλογίας. Ἔχομεν δὲ

$$x^2 = 50 \times 8 = 400,$$

ἐκ τοῦ ὁποίου ἐξάγομεν $x = \sqrt{400} = 24$.

Καὶ διὰ τοῦτο $50 : 20 :: 20 : 8$.

Ἐν γένει, ἔστω ἡ ἀναλογία $\alpha : x :: x : \beta$, ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει $x^2 = \sqrt{\alpha \times \beta}$. Αὕτη ἡ τιμὴ τοῦ x καλεῖται μέση ἀνάλογος μεταξὺ δύο ἀριθμῶν.

§. 211. Ἄλλαι ἰδιότητες. Πολλαπλασιαζομένων, ἢ διαρουμένων τῶν δύο πρώτων ὅρων, ἢ τῶν δύο τελευταίων διὰ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ, ἡ ἀναλογία δὲν ἀλλοιοῦται.

Τῷ ὄντι, ὁ λόγος τῶν δύο πρώτων ὅρων, ἢ ἐκεῖνος τῶν δύο τελευταίων εἶναι (ἀριθμ. 201) κλασματικός τις ἀριθμὸς, καὶ ἠξεύρομεν ὅτι πολλαπλασιάζοντες ἢ διαιροῦντες τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος διὰ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ, δὲν ἀλλάττομεν τὴν τιμήν του.

Παρομοίως πολλαπλασιαζομένων ἢ διαιρουμένων τῶν δύο ἡγουμένων, καὶ πολλαπλασιαζομένων ἢ διαιρουμένων τῶν δύο ἑπομένων δι᾽ ἑνὸς καὶ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ, ἡ ἀναλογία δὲν χαλᾶται. Ἐπειδὴ διὰ ταύτης τῆς μεταμορφώσεως, πολλαπλασιάζομεν εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν ἓν τῶν ἄκρων καὶ ἓν τῶν μέσων, ἢ ἓν τῶν μέσων, καὶ ἓν τῶν ἄκρων διὰ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ. Λοιπὸν τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων μένει πάντοτε ἴσον μὲ ἐκεῖνο τῶν μέσων. Ὅθεν κατὰ τὸ ἀντίστροφον τῆς θεμελιώδους ἰδιότητος, αὕτη εἶναι συνθήκη ἱκανὴ, ὥστε οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ νὰ ἦναι ἀνάλογοι.

Δυνάμεθα, ὡς εἰς τὴν Ἰσοδιαφορὰν, νὰ μεταλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν ἄκρων τῆς ἀναλογίας εἰς ἐκείνην τῶν μέσων, ἢ νὰ θέσωμεν τὰ ἄκρα εἰς τὴν θέσιν τῶν μέσων, χωρὶς ἡ ἀναλογία νὰ παύῃ ἀπὸ τοῦ νὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ τῶν τεσσάρων ἀριθμῶν.

Π. χ. ἐκ τῆς ἀναλογίας . . . 36 : 12 :: 75 : 25
ἐξάγομεν διαδοχικῶς.

1ον. Ἀλλάττοντες τὰ ἄκρα . . 25 : 12 :: 75 : 36

2ον. Ἀλλάττοντες τὰ μέσα . . 36 : 75 :: 12 : 25

3ον. Ἀντεισάγοντες τὰ μέσα εἰς τὴν θέσιν τῶν ἄκρων. . . 12 : 36 :: 25 : 75

Ὁ σταθερὸς λόγος εἶναι διαφορετικὸς ἀπὸ μίαν ἀναλογίαν εἰς ἄλλην· οὕτως ὁ λόγος εἶναι 3 εἰς τὴν πρώτην, $\frac{25}{13}$ εἰς τὴν δευτέραν, $\frac{12}{25}$ εἰς τὴν τρίτην, $\frac{12}{36}$ ἢ $\frac{1}{3}$ εἰς τὴν τετάρτην· ὅμως ὄχι διὰ τοῦτο ἑκάστη τῶν ἀναλογιῶν δὲν ὑπάρχει, ἐπειδὴ μετὰ τὰς τοιαύτας μεταβολὰς εἶναι φανερὸν, ὅτι τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων μένει πάντοτε ἴσον μὲ ἐκεῖνο τῶν μέσων.

Σ. Κ. Οἱ περισσότεροι συγγραφεῖς τῆς γεωμετρίας σημειόνουσιν ὑπὸ τῆς ὀνομασίας Ἐναλλὰξ καὶ Ἀντίστροφον, τὰς διαφόρους μεταλλαγὰς, τὰς ὁποίας ἔκαμαν ἐπὶ τῶν ὅρων μιᾶς ἀναλογίας.

Αἱ τροπαὶ, αἵτινες συνίστανται εἰς τὸ νὰ πολλαπλασιάσουν ἢ νὰ διαιρέσουν τοὺς ὅρους, καλοῦνται τροπαὶ τοῦ πολλαπλασιάζειν ἢ διαιρεῖν.

Αἱ ἀκόλουθοι ἰδιότητες εἶναι εὐχρηστότατοι εἰς τὴν Γεωμετρίαν, καὶ ἀπαιτοῦσιν ὅλην τὴν προσοχὴν τῶν ἀρχαρίων.

§. 212. Πρώτη. Εἰς κάθε ἀναλογίαν τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ τῶν δύο πρώτων ὅρων περιέχεται εἰς τὸν δεύτερον ὅρον, καθὼς τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ τῶν δύο ἄλλων ὅρων περιέχεται εἰς τὸν τέταρτον.

Οὕτως ἡ ἀναλογία $72 : 24 :: 45 : 15$
γίνεται, ὅταν προσθέσωμεν $72 + 24 : 24 :: 45 + 15 : 15$
καὶ, ὅταν ἀφαιρέσωμεν . $72 - 24 : 24 :: 45 - 15 : 15$,
ἀναλογία, τὴν ὁποίαν δυνάμεθα εὐκόλως νὰ βεβαιώσωμεν· Ἀλλὰ διὰ νὰ δώσωμεν λόγον ταύτης τῆς ἰδιότητος μὲ τρόπον γενικὸν, παρατηροῦμεν, ὅτι αὐξανομένου, ἢ ἐλαττουμένου ἑκάστου ἡγουμένου ἀπὸ τὸν ἑπόμενόν του, αὐξάνεται ἢ ἐλαττοῦται κατὰ μονάδα ἕκαστος τῶν δύο λόγων· καὶ ἐπειδὴ οὗτοι οἱ λόγοι ἦσαν ἴσοι πρότερον, μένουσιν ἴσοι καὶ μετὰ τὴν αὔξησιν καὶ μετὰ τὴν ἐλάττωσιν.

Ἀπὸ τὴν ἀναλογίαν $72 \pm 24 : 24 :: 45 \pm 15 : 15$
($\pm$ προφέρεται πλέον ἢ μεῖον) ἐξάγομεν, ἀλλάττοντες τοὺς μεσαίους ἀπὸ θέσιν (ἀριθμ. 211)

$$72 \pm 24 : 45 \pm 15 :: 24 : 15.$$

ἀλλ' ἔχομεν ἤδη $72 : 24 :: 45 : 15$
ἢ . . . . . $72 : 45 :: 24 : 15$.