νται ἀπὸ τὸ τετράγωνον τῶν μονάδων τῆς ῥίζης·
ιατίζοντες δὲ τὰ τετράγωνα τῶν ἐννέα πρώτων
μῶν, βλέπομεν, ὅτι οὐδὲν τούτων τελειόνει εἰς
ηφία 2, 3, 7, 8.

4^{ον}. Πᾶς ἀριθμὸς, ὅς τις τελειόνει εἰς τὸ ψη-
5, δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον, ἐὰν τὸ ψη-
τῶν δεκάδων του δὲν εἶναι 2. Τὸ χαρακτηριστι-
τοῦτο πορίζεται καὶ αὐτὸ ἀπὸ τὴν σύνθεσιν τοῦ
ιαγώνου ἀριθμοῦ τινὸς ἐκ δύο ἢ περισσοτέρων ψη-
ν. Τὰ δύο τελευταῖα ψηφία τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ
ταύτην τὴν περίστασιν προέρχονται ἀπὸ τὸ τετρά-
ον τῶν μονάδων τῆς ῥίζης· διότι τοῦ ψηφίου τού-
τῶν μονάδων ὄντος 5, τὸ διπλοῦν γινόμενον τῶν
ίδων ἐπὶ τοῦτο τὸ ψηφίον εἶναι ἀναγκαίως εἷς ἀριθ-
ἑκατοντάδων· ἀλλὰ τὸ τετράγωνον τοῦ 5 εἶναι
, λοιπὸν ὁ ἀριθμὸς πρέπει νὰ τελειόνῃ εἰς 25.

5^{ον}. Τέλος πάντων, πᾶς ἀριθμὸς, ὅς τις τε-
ὸνει εἰς ἀριθμὸν περιττὸν μηδενικῶν δὲν εἶναι τέ-
ον τετράγωνον· τοῦτο εἶναι φανερόν· ἐπειδὴ ἐὰν
ίζα ἦτον ἀκριβὴς, αὕτη ἤθελεν εἶναι ἀκέραιος ἀριθ-
τελειόνων εἰς ἓν ἢ περισσότερα μηδενικὰ, τοῦ
ιίου τὸ τετράγωνον ἔπρεπε νὰ περιέχῃ δύο φοραῖς
ειότερα μηδενικὰ, ἀφ' ὅσα δὲν ἤθελεν ἔχει ἡ ῥίζα,
ἑπομένως ἀριθμός τις ἄρτιος μηδενικῶν, τὸ ὁποῖον
ελεν εἶναι ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως.

ξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης διὰ προσεγγίσεως.

§. 185. Ὅταν ἀκέραιός τις ἀριθμὸς δὲν ἦναι
τράγωνον ἄλλου ἀκεραίου ἀριθμοῦ, δὲν δύναται νὰ
ιαι πλέον οὔτε τετράγωνον ἀκριβοῦς κλασματικοῦ
ιθμοῦ (ἀριθμ. 179)· ἀλλ' ἐὰν εἶναι ἀδύνατον νὰ

ἐκτιμήσωμεν μὲ ἀκρίβειαν τὸ κλάσμα, τὸ ὁποῖον μέλλει νὰ καταστήσῃ πλήρη τὴν ῥίζαν· δυνάμεθα τοὐλάχιστιν νὰ τὸ προσδιορίσωμεν ὡς ἔγγιστα, καὶ προσέτι μ' ὅσον θέλομεν βαθμὸν προσεγγίσεως.

Πρὶν δείξωμεν τὰ πρὸς τοῦτο συντείνοντα μέσα παρατηροῦμεν, ὅτι ἐπειδὴ τὸ τετράγωνον κλάσματος, ἢ κλασματικοῦ ἀριθμοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι $\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\alpha}{\beta}$ ἢ $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$, ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$ ἐξ ἐναντίας εἶναι $\frac{\alpha}{\beta}$. Λοιπὸν διὰ νὰ ἐξάξωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν κλάσματος, τοῦ ὁποίου οἱ δύο ὅροι εἶναι τέλεια τετράγωνα, πρέπει νὰ ἐξάξωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ παρονομαστοῦ, καὶ νὰ διαιρέσωμεν αὐτὰς τὰς δύο ῥίζας τὴν μίαν διὰ τῆς ἄλλης.

Κατὰ τοῦτο, ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ζητοῦμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ ἀκεραίου ἀριθμοῦ α διαφέρουσαν τῆς ἀκριβοῦς ὀλιγώτερον παρὰ τὸ κλάσμα $\frac{1}{\nu}$ τουτέστιν ὅτι ζητοῦμεν ἀριθμὸν διαφέροντα τῆς ῥίζης τοῦ α κατὰ ποσότητα τινὰ μικροτέραν τοῦ κλάσματος $\frac{1}{\nu}$.

Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν, ὅτι α εἶναι τὸ αὐτὸ ὡς $\frac{\alpha\nu^2}{\nu^2}$. Ἐὰν σημειώσωμεν διὰ ρ τὸ ἀκέραιον μέρος τῆς ῥίζης τοῦ $\alpha\nu^2$, οὗτος ὁ ἀριθμὸς $\alpha\nu^2$ εὑρίσκετο μεταξὺ τοῦ ρ^2 καὶ $(\rho+1)$. Οὕτω λοιπὸν $\frac{\alpha\nu^2}{\nu^2}$ περιέχεται μεταξὺ $\frac{\rho^2}{\nu^2}$ καὶ $\frac{(\rho+1)^2}{\nu^2}$, καὶ ἑπομένως ἡ ῥίζ ού α περιέχεται μεταξύ εκείνων του $\frac{\rho^2}{\nu^2}$ καί $\frac{(\rho+1)^2}{\nu^2}$, τουτέστι μεταξύ $\frac{\rho}{\nu}$ καί $\frac{\rho+1}{\nu}$. Λοιπόν $\frac{\rho}{\nu}$ εκφράζει τήν τετραγωνικήν ρίζαν τού α, καί τό κλάσμα είναι μικρότερον τού κλάσματος $\frac{1}{\nu}$.

Έκ τούτου συμπεραίνομεν τήν ακόλουθον μέθοδον: Πολλαπλασιάζομεν τόν δεδομένον αριθμόν επί τό τετράγωνον τού παρονομαστού ν τού κλάσματος, τό οποίον προσδιορίζει τόν βαθμόν τής προσεγγίσεως, τόν οποίον θέλομεν νά έχωμεν· εξάγομεν τό ακέραιον μέρος τής τετραγωνικής ρίζης τού γινομένου, καί διαιρούμεν τό ακέραιον τούτο μέρος διά τού παρονομαστού ν.

Έξαχθήτω λόγου χάριν ή τετραγωνική ρίζα τού 59 μείον $\frac{1}{12}$.

Πολλαπλασιάζομεν 59 επί τό τετράγωνον τού 12 ή επί 144, καί έχομεν 8496, τού οποίου τό ακέραιον μέρος τής ρίζης είναι 92. Λοιπόν $\frac{92}{12}$ ή $\frac{93}{12}$ είναι ή ρίζα τού 59 μείον $\frac{1}{12}$.

Άς επαναλάβωμεν επί τούτου τού μερικού παραδείγματος τήν δείξιν, τήν οποίαν ανωτέρω ανεπτύξαμεν.

Ό αριθμός 59 δύναται νά τεθή υπό τήν μορφήν $\frac{59\times(12)^2}{(12)^2}$, ή αφ' ού εκτελεσθούν οί υπολογιμοὶ τοῦ ἀριθμητοῦ $\frac{8496}{(12)^2}$. Ἀλλ' ἐπειδὴ ἡ ῥίζα τοῦ 8496 μεῖον μονάδος, εἶναι 92, ἕπεται ὅτι $\frac{8496}{(12)^2}$ ἢ 59 περιέχεται μεταξὺ $\frac{(92)^2}{(12)^2}$ καὶ $\frac{(93)^2}{(12)^2}$. Λοιπὸν ἡ ῥίζα τοῦ 59 περιέχεται καὶ αὐτὴ μεταξὺ τοῦ $\frac{92}{12}$ καὶ $\frac{93}{12}$· τουτέστιν αὕτη ἡ ῥίζα διαφέρει τῶν $\frac{92}{12}$ κατά τι κλάσμα μικρότερον τοῦ $\frac{1}{12}$.

Τῷ ὄντι τὰ τετράγωνα τῶν $\frac{92}{12}$ καὶ $\frac{93}{12}$ εἶναι $\frac{8464}{(12)^2}$ καὶ $\frac{8649}{(12)^2}$, ἀριθμοὶ, οἱ ὁποῖοι περιέχουν τὸ $\frac{8496}{(12)^2}$ ἢ 59.

Εὑρίσκομεν διὰ τῆς αὐτῆς μεθόδου . . . . $\sqrt{11}$ μεῖον $\frac{1}{15}=\frac{49}{15}=3\frac{4}{15}$· $\sqrt{223}$ μεῖον $\frac{1}{40}=14\frac{37}{40}$.

Σ. Κ. Ἡ τέχνη, ἥτις χρησιμεύει ὡς βάσις τοῦ νὰ πλησιάζωμεν εἰς τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἀκεραίου τινὸς ἀριθμοῦ, συνίσταται εἰς τὸ νὰ περιλαμβάνωμεν τὸν δεδομένον ἀριθμὸν μεταξὺ εἰς τὰ τετράγωνα δύο ἄλλων κλασματικῶν ἀριθμῶν, τῶν ὁποίων ὁ παρονομαστὴς νὰ εἶναι ἐκεῖνος τοῦ κλάσματος, τὸ ὁποῖον προσδιορίζει τὴν προσέγγισιν· καὶ οἱ ἀριθμηταί των νὰ μὴ διαφέρωσιν ἀναμεταξύ τους, εἰμὴ κατὰ τὴν μονάδα.

§. 186. Ἡ προσέγγισις εἰς δεκαδικὰ, ἥτις εἶναι ἡ πλέον συνειθισμένη, εἶναι συνέπεια τοῦ προηγουμένου κανόνος. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἀκεραίου ἀριθμοῦ μεῖον τοῦ $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, πρέπει κατὰ τὸν κανόνα τοῦτον νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν δεδομένον ἀριθμὸν ἐπὶ $(10)^2$, $(100)^2$, $(1000)^2$ . . . ἤ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ αὐτὸ, νὰ προσθέσωμεν εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ ἀριθμοῦ, 2, 4, 6, . . . μηδενικά. Μετὰ ταῦτα νὰ ἐξάξωμεν τὴν ῥίζαν τοῦ γινομένου μεῖον μιᾶς μονάδος, καὶ νὰ διαιρέσωμεν τὴν ῥίζαν διὰ τοῦ 10, 100, 100 . . .

Λοιπὸν διὰ νὰ εὕρωμεν πεπερασμένον ἀριθμὸν δεκαδικῶν ψηφίων εἰς τὴν ῥίζαν, γράφομεν εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ δύο φοραῖς τόσα μηδενικὰ, ὅσα ψηφία δεκαδικὰ θέλομεν νὰ ἔχωμεν. Ἐξάγομεν ἔπειτα τὸ ἀκέραιον μέρος τῆς ῥίζης τοῦ νέου ἀριθμοῦ, καὶ χωρίζομεν κατὰ τὰ δεξιὰ τοῦ ἐξαγομένου τὰ ζητούμενα δεκαδικὰ ψηφία.

Ἐξαχθήτω λόγου χάριν ἡ τετραφωνικὴ ῥίζα τοῦ 7 μεῖον $\frac{1}{1000}$.

Ἀφ' οὗ προσθέσωμεν ἓξ μηδενικὰ εἰς τὰ διξιὰ τοῦ 7, ἔχομεν 7000000, ἀριθμὸν, τοῦ ὁποίου ἡ ῥίζα, ἐξαγομένη κατὰ τὴν μέθοδον τοῦ ἀριθμοῦ 182, ἔχει ἀκέραιον μέρος 2645. Λοιπὸν 2, 645 εἶναι ἡ ζητουμένη ῥίζα, τουτέστιν ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 7 περιέχεται μεταξὺ 2, 645 καὶ 2, 646.

7.0 0.0 0.0 0.0 0	2645	
4	46 . . .	524
30.0	6	4
27 6	276	2096
2 4 0.0		
2 0 9 6		5285
3 0 4 0.0		5
2 6 4 2.5		26425
3 9 7 5		

Σ. Κ. Ἐπειδὴ, ἀφ' οὗ ἐπροσθέσαμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀναγκαίων μηδενικῶν, ἐχωρίσαμεν τὸν ἀριθμὸν εἰς τμήματα ἀνὰ δύο ψηφία ἀρξάμενοι ἀπὸ τὰ δεξιὰ, δυνάμεθα νὰ μὴν γράψωμεν ἀπὸ τὴν ἀρχὴν τὰ τμήματα ἀπὸ δύο μηδενικὰ, καὶ νὰ τὰ προσθέσωμεν μόνον, ὅταν θέλωμεν νὰ προσδιορίσωμεν νέον ἄλλο ψηφίον δεκαδικὸν εἰς τὴν ῥίζαν.

Εὑρίσκομεν κατὰ τούτους τοὺς κανόνας, ὅτι $\sqrt{29}$ μεῖον $\frac{1}{100}=5,38\cdot$ καὶ $\sqrt{227}$ μεῖον $\frac{1}{10000}=15,0665$.

§. 187. Ἐξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τῶν κλασμάτων.

Ἔστω $\frac{\alpha}{\beta}$ τὸ προβαλλόμενον κλάσμα.

Κατὰ πρῶτον αὐτὸ δύναται νὰ τρεφθῇ εἰς τοῦτο $\frac{\alpha\beta}{\beta^2}$ (τὸ ὁποῖον κάμνομεν πολλαπλασιάζοντες τοὺς δύο του ὅρους ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν β)· τούτου τεθέντος, ἐὰν σημειώσωμεν διὰ ρ τὸ ἀκέραιον μέρος τῆς ῥίζης τοῦ ἀριθμητοῦ $\alpha\beta$, ἕπεται, ὅτι $\frac{\alpha\beta}{\beta 2}$ ἢ $\frac{\alpha}{\beta}$ περιέχεται μεταξὺ τοῦ $\frac{\rho^2}{\beta^2}$ καὶ $\frac{(\rho+1)^2}{\beta^2}$. Λοιπὸν ἡ ῥίζα τοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$ εὑρίσκεται ἀναμεταξὺ τοῦ $\frac{\rho}{\beta}$ καὶ $\frac{\rho+1}{\beta}$· οὕτως $\frac{\rho}{\beta}$ παριστάνει τὴν ῥίζαν τοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$, μεῖον κλάσματος, σημειωμένου διὰ τοῦ $\frac{1}{\beta}$.

Λοιπὸν διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἑνὸς κλάσματος, καθιστάνομεν κατὰ πρῶτον τὸν παρονομαστήν του τέλειον τετράγωνον, πολλαπλασιάζοντες τοὺς δύο του ὅρους ἐπὶ τὸν παρονομαστήν. Ἐξάγομεν τὴν ῥίζαν τοῦ νέου ἀριθμητοῦ μεῖον μονάδος, καὶ διαιροῦμεν τὸ ἐξαγόμενον διὰ τοῦ παρονομαστοῦ.

Παράδειγμα. Ἐξαχθήτω ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ $\frac{7}{13}$.

Τὸ κλάσμα τοῦτο τρέπεται εἰς $\frac{7\times 13}{(13)^2}$ ἢ $\frac{91}{(13)^2}$· ἀλλ' ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 91 εἶναι 9 μεῖον μιᾶς μονάδος· λοιπὸν $\frac{9}{13}$ εἶναι ἡ ζητουμένη ῥίζα μεῖον $\frac{1}{13}$.

Ἐμποροῦμεν κἄποτε νὰ ζητήσωμεν μεγαλήτερον βαθμὸν προσεγγίσεως. Εἰς ταύτην τὴν περίστασιν ἐπαναλαμβάνομεν τὸν ἀριθμὸν $\frac{91}{(13)^2}$, καὶ ἐξάγομεν τὴν ῥίζαν τοῦ 91 μὲ βαθμόν τινὰ προσεγγίσεως. Ἂς ὑποθέσωμεν π. χ., ὅτι θέλομεν νὰ προσδιορίσωμεν $\sqrt{91}$ μεῖον $\frac{1}{100}$· θέλομεν εὕρει (ἀριθμ. 186) $\sqrt{91}=9,53$·

Λοιπὸν ἡ ῥίζα τοῦ $\frac{91}{(13)^2}$, ἢ $\frac{7}{13}$ θέλει εἶναι $\frac{9,53}{13}$ ἢ $\frac{953}{1300}$ μεῖον $\frac{1}{1300}$. Τῷ ὄντι, εἶναι φανερὸν, ὅτι $\frac{91}{(13)^2}$ εὑρίσκεται μεταξὺ $\frac{(9,53)^2}{(13)^2}$ καὶ $\frac{(9,54)^2}{(13)^2}$. Οὕτως ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ $\frac{91}{(13)^2}$ διαφέρει ἀπὸ $\frac{9,53}{13}$ κατὰ ποσότητα μικροτέραν παρὰ τὸ δέκατον τρίτον μέρος τοῦ $\frac{1}{100}$ ἢ $\frac{1}{1300}$.

Παρατήρησις. Πολλάκις ὁ παρονομαστὴς τοῦ κλάσματος, χωρὶς νὰ ἦναι τέλειον τετράγωνον, περιέχει παράγοντα, τέλειον τετράγωνον. Εἰς ταύτην τὴν περίστασιν τὸ κλάσμα δὲν μᾶς προσφέρει κἀνένα κόπον.

Ἔστω π. χ., τὸ κλάσμα $\frac{23}{48}$. Παρατηροῦμεν ὅτι 48 εἶναι ἴσον μὲ 16×3 ἢ $(4)^2\times3$. Οὕτως πολλαπλασιάζοντες τοὺς δύο ὅρους ἐπὶ 3, τὸ κλάσμα τρέπεται εἰς $\frac{23\times3}{(4)^2\times(3)^2}$ ἢ $\frac{69}{(12)^2}$· καὶ οὕτως ὁ παρονομαστὴς ἄγεται εἰς τέλειον τετράγωνον. Ἐξάγοντες δὲ τὴν ῥίζαν τοῦ 69 μεῖον $\frac{1}{10}$, τὸ ὁποῖον δίδει 8,3, εὑρίσκομεν τὴν ζητουμένην ῥίζαν $\frac{8,3}{12}$ ἢ $\frac{83}{120}$ μεῖον $\frac{1}{120}$

Ἐν γένει ὁσάκις ὁ παρονομαστὴς περιέχει παράγοντα τέλειον τετράγωνον, πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύ ὅρους τοῦ κλάσματος ἐπὶ τὸν παράγοντα τὸν μὴ ὄντ τέλειον τετράγωνον.

§. 188. Ἡ ἐξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τῶ δεκαδικῶν κλασμάτων ἐξάγεται ἐκ τῆς προηγουμένη ἀνωτέρας παρατηρήσεως.

Ἄς λάβωμεν παράδειγμα τὸν ἀριθμὸν 3,425, τ ὁποίου ζητοῦμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν. Τοῦτο κλάσμα ἄγεται εἰς $\frac{3425}{1000}$· ἀλλὰ 1000 δὲν εἶναι τ τράγωνον, ὅμως εἶναι ἴσον μὲ 100×10, ἢ $(10)^2\times1$(οὕτως διὰ νὰ καταστήσωμεν τὸν παρονομαστὴν τέλει τετράγωνον, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δ ὅρους ἐπὶ 10. ἡ ὁποία πρᾶξις δίδει $\frac{34250}{10000}$ ἢ $\frac{3425}{(100)}$ καὶ ἐξάγοντες τότε τὴν ῥίζαν τῶν 34250, μεῖ μονάδος, εὑρίσκομεν 185. Λοιπὸν $\frac{100}{185}$, ἢ 1,85 εἶναι ἡ ζητουμένη ῥίζα, μεῖον $\frac{1}{100}$.

Ἂν ἐπιθυμούσαμεν μεγαλήτερον ἀριθμὸν δεκαδικῶν ψηφίων εἰς τὴν ῥίζαν, ἔπρεπε νὰ προσθέσωμεν εἰς τὰ δεξιὰ τῶν 34250 τόσα τμήματα ἀπὸ δύο μηδενικά, ὅσα περισσότερα δεκαδικὰ ψηφία θέλομεν νὰ εὕρωμεν.

Γενικὸς Κανών. „Διὰ νὰ ἐξάξωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ δεκαδικοῦ κλάσματος, καθισταίνομεν κατ' ἀρχὰς τὸν ἀριθμὸν τῶν δεκαδικῶν ψηφίων ἄρτιον καὶ διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν δεκαδικῶν ψηφίων, τὰ ὁποῖα θέλομεν νὰ εὕρωμεν εἰς τὴν ῥίζαν, τὸ ὁποῖον γίνεται μὲ τὴν προσθήκην ἱκανοῦ τινὸς ἀριθμοῦ μηδενικῶν εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ· ἀποβάλλομεν τὴν ὑποστιγμὴν εἰς τὸν νέον ἀριθμόν, καὶ ἐξάγομεν τὴν ῥίζαν μεῖον μονάδος· καὶ μετὰ ταῦτα, χωρίζομεν κατὰ τὰ δεξιὰ ταύτης τῆς ῥίζης τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν τῶν δεκαδικῶν ψηφίων.“

Δυνάμεθα ἀκόμη νὰ ἐξάξωμεν τοῦτον τὸν κανόνα, ὡς συνέπειαν τῆς μεθόδου τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων, διὰ μέσου τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον δεκαδικοῦ τινὸς κλάσματος, ἢ τὸ γινόμενον τοῦ τοιούτου κλάσματος ἐφ' ἑαυτό, πρέπει νὰ περιέχῃ τὸ διπλοῦν τοῦ ἀριθμοῦ τῶν δεκαδικῶν ψηφίων, τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται εἰς τὴν ῥίζαν.

Ἂς λάβωμεν δεύτερον παράδειγμα τὸ κλάσμα 0, 05409, τοῦ ὁποίου ζητοῦμεν τὴν ῥίζαν μεῖον $\frac{1}{100000}$.

Ὁ ἀριθμὸς οὗτος δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν 0, 054090000. Ἐξαλείφοντες τὴν ὑποστιγμὴν καὶ ἀποβάλλοντες τὰ μηδενικὰ, τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται εἰ τὰ ἀριστερὰ, ὡς ἀνωφελῆ, ἔχομεν 54090000 ἀριθμὸν, τοῦ ὁποίου ἡ ῥίζα μεῖον μονάδος εἶναι 23257 οὕτως, 0, 23257 εἶναι ἡ ζητουμένη ῥίζα μεῖο 0, 00001.

§. 189. Τέλος πάντων ζητεῖται κάποτε ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα κυρίου κλάσματος ἐκτιμωμένου εἰς δεκαδικά.

Εἰς ταύτην τὴν περίστασιν ἀρκεῖ νὰ τρέψωμε τὸ δεδομένον κλάσμα εἰς δεκαδικὰ, καὶ νὰ ἐκτείνωμε τὰς πράξεις, ἕως νὰ εὕρωμεν εἰς τὸ πηλίκον διὰ τόσ ψηφία δεκαδικὰ, ὅσα θέλομεν νὰ ἔχωμεν εἰς τὴν ῥίζα καὶ μετὰ ταῦτα πράττομεν ἐπὶ τοῦ δεκαδικοῦ κλάσματος, ὡς εἴπομεν.

Ἄς προτεθῇ νὰ ἐξάξωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζα τῶν $\frac{11}{14}$ μεῖον $\frac{1}{1000}$.

Τὸ κλάσμα τοῦτο ἠγμένον εἰς δεκαδικὰ δίδ 0,785714 μεῖον 0, 000001. Ἀλλ' ἡ ῥίζα τοῦ 78571 εἶναι 886 μεῖον μονάδος. Λοιπὸν 0, 886 εἶναι ἡ ῥίζ τῶν $\frac{11}{14}$ μεῖον 0, 001.

Εὑρίσκομεν κατὰ τούτους τοὺς διαφόρους κανόνας

$\sqrt{31,027}$ μεῖον 0, 001 = . . . 5,570.

$\sqrt{0,01001}$ μεῖον 0, 00001 = . . . 0,10004.

$\sqrt{2\frac{13}{15}}$ ἢ $\sqrt{\frac{43}{16}}$ μεῖον 0, 0001 = . . . 1,6931.

§. 190. Σχόλιον πρῶτον. Σχεδὸν ὅλοι συγγραφεῖς, δίδοντες τὸν λόγον τῆς ἐξαγωγῆς τῆς κατὰ προσέγγισιν τετραγωνικῆς ῥίζης, συσταίνουν ἐντεῦθεν ἀρχὴν, ὅτι διὰ νὰ ἐξάξωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἑνὸς κλάσματος, πρέπει νὰ ἐξάξωμεν τὴν τετρ γωνικὴν ῥίζαν τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ τὴν τοῦ παρονομαστοῦ. Αὕτη ἡ ἀρχὴ εἶναι φανερὰ, (ἀριθμ. 185), ὅταν οἱ δύο ὅροι εἶναι τέλεια τετράγωνα· ἀλλὰ παύει, ὅταν οἱ δύο ὅροι εἶναι ὁποιοιδήποτε· ἐπειδὴ ἀκόμη δὲν ἀπεδείχθη, ὅτι διὰ νὰ ὑψωθῇ εἰς τετράγωνον κλασματικός τις ἀριθμὸς, τοῦ ὁποίου οἱ δύο ὅροι εἶναι ἄλογοι, πρέπει νὰ ὑψωθῇ ἕκαστος ὅρος εἰς τετράγωνον. Ἰδοὺ διατί ἡμεῖς δὲν ἐσυστήσαμεν ταύτην τὴν ἀρχὴν (εἰς τὸν ἀριθμὸν 185). Ὅταν οἱ δύο ὅροι εἶναι τέλεια τετράγωνα, ἕπεται μετὰ ταῦτα ἀπὸ ὅσα εἴπομεν εἰς τὸν ἀριθμὸν 187, ὅτι εἶναι ἀληθινὴ δι' ἓν κλάσμα, τοῦ ὁποίου ὁ παρονομαστὴς εἶναι ἓν τέλειον τετράγωνον. Ἀλλὰ ἤδη δυνάμεθα νὰ τὸ παραδεχθῶμεν διὰ κάθε εἶδος κλάσματος, χωρὶς κανένα σφάλμα εἰς τὰς ἀριθμητικὰς ἐφαρμογὰς, ἐπειδὴ εἰς τελευταίαν ἀνάλυσιν, πρέπει πάντοτε, διὰ νὰ ἐκτιμήσωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ κλάσματος, νὰ καταστήσωμεν τὸν παρονομαστήν του τέλειον τετράγωνον.

§. 191. Δεύτερον σχόλιον. Ἕπεται ἐκ τῶν ἄνω εἰρημένων ἀρχῶν, ὅτι ὁποιουδήποτε ἀριθμοῦ ἀκεραίου ἢ κλασματικοῦ δυνάμεθα πάντοτε νὰ προσδιορίσωμεν τὴν ἀκριβῆ ἔκφρασιν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης, ἐὰν οὗτος εἶναι τέλειον τετράγωνον, ἢ τιμήν τινὰ τόσον πλησίον, ὅσον θέλομεν ταύτης τῆς ῥίζης, ἐὰν οὗτος δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον.

Αἱ ἀρχαὶ αὗται προσέτι εἶναι ἀνεξάρτητοι ἀπὸ τὸ σύστημα τῆς ἀριθμήσεως, τὸ ὁποῖον μεταχειριζόμεθα, τουτέστιν αἱ ἀρχαὶ, τὰς ὁποίας ἐσυστήσαμεν διὰ τὴν ἀναζήτησιν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τῶν ἀριθμῶν, τόσον ἀκεραίων, ὅσον καὶ κλασματικῶν, θέλουν εἶναι ἀπολύτως αἱ αὐταὶ καὶ εἰς τὸ σύστημα τῆς ἀριθμήσεως τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι β, καθὼς εἶναι καὶ εἰς τὸ δεκαδικὸν σύστημα. Οἱ ἀρχάριοι διὰ νὰ οἰκειωθοῦν μὲ αὐτὰς τὰς μεθόδους, πρέπει νὰ ἐκτελέσωσιν ἐξαγωγὰς ῥιζῶν εἰς ὁποιονδήποτε σύστημα, π.χ. εἰς τὸ δωδεκαδικὸν σύστημα θέλουν γνωρίσει μὲ εὐκολίαν, ὅτι διὰ τὴν ἐξαγωγὴν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἀκεραίου τινὸς ἀριθμοῦ εἴτε ἀκριβῶς εἴτε εἰς κλάσματα δωδεκαδικὰ, ἀρκεῖ νὰ πράξωσι κατὰ τοὺς ἐκτεθέντας κανόνας εἰς τὸν ἀριθμὸν 182 καὶ 186, καὶ διὰ τὴν ἐξαγωγὴν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τῶν κλασμάτων, πρέπει νὰ κάμωσιν ἐπ' αὐτῶν ἀναλόγους προετοιμασίας μὲ τὰς δειχθείσας εἰς τοὺς ἀριθμοὺς 187 καὶ 189.

Οὕτω τέλος πάντων οἱ γνωσθέντες ἀριθμοὶ, ὡς τέλεια τετράγωνα εἰς τὸ δεκαδικὸν σύστημα, εἶναι τοιοῦτοι καὶ εἰς πᾶν ἄλλο σύστημα, καὶ οἱ ἀριθμοὶ οἵτινες δὲν εἶναι τέλεια τετράγωνα εἰς τὸ δεκαδικὸν σύστημα, δὲν εἶναι οὔτε εἰς κἀνὲν ἄλλο σύστημα διαφορετικοί· οὕτως οἱ ἀριθμοὶ τέσσαρα, ἐννέα, δεκαέξ, σαρανταεννέα . . . . ὀγδοηκονταένα . . . εἶναι τέλεια τετράγωνα εἰς ὅλα τὰ συστήματα· καὶ οἱ ἀριθμοὶ δύο, τρία . . . ἑπτὰ, . . . ἕνδεκα . . . δὲν ἔχουσιν ἀκριβῆ ῥίζαν εἰς κἀνένα σύστημα. Τοῦτο πορίζεται ἐκ τοῦ ὅτι ἡ πρότασις τοῦ ἀριθμοῦ 179 ἐπιστηρίζεται ἐπὶ τῶν ἀποδεδειγμένων ἀρχῶν εἰς τοὺς ἀριθμοὺς 132 καὶ 133, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἀνεξάρτητοι ἀπὸ κάθε σύστημα ἀριθμήσεως.

§. β'. Σχηματισμὸς τοῦ κύβου, καὶ ἐξαγωγὴ τῆς κυβικῆς ῥίζης τῶν ἀριθμῶν.

§. 192. Καλεῖται κύβος, ἢ τρίτη δύναμις ἑνὸ ἀριθμοῦ, τὸ γινόμενον τοῦ αὐτοῦ πολλαπλασιαζομένου δὶς ἐφ' ἑαυτὸν, καὶ κυβικὴ ῥίζα ἢ τρίτη ἑνὸς ἀριθμοῦ, ὁ ἀριθμὸς, ὅστις ὑψονόμενος εἰς τὸν κύβον ἢ ὅστις πολλαπλασιαζόμενος δὶς ἐφ' ἑαυτὸν, δίδει τὸ δεδομένον ἀριθμόν. Ὁ σχηματισμὸς τοῦ κύβου ἀκεραίο τινὸς ἀριθμοῦ ἢ κλασματικοῦ γίνεται πολλαπλασιαζομένου τοῦ ἀριθμοῦ δύο φοραῖς κατ' ἐξακολούθησιν ἐφ' ἑαυτὸν κατὰ τοὺς γνωστοὺς κανόνας.

Τῶν δέκα πρώτων ἀριθμῶν

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 οἱ κύβοι εἶναι

1, 8, 27, 64, 125, 226, 343, 512, 729, 1000.

π. χ. ὁ κύβος τοῦ 7 μὲ τὸ νὰ εἶναι ἴσος μὲ $7 \times 7 \times 7$, λέγομεν κατὰ πρῶτον, ὅτι 7 φοραῖς 7 κάμνουν 49, καὶ 7 φοραῖς 49 κάμνουν 343· οὕτω καὶ διὰ τοὺς ἄλλους.

Ἀντιστρόφως. οἱ ἀριθμοὶ τῆς ἀνωτέρω δευτέρας γραμμῆς ἔχουσι κυβικὰς ῥίζας τοὺς ἀριθμοὺς τῆς πρώτης.

Γνωρίζομεν ἀπὸ τὴν παρατήρησιν τούτων τῶν γραμμῶν, ὅτι μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν ἑνὸς, δύο, ἢ τριῶν ψηφίων ὑπάρχουσιν ἐννέα τέλειοι κύβοι· ἕκαστος τῶν ἄλλων ἔχει κυβικὴν ῥίζαν ἀριθμὸν ἀκέραιον μεθ' ἑνὸς κλάσματος, τὸ ὁποῖον δὲν δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ἀκριβῶς διὰ μέσου τῆς μονάδος. Τῷ ὄντι ἂς παραδεχθῶμεν πρὸς καιρὸν, ὅτι εἷς ἀκέραιος ἀριθμὸς N ἔχει ἀκριβῆ ῥίζαν κλασματικὸν ἀριθμὸν τοιοῦτον ὡς $\frac{\alpha}{\beta}$· λοιπὸν πρέπει πολλαπλασιάζοντες $\frac{\alpha}{\beta}$ δύο φοραῖς ἐφ' ἑαυτὸν νὰ λάβωμεν τὸ N· ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ἀδύνατον, ἐπειδὴ $\frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\alpha}{\beta}$ δίδει ἐξαγόμενον $\frac{\alpha^3}{\beta^3}$, καὶ ἐπειδὴ πάντοτε δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν, ὅτι $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι ἀνάγωγον κλάσμα, ἕπεται, ὅτι α καὶ β εἶναι ἀναμεταξύ των πρῶτοι. Λοιπὸν (ἀριθμ. 134) εἶναι τὸ αὐτὸ καὶ διὰ α^3 καὶ διὰ β^3· οὕτως $\frac{\alpha^3}{\beta^3}$ εἶναι ἀνάγωγος κλάσματος ἀριθμὸς, καὶ ἑπομένως δὲν δύναται νὰ εἶναι ἴσος μὲ ἀκέραιον ἀριθμὸν Ν.

Αἱ κυβικαὶ ῥίζαι τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, οἵτινες δὲν εἶναι τέλειοι κύβοι ἄλλων ἀκεραίων ἀριθμῶν, δὲν δύνανται νὰ προσδιορισθῶσι μὲ ἀκρίβειαν, καὶ διὰ τοῦτο εἶναι ἀριθμοὶ ἀσύμμετροι ἢ ἄλογοι.

§. 193. Καθὼς, διὰ νὰ ἀνακαλύψωμεν τὸν τρόπον τοῦ ἐξάγειν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ὁποιουδήποτε ἀκεραίου ἀριθμοῦ, ἠναγκάσθημεν νὰ στηριχθῶμεν ἐπὶ τῆς ἐκφράσεως τοῦ τετραγώνου τοῦ δυωνύμου $\alpha+\beta$, τουτέστιν ἐπὶ τοῦ ἀθροίσματος δύο ποσοτήτων, παρομοίως διὰ τὴν ἐξαγωγὴν τῆς κυβικῆς ῥίζης, εἶναι ἀναγκαῖον νὰ γνωρίζωμεν τὴν σύνθεσιν τοῦ κύβου τούτου τοῦ ἀθροίσματος $\alpha+\beta$.

Ἤδη δὲ εἰρήκαμεν (εἰς τὸν ἀριθμὸν 180) ὅτι $(\alpha+\beta)^2$ ἢ $(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$.

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸ πρῶτον τοῦτο ἐξαγόμενον ἐπὶ $\alpha+\beta$, κατὰ τὸν συσταθέντα κανόνα (ἀριθμ. 115) διὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν πολυωνύμων, καὶ κάμωμεν τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων, θέλομεν λάβει

$$\begin{array}{r} \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2 \\ \alpha+\beta \\ \hline \alpha^3+2\alpha^2\beta+\alpha\beta^2 \qquad\qquad \\ +\ \alpha^2\beta+2\alpha\beta^2+\beta^3 \\ \hline \alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3 \end{array}$$

$$(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3.$$

Ἐὰν κάμωμεν εἰς τοῦτον τὸν τύπον $\beta=1$, τρέπεται εἰς

$$(\alpha+1)^3=\alpha^3+3\alpha^2+3\alpha+1.$$

Ὅθεν ἐξάγομεν $(\alpha+1)^3-\alpha^3=3\alpha^2+3\alpha+1$, τὸ ὁποῖον μᾶς δίδει, ὅτι ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ κύβου δύο διαδοχικῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν εἶναι ἴση μὲ τὸ τριπλάσιον τοῦ τετραγώνου τοῦ μικροτέρου ἀριθμοῦ, πλέον τὸ τριπλοῦν τούτου τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ, πλέον ἕν.

Οὕτως ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ κύβου τοῦ 90 καὶ ἐκείνου τοῦ 89 εἶναι ἴση μὲ $3(89)^2 + 3 \times 89 + 1 = 24031$.

Μετὰ τοῦτο δυνάμεθα νὰ κρίνωμεν πόσον δύο τέλειοι διαδοχικοὶ κύβοι μακρύνονται ὁ εἷς τοῦ ἄλλου εἰς τὴν σειρὰν τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, ὅταν αἱ ῥίζαι εἶναι ὀλίγον τι μεγάλοι ἀριθμοί.

§. 194. Ἂς ζητήσωμεν τώρα μέθοδον τινὰ τοῦ νὰ ἐξάγωμεν τὴν κυβικὴν ῥίζαν ἀπὸ ἀκέραιον ἀριθμόν.

Κατὰ πρῶτον. Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς δὲν ἔχῃ περισσότερον ἀπὸ τρία ψηφία, ἡ ῥίζα προσδιορίζεται ἀμέσως, κατὰ παρατήρησιν τῶν κύβων τῶν ἐννέα πρώτων ἀριθμῶν· οὕτως ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ 125 εἶναι 5. ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ 72 εἶναι 4 πλέον ἓν κλάσμα, ἢ 4 μεῖον μονάδος, τουτέστι διαφέρει τῆς ἀληθινῆς ὀλιγώτερον ἀπὸ μονάδα. Ἡ κυβικὴ ῥίζα τῶν 841 εἶναι 9 μεῖον μονάδος, ἐπειδὴ 841 εὑρίσκεται μεταξὺ 729, τὸ ὁποῖον εἶναι ὁ κύβος τοῦ 9, καὶ 1000 ἢ τοῦ κύβου τοῦ 10.

Ἂς θεωρήσωμεν λοιπὸν ἀριθμὸν ἔχοντα περισσότερον ἀπὸ τρία ψηφία.

Ἔστω π. χ. 103823 ὁ δεδομένος ἀριθμός.

103.823 } 4	48	47
}48	48	47
64	384	329
398.23	192	188
	2304	2209
	48	47
	18432	15403
	9216	8836
	110592	103823

Τοῦ ἀριθμοῦ τούτου εὑρισκομένου μεταξὺ τοῦ 1000, ὅςτις εἶναι ὁ κύβος τοῦ 10, καὶ 1000000 ὅς τις εἶναι ὁ κύβος τοῦ 100, ἡ ῥίζα εἶναι ἀναγκαίως σύνθετος ἀπὸ δύο ψηφία, τουτέστιν ἀπὸ μονάδας και δεκάδας. Σημειόνοντες διὰ α τὰς δεκάδας, καὶ διὰ β τὰς μονάδας ἔχομεν (ἀριθ. 193) $103823=(\alpha+\beta)^3$ $=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$.

Λοιπὸν βλέπομεν, ὅτι ὁ κύβος ἀριθμοῦ συνθέτου ἐκ δεκάδων καὶ μονάδων περιέχει τὸν κύβον τῶν δεκάδων, τὸ τριπλοῦν γινόμενον τοῦ τετραγώνου τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας, τὸ τριπλοῦν γινόμενον τῶν δεκάδων ἐπὶ τὸ τετράγωνον τῶν μονάδων, πλέον τὸν κύβον τῶν μονάδων.

Τούτου τεθέντος, ἐπειδὴ ὁ κύβος τῶν δεκάδων δίδει τοὐλάχιστον χιλιάδας, τὰ τρία ἐν δεξιᾷ τελευταῖα ψηφία δὲν ἀποτελοῦν μέρος· καὶ διὰ τοῦτο εὑρίσκεται εἰς τὸ μέρος 103, (τὸ ὁποῖον χωρίζομεν ἀπὸ τὰ τρία τελευταῖα ψηφία διὰ στιγμῆς)· ἀλλ' ἡ ῥίζα τοῦ μεγαλητέρου κύβου, ὅς τις περιέχεται εἰς τὸ 103 ἐπειδὴ εἶναι 4 διὰ 64, 4 εἶναι τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων τῆς ζητουμένης ῥίζης· διότι 103823 περιλαμβάνεται μεταξὺ 64000 ἢ $(40)^3$ καὶ 125000 ἢ $(50)^3$ λοιπὸν ἡ ῥίζα εἶναι σύνθετος ἐκ τεσσάρων δεκάδων πλέον ἕνα ἀριθμὸν μονάδων μικρότερον τῶν δέκα.

Εὑρεθέντος δὲ τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων, ἀφαιροῦμεν τὸν κύβον αὐτοῦ 64 ἀπὸ 103, καὶ μένει 39 τὸ ὁποῖον ἀκολουθούμενον ἀπὸ τὸ τμῆμα 823, δίδει 39823. Τοῦτο τὸ ἐξαγόμενον περιέχει προσέτι τὸ τριπλοῦν τετράγωνον τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας πλέον δύο μέρη, τὰ ὁποῖα ἀνωτέρω ἐκφράσαμεν.

Ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ τετράγωνον ἀριθμοῦ δεκάδων δίδει τοὐλάχιστον ἑκατοντάδας, ἕπεται ὅτι τὸ τριπλοῦν τετράγωνον τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας περ λαμβάνεται εἰς τὰ ἀριστερὰ 398 τῶν δύο τελευταίων ψηφίων 23, (τὰ ὁποῖα χωρίζομεν δι' αὐτὸν τὸν λόγον μὲ στιγμήν). Ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος, σχηματίζομεν τὸ τριπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῶν τεσσάρων δεκάδων, τὸ ὁποῖον δίδει 48. Λοιπὸν ἐὰν διαιρέσωμεν 398 διὰ 48, τὸ πηλίκον 8 εἶναι τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τῆς ῥίζης, ἢ ψηφίον πολὺ μεγάλον· ἐπειδὴ 398 ἑκατοντάδες σύγκεινται ἐκ τοῦ τριπλασίου τετραγώνου τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας, καὶ ἀπὸ τὰ κρατηθέντα ἀπὸ τὰ ἄλλα δύο μέρη. Διὰ νὰ βεβαιωθῶμεν, ἐὰν τοῦτο τὸ ψηφίον 8 δὲν εἶναι πολλὰ μεγάλον, δυνάμεθα, καθὼς εἰς τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν, νὰ σχηματίσωμεν διὰ τούτου τοῦ ψηφίου 8, καὶ διὰ τοῦ ψηφίου 4 τῶν δεκάδων, τὰ τρία μέρη, τὰ ὁποῖα περιέχονται εἰς τὸν 39823· ἀλλ' εἶναι πολὺ ἁπλούστερον νὰ ὑψώσωμεν 48 εἰς τὸν κύβον.

Εὑρίσκομεν δὲ διὰ τὸν τοιοῦτον κύβον, 110592, ἀριθμὸν μεγαλήτερον ἀπὸ 103823· οὕτως τὸ ψηφίον 8 εἶναι πολλὰ μεγάλον. Σχηματίζοντες τὸν κύβον τοῦ 47, εὑρίσκομεν 103823· οὕτως ὁ δεδομένος ἀριθμὸς εἶναι τέλειος κύβος, καὶ ἔχει κυβικὴν ῥίζαν 47.

Σ. Κ. Δὲν δυνάμεθα νὰ ἀναζητήσωμεν κατὰ πρῶτον τὸ ψηφίον τῶν μονάδων, ἐπειδὴ τοῦ κύβου τῶν μονάδων δίδοντος (ἀριθμ. 192) δεκάδας καὶ ἑκατοντάδας· αὗται αἱ δεκάδες καὶ αἱ ἑκατοντάδες εὑρίσκονται μεμιγμέναι μὲ τὰς ἀπὸ τ' ἄλλα μέρη τοῦ κύβου προερχομένας.

Ἂς ἐξάξωμεν ἀκόμη τὴν κυβικὴν ῥίζαν τοῦ 47954.

47.954	36	36
27	27.	36
209		216
		108
47954		1296
46656		36
1298		7776
		3888
		46656

Τοῦ ἀριθμοῦ 47954 περιλαμβανομένου μεταξὺ 1000 καὶ 1000000, ἡ ῥίζα του εὑρίσκεται μεταξὺ τοῦ 10 καὶ 100, τουτέστι περικλείει δεκάδας καὶ μονάδας. Ὁ κύβος τῶν δεκάδων εὑρίσκεται εἰς τὰς 47 χιλιάδας, καὶ δεικνύομεν, ὡς εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα, ὅτι 3, ῥίζα τοῦ μεγαλητέρου κύβου τοῦ εἰς τὸ 47 περιεχομένου, ἐκφράζει τὰς δεκάδας. Ἀφαιροῦμεν τὸν κύβον τοῦ 3 ἢ τὸ 27 ἀπὸ 47, καὶ ἔχομεν ὑπόλοιπον 20, κατεβάζομεν εἰς τὸ πλευρὸν τοῦ ὑπολοίπου μόνον τὸ ψηφίον 9 τοῦ τμήματος 954, καὶ ὁ ἀριθμὸς 209 ἑκατοντάδες, σύγκειται ἐκ τοῦ τριπλασίου τετραγώνου τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας, πλέον τὰ κρατηθέντα ἀπὸ τὰ ἄλλα μέρη. Λοιπὸν ἐὰν σχηματίσωμεν τὸ τριπλοῦν τετράγωνον τῶν 3 δεκάδων, τὸ ὁποῖον δίδει 27 ἑκατοντάδας, καὶ διαιρέσωμεν 209 διὰ 27, τὸ πηλίκον 7 εἶναι τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τῆς ῥίζης, ἢ ψηφίον τι πολλὰ μεγάλον. Ὑψόνοντες δὲ 37 εἰς τὸν κύβον, εὑρίσκομεν 50653, ἀριθμὸν μεγαλήτερον τοῦ 47954.

Ἐὰν ὅμως σχηματίσωμεν τὸν κύβον τοῦ 36, εὑρίσκομεν 46656, ἀριθμὸν, ὅστις ἀφαιρεθεὶς ἀπὸ 47954, ὡς φαίνεται εἰς τὸν ἄνω πίνακα, δίδει ὑπόλοιπον 1298· οὕτως ὁ δεδομένος ἀριθμὸς δὲν εἶναι,