```
47.954|36              36
27    |27·             36
----                  ----
20 9                  216
                     108
                     ----
47954                1296
46656                  36
-----                ----
 1298                7776
                     3888
                    -----
                    46656
```

Τοῦ ἀριθμοῦ 47954 περιλαμβανομένου μεταξὺ 1000 καὶ 1000000, ἡ ῥίζα του εὑρίσκεται μεταξὺ τοῦ 10 καὶ 100, τουτέστι περικλείει δεκάδας καὶ μονάδας. Ὁ κύβος τῶν δεκάδων εὑρίσκεται εἰς τὰς 47 χιλιάδας, καὶ δεικνύομεν, ὡς εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα, ὅτι 3, ῥίζα τοῦ μεγαλητέρου κύβου τοῦ εἰς τὸ 47 περιεχομένου, ἐκφράζει τὰς δεκάδας. Ἀφαιροῦμεν τὸν κύβον τοῦ 3 ἢ τὸ 27 ἀπὸ 47, καὶ ἔχομεν ὑπόλοιπον 20, κατεβάζομεν εἰς τὸ πλευρὸν τοῦ ὑπολοίπου μόνον τὸ ψηφίον 9 τοῦ τμήματος 954, καὶ ὁ ἀριθμὸς 209 ἑκατοντάδες, σύγκειται ἐκ τοῦ τριπλασίου τετραγώνου τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας, πλέον τὰ κρατηθέντα ἀπὸ τὰ ἄλλα μέρη. Λοιπὸν ἐὰν σχηματίσωμεν τὸ τριπλοῦν τετράγωνον τῶν 3 δεκάδων, τὸ ὁποῖον δίδει 27 ἑκατοντάδας, καὶ διαιρέσωμεν 209 διὰ 27, τὸ πηλίκον 7 εἶναι τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τῆς ῥίζης, ἢ ψηφίον τι πολλὰ μεγάλον. Ὑψόνοντες δὲ 37 εἰς τὸν κύβον, εὑρίσκομεν 50653, ἀριθμὸν μεγαλήτερον τοῦ 47954.

Ἐὰν ὅμως σχηματίσωμεν τὸν κύβον τοῦ 36, εὑρίσκομεν 46656, ἀριθμὸν, ὅστις ἀφαιρεθεὶς ἀπὸ 47954, ὡς φαίνεται εἰς τὸν ἄνω πίνακα, δίδει ὑπόλοιπον 1298· οὕτως ὁ δεδομένος ἀριθμὸς δὲν εἶναι, τέλειος κύβος· καὶ ἡ ῥίζα του εἶναι μεῖον μονάδος ἴση μὲ 36.

Τῷ ὄντι ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ καὶ τοῦ κύβου τοῦ 36 εἶναι, ὡς εἴδομεν, 1298, ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ $3\times(36)^2+3\times36+1$, διαφορὰ μεταξὺ $(37)^3$ καὶ $(36)^3$, ἐπειδὴ ἐλάβαμεν εἰς τὸν δρόμον τῆς πράξεως 3888, τὸ τριπλοῦν τοῦ τετραγώνου 36.

§. 195. Προκείσθω ἤδη νὰ ἐξάξωμεν τὴν κυβικὴν ῥίζαν ἀριθμοῦ περισσότερον ἀπὸ ἓξ ψηφία, τοῦ 43725658 λόγου χάριν.

```
43.725.658|352              35
27        |27 . . . .       35  . . . . 3675
---                        ----
167                         175
43725                      105
42875                      ----
-----                      1225
  8506                       35
                           ----
                           6125
                          3675
                          -----
                          42875

          43725658                          352
          43614208                          352
          --------                          ---
ὑπόλοιπον.  111450                          704
                                           1760
                                          1056
                                          ------
                                          123904
                                             352
                                          ------
                                          247808
                                         619520
                                        371712
                                        --------
                                        43614208
```

Ὁποιαδήποτε καὶ ἂν ἦναι ἡ ζητουμένη ῥίζα, ἀναγκαίως ἔχει περισσότερον ἀπὸ ἓν ψηφίον· ὅθεν τὴν θεωροῦμεν ὡς σύνθετον ἀπὸ μονάδας καὶ δεκάδας μόνον (αἱ δεκάδες δύνανται νὰ ἐκφρασθῶσι μὲ περισσότερα παρὰ ἓν ψηφίον).

Ὁ κύβος δὲ τῶν δεκάδων δίδει τοὐλάχιστον χιλιάδας· καὶ διὰ τοῦτο ἀναγκαίως εὑρίσκεται εἰς τὰ ἀριστερὰ τῶν τριῶν τελευταίων ψηφίων, 658. Λέγω τώρα, ὅτι ἐὰν ἐξάξωμεν τὴν ῥίζαν τοῦ μεγαλητέρου κύβου τοῦ περιεχομένου εἰς τὸ ἀριστερὸν μέρος 43725, θεωρούμενον μὲ τὴν ἀπόλυτόν του τιμὴν, θέλομεν ἔχει τὸν ἀριθμὸν τῶν δεκάδων τῆς ὅλης ῥίζης.

Τῷ ὄντι ἔστω α ἡ ῥίζα τῶν 43725, ὡς ἔγγιστα μεῖον μιᾶς μονάδος, ἕπεται ὅτι εἰς τὸ α^3 καὶ $(\alpha+1)^3$ περιέχονται αἱ 43725. Παρομοίως λοιπὸν καὶ 43725000 εὑρίσκεται μεταξὺ $\alpha^3\times1000$ καὶ $(\alpha+1)^3\times1000$· καὶ ἐπειδὴ οἱ δύο τελευταῖοι οὗτοι ἀριθμοὶ διαφέρουσι μεταξύτων περισσότερον ἀπὸ 1000, συμπεραίνομεν ὅτι καὶ αὐτὸς ὁ δεδομένος ἀριθμὸς 43725658, εὑρίσκεται μεταξὺ $\alpha^3\times1000$, καὶ $(\alpha+1)^3\times1000$· οὕτως ἡ ζητουμένη ῥίζα περιλαμβάνεται μεταξὺ $\alpha\times10$, καὶ $(\alpha+1)10$. Λοιπὸν τέλος πάντων αὕτη εἶναι σύνθετος ἀπὸ α δεκάδας, καὶ ἀριθμόν τινα μονάδων μικρότερον τοῦ 10 *).

---

*) Ἐπειδὴ α^3 διαφέρει τοῦ $(\alpha+1)^3$ κατὰ $3\alpha^2+3\alpha+1$, τὸ δὲ α^3 διαφέρει ἀπὸ τὸ 43725 τὸ περισσότερον $3\alpha^2+3\alpha$, διὰ τοῦτο $1000\alpha^3$ διαφέρει ἀπὸ 43725000 τὸ περισσότερον

$$1000\times3\alpha^2+1000\times3\alpha,$$

καὶ ἐπειδὴ

$$1000\ \alpha^3$$

διαφέρει ἀπὸ τὸ $1000\ (\alpha+1)^3$, κατὰ

$$1000\times3\alpha^2+1000\times3\alpha+1000\times1,$$

διὰ τοῦτο

$$100\ (\alpha+1)^3$$

διαφέρει ἀπὸ 43725000, τ' ὀλιγώτερον 1000. Λοιπὸν $1000\ (\alpha+1)^3 >$ τοῦ $43725000+658$.

Οὕτως τὸ ζήτημα ἄγεται εἰς τὸ νὰ ἐξάξωμεν τὴν κυβικὴν ῥίζαν τοῦ 43725. Ἀλλ᾽ οὗτος ὁ νέος ἀριθμὸς ἐπειδὴ ἔχει περισσότερον ἀπὸ τρία ψηφία, ἡ ῥίζα του περιέχει περισσότερον ἀπὸ ἕν, τουτέστι περιέχει δεκάδας καὶ μονάδας. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὰς δεκάδας, πρέπει νὰ χωρίσωμεν τὰ τρία τελευταῖα ψηφία 725, καὶ νὰ ἐξάξωμεν τὴν ῥίζαν τοῦ μεγαλητέρου κύβου τοῦ περιεχομένου εἰς τὸ 43· (βλέπομεν εὐκόλως τὶ ἔπρεπε νὰ πράξωμεν, ἐὰν ὁ νέος οὗτος ἀριθμὸς εἶχε περισσότερον ἀπὸ τρία ψηφία).

Ὁ μεγαλήτερος κύβος, ὅς τις περιέχεται εἰς τὸ 43 εἶναι 27, τοῦ ὁποίου ἡ ῥίζα εἶναι 3, τὸ ὁποῖον ἐκφράζει τὰς δεκάδας τῆς ῥίζης τοῦ 43725 (ἢ τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων τῆς ὅλης ῥίζης). Ἀφαιροῦντες τὸν κύβον τοῦ 3 ἢ 27, ἀπὸ τὸ 43, ἔχομεν ὑπόλοιπον 16, εἰς τὸ πλευρὸν τοῦ ὁποίου κατεβάζομεν τὸ πρῶτον ψηφίον 7 τοῦ ἀκολούθου τμήματος 725, καὶ οὕτως ἔχομεν 167.

Σχηματίζοντες μετὰ ταῦτα τὸ τριπλοῦν τετράγωνον τῶν 3 δεκάδων, εὑρίσκομεν 27000· καὶ ἐὰν διαιρέσωμεν 167 διὰ τοῦ 27, τὸ πηλίκον 6 εἶναι τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τῆς ῥίζης τῶν 43725, ἢ ψηφίον τι μεγαλήτερον. Μὲ εὐκολίαν δὲ γνωρίζομεν, ὅτι τοῦτο εἶναι πολλὰ μεγάλον. Δοκιμάζοντες δὲ τὸ 5, ὑψόνομεν 35 εἰς τὸν κύβον, καὶ ἔχομεν ἐξαγόμενον 42875, ἀριθμὸν, ὅς τις ἀφαιρεθεὶς ἀπὸ 43725, δίδει ὑπόλοιπον 850. Τοῦτο τὸ ὑπόλοιπον εἶναι προφανῶς μικρότερον παρὰ $3\,(35)^2+3\times35+1$, ἐπειδὴ ἤδη τὸ τετράγωνον τοῦ 35 εἶναι κατὰ τὸν ἄνω πίνακα, ἴσον μὲ 1225· οὕτως 35 εἶναι ἡ ῥίζα τοῦ μεγαλητέρου κύβου, ὅς τις περιέχεται εἰς τὰς 43725. Εἶναι λοιπὸν ὁ ὅλος ἀριθμὸς τῶν δεκάδων τῆς ζητουμένης ῥίζης.

Διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὰς μονάδας, κατεβάζομεν εἰς τὸ πλευρὸν τοῦ ὑπολοίπου 850, τὸ πρῶτον ψηφίον 6 τοῦ τελευταίου τμήματος 658, ὥστε ἔχομεν 8506. Σχηματίζομεν προσέτι τὸ τριπλοῦν τετράγωνον τῶν 35 δεκάδων (τὸ ὁποῖον εἶναι εὔκολον, ἐπειδὴ εἰς τὴν δοκιμὴν τοῦ ἀνωτέρω ψηφίου εἴχαμεν σχηματίσει τὸ τετράγωνον τοῦ 35). Μετὰ ταῦτα διαιροῦμεν 8506 διὰ τοῦ τριπλοῦ τετραγώνου 3675· τὸ πηλίκον εἶναι 2, τὸ ὁποῖον δοκιμάζομεν ὑψόνοντες 352 εἰς τὸν κύβον. Λαμβάνομεν οὕτως 43614208, ἐξαγόμενον μικρότερον τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ, τὸ ὁποῖον ἀφαιροῦντες ἐκ τούτου, λαμβάνομεν ὑπόλοιπον 111450 Λοιπὸν 352 εἶναι ἡ κυβικὴ ῥίζα τῶν 43725658 μεῖον μονάδος.

Κανὼν Γενικός. Διὰ νὰ ἐξάξωμεν τὴν κυβικὴν ῥίζαν ἀκεραίου ἀριθμοῦ, χωρίζομεν τὸν ἀριθμὸν εἰς τμήματα, ἀπὸ τρία ψηφία ἕκαστον, ἀρχίζοντες ἀπὸ τὰ δεξιὰ, ἕως νὰ φθάσωμεν εἰς τμῆμα ἑνὸς δύο, ἢ τριῶν ψηφίων τὸ περισσότερον (ὁ ἀριθμὸς τῶν τμημάτων εἶναι ἴσος μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν ψηφίων τῆς ῥίζης)· ἐξάγομεν τὴν ῥίζαν τοῦ μεγαλητέρου κύβου ὅστις περιέχεται εἰς τὸ πρῶτον ἐν ἀριστερᾷ τμῆμα καὶ ἀφαιροῦμεν τοῦτον τὸν κύβον ἀπὸ τὸ πρῶτον τμῆμα· κατεβάζομεν εἰς τὸ πλευρὸν τοῦ ὑπολοίπου τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ δευτέρου τμήματος, καὶ διαιροῦμεν τὸν οὕτως σχηματισμένον ἀριθμὸν διὰ τοῦ τριπλοῦ τετραγώνου τοῦ ἤδη εὑρεθέντος εἰς τὴν ῥίζαν ψηφίου γράφομεν δὲ τὸ πηλίκον εἰς τὰ δεξιὰ τούτου τοῦ ψηφίου, καὶ ὑψόνομεν τὴν ἕνωσιν τῶν δύο ψηφίων εἰς τὸν κύβον· Ἐὰν ὁ κύβος οὗτος εἶναι μεγαλήτερος τῆς ἑνώσεως τῶν δύο πρώτων τμημάτων τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ, ἐλαττοῦμεν τὸ πηλίκον ἀπὸ μίαν ἢ πολλὰς μονάδας, ἕως νὰ εὕρωμεν κύβον δυνάμενον νὰ ἀφα ρεθῇ ἀπὸ τὴν ἕνωσιν τῶν δύο πρώτων τμημάτων. Ἐκτελεσθείσης τῆς ἀφαιρέσεως, κατεβάζομεν εἰς τὸ πλευρὸν τοῦ ὑπολοίπου τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ τρίτου τμήματος, μετὰ ταῦτα διαιροῦμεν τὸν οὕτως σχηματισμένον ἀριθμὸν διὰ τοῦ τριπλοῦ τετραγώνου τῆς ἑνώσεως τῶν δύο ἤδη εὑρεθέντων ψηφίων· τὸ πηλίκον ἐὰν δὲν εἶναι πολλὰ μεγάλον, πρέπει νὰ εἶναι τοιοῦτον, ὥστε γράφοντές το εἰς τὰ δεξιὰ τῶν δύο πρώτων ψηφίων τῆς ῥίζης, καὶ ὑψόνοντες τὸν ἐντεῦθεν ἐξαγόμενον ἀριθμὸν εἰς κύβον, ἠμποροῦμεν ὕστερον νὰ ἀφαιρέσωμεν τοῦτο τὸ γινόμενον ἀπὸ τὴν ἕνωσιν τῶν πρώτων τριῶν τμημάτων. Γενομένης ταύτης τῆς νέας ἀφαιρέσεως κατεβάζομεν εἰς τὸ πλευρὸν τοῦ ὑπολοίπου τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ τετάρτου τμήματος, καὶ ἐξακολουθοῦμεν τὴν αὐτὴν σειρὰν τῶν πράξεων, ἕως νὰ κατεβάσωμεν ὅλα τὰ τμήματα.

Παρατήρησις. Πολλάκις εἰς τὴν ὁδὸν τῶν πράξεων ὑποψιαζόμεθα, ὅτι ἓν τῶν πηλίκων, περὶ τῶν ὁποίων ὡμιλήσαμεν, εἶναι μεγαλώτατον, καὶ δυνάμεθα τότε νὰ ἐλαττώσωμεν αὐτὸ ἀπὸ δύο ἢ περισσοτέρας μονάδας. Ἀλλὰ ὑψόνοντες εἰς κύβον τὴν ἤδη εὑρεθεῖσαν ῥίζαν ἀκολουθημένην ἐκ τούτου τοῦ ψηφίου, καὶ ἀφαιροῦντες τοῦτον τὸν κύβον ἀπὸ τὴν ἕνωσιν τῶν τμημάτων, τὰ ὁποῖα θεωροῦμεν εἰς τὸν δεδομένον ἀριθμὸν, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν μέγα ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον μᾶς κάμνει νὰ νομίσωμεν, ὅτι τὸ τελευταῖον ληφθὲν τῆς ῥίζης ψηφίον εἶναι πολλὰ μικρόν· θέλομεν βεβαιωθῇ περὶ τούτου διὰ τοῦ ἀκολούθου χαρακτηριστικοῦ, ὅτι „τὸ ὑπόλοιπον ὑπερβαίνει τὸ τριπλοῦν τοῦ τετραγώνου τῆς ἤδη εὑρεθείσης ῥίζης, πλέον τὸ τριπλοῦν αὐτῆς τῆς ἰδίας ῥίζης, πλέον ἕν.

Εἰς ταύτην τὴν περίστασιν αὐξάνομεν τὴν ῥί
ἀπὸ μίαν ἢ περισσοτέρας μονάδας τάξεως τοῦ τελ
ταίου ληφθέντος ψηφίου.

Ἰδοὺ παραδείγματα, ἐπὶ τῶν ὁποίων δυνάμεθα γυμνασθῶμεν.

$\sqrt[3]{483249}=78$ μὲ ὑπόλοιπον 8697.

$\sqrt[3]{91632508641}=4508$ μὲ ὑπόλοιπον 206441

$\sqrt[3]{32977340218432}=32068$ ἀκριβῶς.

§. 196. Ἐξαγωγὴ τῆς κυβικῆς ῥι
διὰ προσεγγίσεως.

Ὅταν ὁ δεδομένος ἀριθμὸς δὲν ἦναι ὁ
ἄλλου ἀκεραίου ἀριθμοῦ, ἡ ἀνωτέρω μέθοδος δίδ
ἀκέραιον μέρος τῆς ῥίζης· τὸ δὲ κλάσμα, τὸ ὁ
ἔχει νὰ καταστήσῃ πλήρη τὴν ῥίζαν, εἴδομεν (ἀ
192) ὅτι δὲν προσδιορίζεται μὲ ἀκρίβειαν· ἀλλ
νάμεθα νὰ εὕρωμεν ἄλλο κλάσμα διαφορετικὸν τ
τουμένου κατὰ ποσότητα τόσον μικρὰν, ὅσην θέ
καὶ τοῦτο κατὰ κανόνα τινὰ ἀνάλογον μὲ ἐκεῖν
ἀριθμοῦ 185.

Ἐν γένει ἂς ἐξωχθῇ ἡ κυβικὴ ῥίζα ἢ ἡ τρ
ἀριθμοῦ α, μεῖον τοῦ κλάσματος $\frac{1}{\nu}$.

Ὁ ἀριθμὸς α βάλλεται ὑπὸ τὴν μορφὴν

Ἐὰν σημειώσωμεν διὰ ρ τὴν ῥίζαν τοῦ μεγαλητέ
βου, ὅστις περιέχεται εἰς $\alpha\nu^3$, τουτέστι τὴ
τοῦ $\alpha\nu^3$ μεῖον μονάδος, ὁ ἀριθμὸς $\frac{\alpha\nu^3}{\nu^3}$, ἢ α
λαμβάνεται μεταξὺ $\frac{\rho^3}{\nu^3}$ καὶ $\frac{(\rho+1)^3}{\nu^3}$. Λοιπὸν
$\sqrt[3]{\alpha}$ εὑρίσκεται μεταξὺ τῶν ῥιζῶν τούτων·

ἀριθμῶν, ἢ μεταξὺ $\frac{\rho}{\nu}$ καὶ $\frac{\rho+1}{\nu}$. Λοιπὸν τέλος πάντων, $\frac{\rho}{\nu}$ εἶναι ἡ ζητουμένη ῥίζα μεῖον τοῦ κλάσματος $\frac{1}{\nu}$.

Οὕτως διὰ νὰ ἐξάξωμεν τὴν τρίτην ῥίζαν ἀριθμοῦ τινὸς μεῖον τοῦ $\frac{1}{\nu}$, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμὸν ἐπὶ τὸν κύβον τοῦ παρονομαστοῦ ν· ἐξάγομεν τοὐλάχιστον μεῖον μονάδος τὴν κυβικὴν ῥίζαν τοῦ γινομένου, καὶ διαιροῦμεν τὸ ἐξαγόμενον διὰ τοῦ ν.

Παράδειγμα. Ζητεῖται ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ 15 μεῖον $\frac{1}{12}$. Ἔχομεν $15\times\overline{12}^3=15\times1728=$ 25920· ἀλλ' ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ 25920 μεῖον μονάδος εἶναι 29· λοιπὸν ἡ ζητουμένη ῥίζα εἶναι $\frac{29}{12}$ ἢ $2\frac{5}{12}$.

Εὑρίσκομεν παρομοίως

$$\sqrt[3]{47}=\frac{72}{20}=3\frac{12}{20}\text{ μεῖον }\frac{1}{20}.$$

Ἡ προσέγγισις εἰς δεκαδικὰ εἶναι συνέπεια τοῦ προηγουμένου κανόνος.

Προκείσθω νὰ ἐκτιμηθῇ $\sqrt[3]{25}$ μεῖον 0,001.

Πρέπει (ἀριθμ. 196) νὰ πολλαπλασιάσωμεν 25 ἐπὶ τὸν κύβον τῶν 1000 ἢ ἐπὶ 1000000000, τουτέστι νὰ προσθέσωμεν ἐννέα μηδενικὰ εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ 25, ὥστε θέλομεν ἔχει 25000000000· ἀλλ' ἡ κυβικὴ ῥίζα τούτου τοῦ ἀριθμοῦ εἶναι 2924 μεῖον μονάδος· λοιπὸν 2,924 εἶναι ἡ ζητουμένη ῥίζα, καὶ διαφέρει τῆς ἀληθινῆς μεῖον τοῦ $\frac{1}{1000}$.

Ἐν γένει διὰ νὰ ἐκτιμήσωμεν τὴν κυβικὴν ῥίζα ἀκεραίου τινὸς ἀριθμοῦ εἰς δεκαδικὰ, προσθέτομεν ει τὰ δεξιὰ τοῦ ἀριθμοῦ τρεῖς φοραῖς τόσα μηδενικὰ ὅσα ψηφία δεκαδικὰ θέλομεν νὰ ἔχωμεν εἰς τὴν ῥίζαι Ἐξάγομεν μεῖον μονάδος τὴν κυβικὴν ῥίζαν τοῦ νέο ἀριθμοῦ. Μετὰ ταῦτα χωρίζομεν κατὰ τὰ δεξιὰ τε ἐξαγομένου τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν τῶν δεκαδικῶ ψηφίων.

§. 198. Ἔστω ἤδη $\frac{\alpha}{\beta}$ κλάσμα ἢ κλασματικ ἀριθμὸς, τοῦ ὁποίου θέλομεν νὰ ἐξάξωμεν τὴν κυβ κὴν ῥίζαν. Κατασταίνομεν πρότερον τὸν παρονομ στήν του τέλειον κύβον, πολλαπλασιάζοντες τοὺς δ ὅρους του ἐπὶ τὸ τετράγωνον τούτου τοῦ παρονομαστο καὶ τὸ κλάσμα τρέπεται εἰς τοῦτο $\frac{\alpha\beta^2}{\beta^3}$. Σημειωθέντ δὲ διὰ ρ τοῦ ἀκεραίου μέρους τῆς κυβικῆς ῥίζης τ $\alpha\beta^2$, ἕπεται κατὰ συλλογισμὸν τινὰ ἀνάλογον μὲ ἐκ νον τοῦ ἀριθμοῦ 196, ὅτι $\frac{\rho}{\beta}$ εἶναι ἡ κυβικὴ ῥίζα τ $\frac{\alpha}{\beta}$ μεῖον τοῦ κλάσματος $\frac{1}{\beta}$.

Ἐὰν ἠθέλαμεν νὰ λάβωμεν μεγαλήτερον βα μὸν προσεγγίσεως, ἠθέλαμεν ἀναζητήσει τιμὴν πλ. ἐγγίζουσαν εἰς τὸ $\sqrt[3]{\alpha\beta^2}$, καὶ νὰ διαιρέσωμεν ἐξαγόμενον διὰ τοῦ β.

Ὅταν ὁ παρονομαστὴς μὴ ὢν ἤδη κύβος τέλειος, περιέχῃ παράγοντας, μερικοὶ τῶν ὁποίων εἶναι τέλειοι κύβοι, καὶ οἱ ἄλλοι τέλεια τετράγωνα, [ἡ τροπὴ τοῦ κλάσματος εἶναι ἁπλουστέρα.

Ἔστω π. χ. τὸ κλάσμα $\frac{113}{360}$.

Ὁ ἀριθμὸς 360 δύναται νὰ ἀναλυθῇ εἰς 2^3, $3^3 \cdot 5$. Διὰ τοῦτο, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος διὰ 3×5^2 ἢ 75, τὸ κλάσμα δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν $\frac{113 \times 75}{2^3 . 3^3 . 5^3}$, καὶ ὁ παρονομαστὴς τούτου εἶναι τότε ὁ κύβος τοῦ $2 \times 3 \times 5$ ἢ τοῦ 30. Οὕτως ἀφ' οὗ ἐξάξωμεν τὴν κυβικὴν ῥίζαν τοῦ νέου ἀριθμητοῦ 113×75 ἢ 8475 μεῖον μονάδος, διαιροῦμεν τὸ προκύπτον 20 διὰ 30, καὶ οὕτως ἔχομεν $\frac{20}{30}$ ἢ $\frac{2}{3}$ τὴν ζητουμένην ῥίζαν μεῖον $\frac{1}{30}$.

§. 199. Ἂς περάσωμεν τώρα εἰς τὴν ἐξαγωγὴν τῆς κυβικῆς ῥίζης τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων.

Ζητεῖται π. χ. ἡ κυβικὴ ῥίζα τῶν 3,1415. Ἐπειδὴ ὁ παρονομαστὴς 10000 δὲν εἶναι τέλειος κύβος, ἀλλὰ ἀνάγεται εἰς 1000×10, τὸν καθισταίνομεν τέλειον κύβον πολλαπλασιάζοντές τον ἐπὶ 100, διὰ τὸ ὁποῖον προσθέτομεν δύο μηδενικὰ εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ δεδομένου δεκαδικοῦ κλάσματος, καὶ οὕτως ἔχομεν 3,141500. Μετὰ ταῦτα ἐξάγομεν μεῖον μονάδος τὴν κυβικὴν ῥίζαν τοῦ ἀριθμητοῦ 3141500, τουτέστι τοῦ ἀριθμοῦ, ἀφαιροῦντες τὴν ὑποδιαστολήν, ἐκ τοῦ ὁποίου ἔχομεν 146. Μετὰ ταῦτα διαιροῦμεν τὸ ἐξαγόμενον διὰ τοῦ 100 ἢ $\sqrt[3]{1000000}$, καὶ εὑρίσκομεν $\sqrt{3,1415} =$ 1,46 μεῖον τοῦ 0,01.

Ἐὰν θέλωμεν μεγαλήτερον βαθμὸν προσεγγίσεως, προσθέτομεν τρεῖς φοραῖς τόσα μηδενικὰ περισσότερον, κατ' ἐξακολούθησιν τοῦ ἀριθμοῦ, παρ' ὅσα ψηφία δεκαδικὰ θέλομεν νὰ ἔχωμεν εἰς τὴν ῥίζαν.

Τέλος πάντων, διὰ νὰ ἐκτιμήσωμεν εἰς δεκαδικὰ τὴν κυβικὴν ῥίζαν κοινοῦ τινὸς κλάσματος, πρέπει νὰ τρέφωμεν τὸν δεδομένον ἀριθμὸν εἰς δεκαδικὰ, καὶ νὰ ἐξακολουθήσωμεν τὴν πρᾶξιν, ἕως νὰ λάβωμεν τρεῖς φοραῖς τόσα ψηφία δεκαδικὰ, ὅσα θέλομεν νὰ εὕρωμεν εἰς τὴν ῥίζαν. Ἡ ὑπόθεσις τότε μᾶς φέρει εἰς τὸ νὰ ἐξάξωμεν τὴν κυβικὴν ῥίζαν δεκαδικοῦ κλάσματος.

Διὰ νὰ τελειώσωμεν, θέλομεν προβάλει τὰ ἀκόλουθα γυμνάσματα.

$$\sqrt[3]{473}, \text{ μεῖον } \frac{1}{20}=\frac{155}{20}.$$

$$\sqrt[3]{79}, \text{ μεῖον } \frac{1}{10000}=4,2908.$$

$$\sqrt[3]{3,00415}, \text{ μεῖον } \frac{1}{10000}=1,4429.$$

$$\sqrt[3]{0,00101}, \text{ μεῖον } \frac{1}{100}=0,10.$$

$$\sqrt[3]{\frac{14}{25}}, \text{ μεῖον } \frac{1}{1000}=0,824.$$

Τὰ δύο συσταθέντα σχόλια (ἀριθμ. 190, κα 191) περὶ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τῶν ἀριθμῶν, ἐφαρμόζονται ἐπίσης εἰς τὴν κυβικὴν ῥίζαν, καὶ ἐν γέν εἰς τὰς ῥίζας ὁποιουδήποτε βαθμοῦ. Δὲν ἠμποροῦμ ὅμως νὰ ἐκθέσωμεν εἰς ταῦτα τὰ στοιχεῖα τὰς μεθόδους τῆς ἐξαγωγῆς τῶν ῥιζῶν βαθμοῦ ἀνωτέρου τ τρίτου· ἐπειδὴ αὗται αἱ μέθοδοι ἐπιστηρίζονται ἐπὶ εἰς τὴν σύνθεσιν δυνάμεως τινὸς ὁποιουδήποτε βα μοῦ ἑνὸς δυωνύμου, καὶ ὁ τύπος, ὅς τις ἔχει σχέσιν μὲ ταύτην τὴν σύνθεσιν, ἀπαιτεῖ πολλὰς ἐκτεταμένας γνώσεις τῆς Ἀλγέβρας. Ἀλλὰ θέλομεν δώσει εἰς τὸ τελευταῖον κεφάλαιον τούτου τοῦ συγγράμματος σύντομόν τι μέσον τοῦ νὰ ἐκτελῶμεν ἐξαγωγὰς ῥιζῶν παντὸς βαθμοῦ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ζ΄.

Ἐφαρμογαὶ τῶν κανόνων τῆς Ἀριθμητικῆς. Θεωρία τῶν λόγων καὶ ἀναλογιῶν.

§. 200. Εἰσαγωγή. Ἀφ' οὗ ἐγνωστοποιήσαμεν τὰς πᾶν εἶδος ἐργασιῶν τῆς ἀριθμητικῆς ἀποβλεπούσας μεθόδους, μᾶς μένει ἀκόμη νὰ ἐκπληρώσωμεν ὄχι εὔκολον μέρος αὐτῆς, δηλαδὴ νὰ διδάξωμεν τοὺς ἀρχαρίους τὸ λύειν ὅλα τὰ ἀριθμητικὰ ζητήματα.

Διακρίνονται δὲ δύο ἀρχικὰ γένη ζητημάτων, τὰ θεωρήματα καὶ τὰ προβλήματα.

Ὅταν ἔχωμεν σκοπὸν νὰ ἀποδείξωμεν τὴν ὕπαρξιν μερικῶν ἰδιοτήτων σχετικῶς εἰς γνωστοὺς καὶ δεδομένους ἀριθμούς, τότε τὸ ζήτημα τοῦτο ὀνομάζεται θεώρημα. Τὸ πέμπτον κεφάλαιον προσφέρει πλῆθος ζητημάτων τούτου τοῦ γένους. Αἱ ἀρχαὶ ἐπὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ δύο ἢ περισσοτέρων παραγόντων καθ' ὁποιανδήποτε τάξιν, καὶ ἐπὶ τῆς διαιρετότητος τῶν ἀριθμῶν, αἱ ἰδιότητες τῶν δεκαδικῶν περιοδικῶν κλα-