εἰς δεκαδικὰ) διὰ τὴν σχέσιν τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον. Οὗτος εἶναι ὁ λόγος, τὸν ὁποῖον ἔδωκεν ὁ Ἀδριανὸς Μέτιος. Τὰ ἀκόλουθα ἠγμένα, εἶναι τόσον πολλὰ σύνθετα, ὥστε δυσκόλως καὶ ἀνωφελῶς ἀντεισάγονται εἰς τὸν δεδομένον ἀριθμόν.

Δὲν ἐκτεινόμεθα περισσότερον εἰς τὰς ἰδιότητας τῶν ἀριθμῶν, ἀλλὰ συμβουλεύομεν τὴν νεολαίαν, ἥτις ἤδη γυμνασμένη εἰς τὴν ἀλγεβραϊκὴν ἀνάλυσιν, ἀγαπᾷ πλειοτέρας γνώσεις ἐπάνω εἰς τοῦτο τὸ μέρος, νὰ ἀναγνώσῃ τοὺς δύο τόμους, οἵτινες ἐπιγράφονται „Θεωρία τῶν ἀριθμῶν παρὰ τοῦ Λεγένδρου, καὶ ἀριθμητικαὶ ἐξετάσεις τοῦ Γάους", βιβλίον μεταφρασμένον ἄριστα ἀπὸ τὸν Πολυέτον Δελίσλιον εἰς τὴν Γαλλικὴν Γλῶσσαν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ϛʹ.

Σχηματισμὸς τῶν δυνάμεων, καὶ ἐξαγωγὴ τῶν Τετραγωνικῶν καὶ Κυβικῶν ῥιζῶν τῶν ἀριθμῶν.

---

§. αος. Σχηματισμὸς τοῦ Τετραγώνου, καὶ ἐξαγωγὴ τῆς Τετραγωνικῆς ῥίζης.

§. 178. **Προοιμιώδεις γνώσεις.** — Καλεῖται τετράγωνον (ἀριθμ. 111) ἡ δευτέρα δύναμις ἑνὸς ἀριθμοῦ, τὸ γινόμενον τούτου, πολλαπλασιαζομένου ἐφ' ἑαυτὸν, καὶ τετραγωνικὴ ῥίζα ἑνὸς ἀριθμοῦ, δεύτερός τις ἀριθμὸς, ὅς τις πολλαπλασιαζόμενος ἐφ' ἑαυτὸν, ἢ ὑψονόμενος εἰς τετράγωνον, δίδει ἐξαγόμενον τὸν προτεθέντα ἀριθμόν.

Οὕτως τὸ μὲν τετράγωνον τοῦ 7 εἶναι 49· ἡ δὲ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 49 εἶναι 7. Παρομοίως τὸ τοῦ 12 τετράγωνον εἶναι 12×12 ἢ 144· ἀντιστρόφως δὲ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 144 εἶναι 12.

Ὁ σχηματισμὸς τοῦ τετραγώνου ἀκεραίου τινὸς, ἢ κλασματικοῦ ἀριθμοῦ δὲν ἔχει κὰμμίαν δυσκολίαν, ἀλλ' ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ ἀριθμὸς οὗτος ἐφ' ἑαυτὸν κατὰ τοὺς συνήθεις κανόνας.

Ἀλλὰ δὲν ἀκολουθεῖ τὸ αὐτὸ εἰς τὴν τῆς τετραγωνικῆν ῥίζης ἑνός τινος ἀριθμοῦ ἐξαγωγὴν, ὡς „δοθέντος τινὸς ἀριθμοῦ, νὰ εὕρωμεν τὸν ἀριθμὸν, ὅς τις πολλαπλασιασθεὶς ἐφ' ἑαυτὸν, παράγει τὸν προτεθέντα.“

Αὕτη ἡ πολλὰ δύσκολος πρᾶξις, ἥτις μάλιστα εἶναι ἀναγκαιοτάτη εἰς τὴν Γεωμετρίαν καὶ Ἀριθμητικὴν, ἀπαιτεῖ ἰδιαιτέρας ἑρμηνείας.

Τῶν δέκα πρώτων ἀκεραίων ἀριθμῶν

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

τὰ τετράγωνα εἶναι προφανῶς

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100.

Ἀντιστρόφως, αἱ τῶν ἀριθμῶν τῆς δευτέρας γραμμῆς τετραγωνικαὶ ῥίζαι εἶναι οἱ ἀριθμοὶ τῆς πρώτης.

Ἀπὸ τὴν παρατήρησιν τῶν δύο τούτων γραμμῶν γίνεται φανερὸν, ὅτι μεταξὺ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἑνὸς ἢ δύο ψηφίων εἶναι ἐννέα, οἵτινες εἶναι τὸ τετράγωνα ἄλλων ἀκεραίων ἀριθμῶν, οἱ δὲ ἄλλοι ἔχουσι τετραγωνικὴν ῥίζαν, ἀκέραιον ἀριθμὸν μεθ' ἑνὸς κλάσματος.

Οὕτως 53, ὅς τις περιέχεται μεταξὺ 49 καὶ 64, ἔχει τετραγωνικὴν ῥίζαν τὸ 7, καὶ ἓν κλάσμα.

Παρομοίως 91, ἔχει τετραγωνικὴν ῥίζαν 9 πλέον ἓν κλάσμα.

§. 179. Ἀλλὰ τὸ πλέον ἀξιοπαρατήρητον εἶναι, ὅτι ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς, ὅς τις δὲν εἶναι τετράγωνον ἄλλου ἀκεραίου ἀριθμοῦ, δὲν δύναται νὰ ἔχῃ τετραγωνικὴν ῥίζαν, ἀκριβῆ κλασματικὸν ἀριθμόν.

Αὕτη ἡ πρότασις, ἥτις ἐκ πρώτης ὄψεως φαίνεται παράδοξος, εἶναι συνέπεια τῆς συσταθείσης ἀρχῆς (ἀριθμ. 133) περὶ τῆς διαιρετότητος τῶν ἀριθμῶν. Τῷ ὄντι διὰ νὰ θεωρῆται εἷς κλασματικὸς ἀκριβὴς ἀριθμὸς $\frac{\alpha}{\beta}$, ὡς τετραγωνικὴ ῥίζα ἀκεραίου ἀριθμοῦ, πρέπει τὸ τετράγωνόν του $\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\alpha}{\beta}$ ἢ $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$ νὰ εἶναι ἴσον μὲ ἀκέραιον ἀριθμόν· ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ἀδύνατον· ἐπειδὴ ὑποθέτοντες, ὅτι $\frac{\alpha}{\beta}$ ἤχθη εἰς τὴν ἁπλουστέραν του μορφὴν, βλέπομεν ὅτι α^2 καὶ β^2 εἶναι (ἀριθ. 133) σύνθετα ἀπὸ παράγοντας πρώτους εἰσερχομένους εἰς α καὶ β, καὶ ἐπειδὴ οὗτοι οἱ τελευταῖοι δύο ἀριθμοὶ εἶναι πρῶτοι μεταξύ των, ἀκολουθεῖ τὸ αὐτὸ καὶ εἰς α^2 καὶ β^2· οὕτω λοιπὸν $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$ εἶναι ἀνάγωγος κλασματικὸς ἀριθμὸς, καὶ ἑπομένως δὲν εἶναι ἴσος μὲ ἀκέραιον ἀριθμόν.

Ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα ἀριθμοῦ, ὅς τις δὲν εἶναι τετράγωνον ἄλλου ἀκεραίου ἀριθμοῦ, μὴ ἐκφραζομένη δι' οὐδενὸς ἀκριβοῦς ἀριθμοῦ, καλεῖται ἀριθμὸς ἀσύμμετρος ἢ ἄλογος· τουτέστιν ἀριθμὸς, ὅς τις δὲν μετρεῖται μὲ ἀκρίβειαν διὰ μέσου τῆς μονάδος· οὐτως $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{11}$ εἶναι ἀριθμοὶ ἀσύμμετροι ἄλογοι.

Τότε λέγεται, ὅτι ὁ δεδομένος ἀκέραιος ἀριθμὸς δὲν εἶναι τέλειον, ἢ ἀκριβὲς τετράγωνον.

§. 180. Ἡ διαφορὰ δύο διαδοχικῶν ἀκριβῶ τετραγώνων εἶναι τόσον μεγαλητέρα, ὅσον αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι τούτων τῶν τετραγώνων εἶναι μεγαλήτεραι, καὶ τὴν ἔκφρασιν ταύτης τῆς διαφορᾶς εἶναι ἀναγκαῖον νὰ τὴν γνωρίσωμεν.

Ἔστωσαν τῷ ὄντι δύο διαδοχικοὶ ἀριθμοὶ καὶ $\alpha+1$.

Ἔχομεν (ἀριθμ. 115), $(\alpha+\beta)^2=(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$, ὅθεν ὄντος $\beta=1$, συνάγομεν $(\alpha+1)^2=\alpha^2+2\alpha+1$.

Ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ $(\alpha+1)^2$ καὶ α^2 εἶναι λοιπὸν $2\alpha+1$· ἐκ τοῦ ὁποίου βλέπομεν, ὅτι ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῶν τετραγώνων δύο διαδοχικῶν ἀριθμῶν, εἶναι ἴση μὲ τὸ διπλάσιον τοῦ μικροτέρου τούτων τῶν δύο ἀριθμῶν αὐξανομένη ἀπὸ μίαν μονάδα· οὕτως, ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῶν τετραγώνων τοῦ 348 καὶ 347 εἶναι ἴση μὲ δύο φοραῖς 347 πλέον 1 ἢ 695· ἢ κατ' ἄλλον τρόπον, τὰ τετράγωνα τοῦ 347 καὶ τοῦ 348 περιέχουσι 694 ἀριθμούς, οἵτινες δὲν εἶναι ἀκριβῆ τετράγωνα.

Μετὰ τὰς γνώσεις ταύτας, ἂς ἀναζητήσωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τῶν ἀριθμῶν, ἀρχίζοντες ἀπὸ τῶν ἀκεραίων.

§. 181. Ἐξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἀκεραίου ἀριθμοῦ.

Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς ἔχῃ ἓν ἢ δύο ψηφία, ἡ ῥίζα του λαμβάνεται ἀμέσως κατὰ τὴν παρατήρησιν τῶν ἐννέα πρώτων ἀριθμῶν (ἀριθμ. 178). Ἂς θεωρήσωμεν λ.

πὸν ἀριθμὸν τινὰ ἔχοντα περισσότερα παρὰ δύο ψηφία π. χ. 8084.

Ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς οὗτος σύγκειται ἀπὸ περισσότερα παρὰ δύο ψηφία, ἡ ῥίζα του πρέπει νὰ ἔχῃ περισσότερα παρὰ ἕν· προσέτι εἶναι μικρότερος τῶν 10000, ὅς τις εἶναι τὸ τετράγωνον τοῦ 100· οὕτως ἡ ῥίζα περικλείει ἀναγκαίως δύο ψηφία, ἤγουν δεκάδας καὶ μονάδας· ὅθεν, ἐὰν σημειώσωμεν διὰ α τὰς δεκάδας, καὶ διὰ β τὰς μονάδας, ἔχομεν (κατὰ τὸν ἀριθμὸν 180)

	78
60.84	148
49	8
118.4	1184
118 4	
0	

$$6084=(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2.$$

Τὸ ὁποῖον φανερόνει, ὅτι τὸ τετράγωνον ἀριθμοῦ συνθέτου ἐκ μονάδων καὶ δεκάδων, περιέχει τὸ τετράγωνον τῶν δεκάδων, πλέον τὸ διπλοῦν γινόμενον τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας, πλέον τὸ τετράγωνον τῶν μονάδων.

Τούτου τεθέντος, ἐὰν ἦτον δυνατὸν νὰ γνωρίσωμεν εἰς τὸ 6084 τὸ τετράγωνον τῶν δεκάδων τῆς ῥίζης, ἠθέλαμεν εὐκόλως λάβει τὰς δεκάδας· ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ τετράγωνον ἀκριβοῦς ἀριθμοῦ δεκάδων δὲν δίδει ὀλιγώτερον ἀπὸ ἑκατοντάδας, ἕπεται, ὅτι τὸ τετράγωνον τοῦτο πρέπει νὰ εὑρίσκεται εἰς τὸ μέρος 60, εἰς τὰ ἀριστερὰ τῶν δύο τελευταίων ψηφίων, τὰ ὁποῖα χωρίζομεν δι' αὐτὸν τὸν λόγον μὲ στιγμὴν ἀπὸ τὸ μέρος τοῦτο, τὸ ὁποῖον προσέτι ἐκτὸς τοῦ τετραγώνου τῶν δεκάδων δύναται νὰ περιέχῃ ἑκατοντάδας, χιλιάδας καὶ ἐφεξῆς, αἵτινες πορίζονται ἀπὸ τοὺς ἄλλους ὅρους τοῦ τετραγώνου· τὸ δὲ μέρος 60 περιέχεται μεταξὺ εἰς τὰ δύο τετράγωνα 49 καὶ 64, τῶν ὁποίων αἱ ῥίζαι εἶναι 7 καὶ 8· λέγω δὲ, ὅτι 7 εἶναι τὸ ψηφίον τῶν ζητουμένων δεκάδων· ἐπειδὴ 6000 περιέχεται προφανῶς μεταξὺ 4900 καὶ 6400, οἵτινες εἶναι τὰ τετράγωνα τῶν 70 καὶ 80· τὸ αὐτὸ εἶναι καὶ περὶ τῶν 6084. Λοιπὸν ἡ ζητουμένη ῥίζα σύγκειται ἀπὸ 7 δεκάδας, καὶ ἀπὸ ἀριθμόν τινα μονάδων μικρότερον τοῦ δέκα.

Ἀφ' οὗ τὸ ψηφίον 7 εὑρέθη, τὸ γράφομεν εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ δοθέντος, καὶ τὸ χωρίζομεν διὰ καθέτου γραμμῆς· μετὰ ταῦτα ἀφαιροῦμεν τὸ τετράγωνόν του 49 ἀπὸ τὸ 60, τὸ ὁποῖον μᾶς δίδει 11 ὑπόλοιπον, εἰς τὸ πλευρὸν τοῦ ὁποίου καταβιβάζομεν τὰ ἄλλα δύο ψηφία 84. Τὸ ἐξαγόμενον 1184 ταύτης τῆς πρώτης πράξεως περιέχει ἀκόμη τὸ διπλοῦν γινόμενον τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας, καὶ τὸ τετράγωνον τῶν μονάδων· ἀλλὰ δεκάδες πολλαπλασιαζόμεναι ἐπὶ μονάδας δὲν δίδουν εἰς τὸ γινόμενον, ὀλιγώτερον ἀπὸ δεκάδας, καὶ τὸ τελευταῖον ψηφίον 4 δὲν ἀποτελεῖ μέρος τοῦ διπλασίου γινομένου τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας· οὕτως τὸ διπλοῦν τοῦτο γινόμενον περιέχεται εἰς τὸ ἀριστερὸν μέρος 118, τὸ ὁποῖον χωρίζομεν ἀπὸ τὸ ψηφίον 4 διὰ στιγμῆς.

Λοιπὸν ἐὰν διπλασιάσωμεν τὰς δεκάδας, ὅθεν ἔχομεν 14, καὶ διαιρέσωμεν τὸ 118 διὰ 14, τὸ πηλίκον 8 εἶναι τὸ ψηφίον τῶν μονάδων, ἢ ἓν ψηφίον μεγαλήτερον ἐκείνου τῶν μονάδων, τὸ πηλίκον τοῦτο δὲν δύναται νὰ εἶναι πολλὰ μικρὸν, ἐπειδὴ 118 περιέχων τὸ γινόμενον τοῦ διπλοῦ τῶν δεκάδων 14 ἐπὶ τὰς μονάδας, πρέπει νὰ ἐξαλειφθῇ, ὅταν ἀφαιρῶμεν τὸ γινόμενον τοῦ 14 ἐπὶ τὸ ψηφίον, τὸ ὁποῖον δοκιμάζομεν· ἀλλ' ἠμπορεῖ νὰ εἶναι πολὺ μεγάλον· ἐπειδὴ 118, ἐκτὸς τοῦ τοιούτου διπλοῦ γινομένου, περιέχει προσέτι δεκάδας προερχομένας ἐκ τοῦ τετραγώνου τῶν μονάδων.

Διὰ νὰ βεβαιωθῶμεν, ἐὰν τὸ πηλίκον 8 ἐκφράζῃ τὰς μονάδας, ἀρκεῖ νὰ τὸ γράψωμεν εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ 14, καὶ οὕτως ἔχομεν 148· μετὰ ταῦτα ὑπὸ τὸ ἴδιον, καὶ νὰ πολλαπλασιάσωμεν 148 ἐπὶ τοῦ 8· σχηματίζομεν προφανῶς διὰ ταύτης τῆς πράξεως· $\overline{1}^{ον}$ τὸ τετράγωνον τῶν μονάδων· $\overline{2}^{ον}$ τὸ διπλοῦν γινόμενον τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας· ὅθεν ἐκτελεσθεὶς οὗτος ὁ πολλαπλασιασμὸς, δίδει γινόμενον 1184, ἀριθμὸν ἴσον μὲ τὸ ἐξαγόμενον τῆς πρώτης πράξεως, καὶ ἀφαιροῦντές το ἀπὸ τὸ γινόμενον τοῦτο, ἔχομεν 0 ὑπόλοιπον. Λοιπὸν 78 εἶναι ἡ ζητουμένη ῥίζα.

Τῷ ὄντι ἕπεται ἐκ τῶν ἄνω εἰρημένων πράξεων, ὅτι ἀφαιρέσαμεν διαδοχικῶς ἀπὸ 6084, τὸ τετράγωνον τῶν 7 δεκάδων, ἢ τοῦ 70, πλέον τὸ διπλοῦν γινόμενον τοῦ 70 ἐπὶ 8, πλέον τέλος πάντων τὸ τετράγωνον τοῦ 8, τουτέστι τὰ τρία μέρη, τὰ ὁποῖα περιέχονται εἰς τὴν σύνθεσιν τοῦ τετραγώνου ἀπὸ 70+8 ἢ 78· καὶ ἐπειδὴ τὸ ἐξαγόμενον τῆς ἀφαιρέσεως εἶναι 0, ἕπεται ὅτι 6084 εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ 78.

Ἔστω διὰ δεύτερον παράδειγμα ὁ ἀριθμὸς 841.

Ἐπειδὴ ἀριθμὸς οὗτος περιέχεται μεταξὺ τοῦ 100 καὶ 1000, ἡ ῥίζα του σύγκειται ἀκόμη ἀπὸ δύο ψηφία, ἢ ἀπὸ δεκάδας καὶ μονάδας· ἀποδεικνύομεν δὲ, καθὼς εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα, ὅτι ἡ ῥίζα τοῦ μεγαλητέρου τετραγώνου τοῦ περιεχομένου

	29
8.41	49
4	9
44.1	·441
44 1·	
0	

εἰς τὸ 8, ἢ εἰς τὸ ἀριστερὸν μέρος τῶν δύο τελευταίων ψηφίων εἶναι τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων τῆς ῥίζης· ἀλλὰ τὸ μεγαλήτερον τετράγωνον τὸ περιεχόμενον εἰς τὸ 8, εἶναι 4, τοῦ ὁποίου ἡ ῥίζα εἶναι 2, καὶ τοῦτο εἶναι τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων. Ἀφαιροῦντες τὸ τετράγωνον τοῦ 2, ἢ 4 ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν 8, ἔχομεν 4, καταβιβάζοντες δὲ εἰς τὸ πλευρὸν τούτου τοῦ ὑπολοίπου τὸ ἀκόλουθον τμῆμα 41, λαμβάνομεν 441, ἐξαγόμενον, τὸ ὁποῖον περιέχει ἀκόμη τὸ διπλοῦν γινόμενον τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας, πλέον τὸ τετράγωνον τῶν μονάδων.

Ἀποδεικνύομεν ἀκόμη, καθὼς εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα, ὅτι ἐὰν χωρίσωμεν τὸ τελευταῖον ψηφίον 1, διὰ στιγμῆς, καὶ διαιρέσωμεν τὸ κατὰ τὰ ἀριστερὰ μέρος 44 διὰ 4, διπλοῦν τῶν δεκάδων, τὸ πηλίκον θέλει εἶσθαι τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τοὐλάχιστον, ἐὰν δὲν εἶναι μεγαλήτερον ἀπὸ τοῦτο τὸ ψηφίον. Ἐδῶ τὸ πηλίκον εἶναι 11, καὶ εἶναι φανερὸν, ὅτι δὲν ἔχομεν περισσότερον παρὰ 9 διὰ τὰς μονάδας (ἐπειδὴ ἀλλέως ὑποτίθεται, ὅτι τὸ ψηφίον, τὸ ὁποῖον εὑρήκαμεν διὰ τὰς δεκάδας, δὲν εἶναι τὸ ἀληθινόν). Πρέπει λοιπὸν νὰ δοκιμάσωμεν 9· πρὸς τοῦτο, θέτομεν 9 εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ 4 διπλασίου τῶν δεκάδων, καὶ μετὰ ταῦτα ὑπὸ αὐτὸ τὸ ἴδιον, καὶ πολλαπλασιάζομεν 49 ἐπὶ 9· ὅθεν οὗτος ὁ πολλαπλασιασμὸς δίδει τὸ γινόμενον 441, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἐξαγόμενον τῆς πρώτης ἐργασίας· οὕτως 29 εἶναι ἡ ζητουμένη ῥίζα.

Σκεπτόμενοι ἐπάνω εἰς τὴν μέθοδον, τὴν ὁποίαν ἠκολουθήσαμεν, διὰ νὰ ἐξάξωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἀριθμοῦ μὲ τρία, ἢ μὲ τέσσαρα ψηφία, βλέπομεν ὅτι σύγκειται αὕτη ἀπὸ δύο ἀρχικὰς ἐργασίας.

Ἡ πρώτη συνίσταται εἰς τὸ νὰ χωρίσωμεν τὰ δύο εἰς τὰ δεξιὰ τελευταῖα ψηφία, καὶ νὰ ἐξάξωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ μεγαλητέρου τετραγώνου, τὸ ὁποῖον περιέχεται εἰς τὸ ἀριστερὸν μέρος. Αὕτη ἡ ῥίζα ἀναγκαίως ἐκφράζει τὰς δεκάδας τῆς ὅλης ῥίζης, ἐπειδὴ τὸ τετράγωνον ταύτης τῆς ῥίζης ἀκολουθημένης ἓν μηδενικὸν, καὶ τὸ τετράγωνον τῆς ἰδίας ῥίζης ανομένης ἀπὸ μίαν μονάδα, καὶ ἀκολουθημένης παρ-ιίως ἀπὸ ἓν μηδενικὸν, περιέχουσι προφανῶς τὸν ομένον ἀριθμόν. Ἡ δευτέρα, ἀφ' οὗ καταβάσωμεν δύο ψηφία εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ ἀριθμοῦ, καὶ χωρίσω-ι τὸ τελευταῖον τῶν δύο ψηφίων διὰ μιᾶς στιγμῆς, ιίσταται εἰς τὸ νὰ διαιρέσωμεν τὸ εἰς τὰ ἀριστερὰ ρος διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ ἤδη εἰς τὴν ῥίζαν εὑρε-ντος ψηφίου· τὸ δὲ πηλίκον ἐκφράζει τὰς μονάδας ν, ὅταν δὲν εἶναι πολλὰ μεγάλον· καὶ διὰ νὰ βε-ιωθῶμεν, ὅτι δὲν εἶναι πολλὰ μεγάλον, σχημα-ζομεν τὸ τετράγωνον τούτου τοῦ πηλίκου, καὶ τὸ ιόμενον τοῦ διπλασίου τῶν δεκάδων ἐπὶ τοῦτο τὸ ιλίκον· Ἐὰν τὸ λαμβανόμενον ἄθροισμα εἶναι ἴσον ! τὸ ἐξαγόμενον τῆς πρώτης πράξεως, ἢ ἂν εἶναι κρότερον ἀπὸ τὸ τοιοῦτον ἐξαγόμενον, τότε εἴμεθα ἔβαιοι, ὅτι τὸ πηλίκον παριστάνει τὰς μονάδας, καὶ ὁ γράφομεν τότε εἰς τὰ δεξιὰ τῶν δεκάδων. Εἰς ἐναν-ίαν ὅμως περίστασιν τὸ ἐλαττοῦμεν ἀπὸ μίαν ἢ πε-ισσοτέρας μονάδας.

Σημείωσις. Εἰς τὴν ἀναζήτησιν τῆς τετρα-ωνικῆς ῥίζης ἀριθμοῦ τινος, δὲν ἠμποροῦμεν κατὰ ·ρῶτον νὰ λάβωμεν τὸ τετράγωνον τῶν μονάδων· πειδὴ τοῦτο τὸ τετράγωνον δίδει ἐν γένει (ἀριθμ. 178) δεκάδας, αἱ ὁποῖαι συμπλέκονται μὲ ἐκείνας, ·ὰς ὁποίας δίδει τὸ διπλοῦν γινόμενον τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας, ὥστε εἶναι ἀδύνατον νὰ προσδιορί-σωμεν μὲ ἀκρίβειαν εἰς ποῖον μέρος τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ εὑρίσκεται τὸ τετράγωνον τῶν μονάδων.

Λαμβάνομεν ὡς τρίτον παράδειγμα ἀριθμὸν, ὅς τις δὲν εἶναι ἐντελὲς τετράγωνον.

Ἔστω ὁ ἀριθμὸς 1287.

Ἐφαρμόζοντες εἰς τοῦτον τὸν ἀριθμὸν τὴν ἀνωτέρω διδασκαλίαν εὑρίσκομεν 35 ῥίζαν, καὶ 62 ὑπόλοιπον. Τοῦτο δεικνύει, ὅτι 1287 δὲν εἶναι ἀκριβὲς τετράγωνον, ἀλλὰ περιέχεται μεταξὺ τοῦ τετραγώνου τοῦ 35 καὶ ἐκείνου τοῦ 36. Τῷ ὄντι τὸ τετράγωνον τοῦ 35 εἶναι 1225, καὶ ἐκεῖνο τοῦ 36 εἶναι 1296, ἀριθμὸς, ὅς τις ὑπερβαίνει τὸ 1225 ἀπὸ 71, ἢ ἀπὸ $35\times2+1$ (ἀριθμ. 180). Λοιπὸν, ὅταν εἷς ἀριθμὸς δὲν εἶναι ἀκριβὲς τετράγωνον, διὰ τῆς μεθόδου γνωρίζομεν τοὐλάχιστον τὴν ῥίζαν τοῦ μεγαλητέρου τετραγώνου, τὸ ὁποῖον περιέχεται εἰς τοῦτον τὸν ἀριθμὸν, ἢ τὸ ἀκέραιον μέρος τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τούτου τοῦ ἀριθμοῦ.

12.87	35
9	65
38.7	5
32.5	325
62	

Θέλομεν ἰδεῖ ταχέως τίνι τρόπῳ προσδιορίζομεν τὴν ὡς ἔγγιστα τιμὴν τοῦ κλάσματος, τὸ ὁποῖον καταστaίνει πλήρη τὴν ῥίζαν.

§. 182. Ἂς ἔλθωμεν τώρα εἰς τὴν ἐξαγωγὴν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἀριθμοῦ, ὅς τις ἔχει περισσότερον παρὰ τέσσαρα ψηφία.

Ἔστω 56821444 ὁ δεδομένος ἀριθμός.

56.82.14.44	7538		
49	145	1503	15068
78.2	5	3	8
725	725	4509	120544
571.4			
4509			
12054.4			
120544			
0			

Ἐπειδὴ ὁ δεδομένος ἀριθμὸς ὑπερβαίνει 10000, ἡ ῥίζα του πρέπει νὰ ἦναι μεγαλητέρα τοῦ 100· τουτέστιν, ἔχει περισσότερον παρὰ δύο ψηφία· ἀλλ' ὁποιοσδήποτε καὶ ἂν εἶναι ὁ ἀριθμὸς δύναται νὰ θεωρηθῇ πάντοτε ὡς σύνθετος μόνον ἀπὸ μονάδας καὶ δεκάδας, (ἐπειδὴ ἔστω 5367 εἷς ὁποιοσδήποτε ἀριθμός· οὗτος δύναται νὰ ἀναλυθῇ εἰς 5360+7 ἢ 5360 δεκάδας πλέον 7 μονάδας)· ἐκ τούτου τὸ τετράγωνον ταύτης τῆς ῥίζης, ἢ ὁ δεδομένος ἀριθμὸς περιέχει τὸ τετράγωνον τῶν δεκάδων, πλέον τὸ διπλοῦν γινόμενον τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας, πλέον τὸ τετράγωνον τῶν μονάδων· τὸ δὲ τετράγωνον τῶν δεκάδων δίδει τοὐλάχιστον ἑκατοντάδας· λοιπὸν τὸ τελευταῖον τμῆμα 44 δὲν ἀποτελεῖ μέρος τούτου, καὶ διὰ τοῦτο εἰς τὸ ἀριστερὸν μέρος τοῦ τμήματος τούτου εὑρίσκεται τὸ τετράγωνον. Λέγω ἤδη, ὅτι ἐὰν ζητήσωμεν τὴν ῥίζαν τοῦ μεγαλητέρου τετραγώνου, τὸ ὁποῖον περιέχεται εἰς τὸ ἀριστερὸν τοῦτο μέρος, θεωρουμένην εἰς τὴν ἀπόλυτόν της τιμὴν, θέλομεν ἔχει τὸν ἀριθμὸν ὅλων τῶν δεκάδων τῆς ζητουμένης ῥίζης. Τῷ ὄντι, ἔστω α ἡ ῥίζα τοῦ μεγαλητέρου τετραγώνου, τὸ ὁποῖον περιέχεται εἰς τὸν ἀριθμὸν 568214· τοῦτο ἄλλο δὲν δηλοῖ, εἰμὴ ὅτι ὁ τελευταῖος οὗτος ἀριθμὸς περιέχεται μεταξὺ α^2 καὶ $(\alpha+1)^2$. οὕτω λοιπὸν 568214×100 ἢ 56821400 περιέχεται μεταξὺ $\alpha^2\times100$ καὶ $(\alpha+1)^2\times100$· καὶ ἐπειδὴ οἱ δύο ἀριθμοὶ διαφέρουν μεταξύ των περισσότερον ἀπὸ ἑκατοντάδα, ἕπεται ὅτι καὶ ὁ δεδομένος ἀριθμὸς ἢ 56821444, περιέχεται μεταξὺ $\alpha^2\times100$ καὶ $(\alpha+1)^2\times100$. Οὕτως αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι τῶν δύο ἀριθμῶν $\alpha\times10$ καὶ $(\alpha+1)\times10$ περιέχουσι τὴν ζητουμένην ῥίζαν. Λοιπὸν τέλος πάντων, αὕτη ἡ τελευταία ῥίζα σύγκειται ἀπὸ α δεκάδας, καὶ ἀπὸ ἀριθμὸν τινὰ μονάδων μικρότερον τοῦ δέκα·

Μὲ τὸ μέσον τοῦτο φθάνομεν εἰς τὴν ἐξαγωγὴν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ ἀριθμοῦ 568214, θεωρουμένου μὲ τὴν ἀπόλυτόν του τιμὴν *).

Καὶ συλλογιζόμενοι ἐπὶ τούτου τοῦ ἀριθμοῦ, ὡς ἐπὶ τοῦ δεδομένου, ἐξάγομεν, ὅτι διὰ νὰ εὕρωμεν τὰς δεκάδας τῆς ῥίζης του, πρέπει νὰ ἐξάξωμεν τὴν ῥίζαν τοῦ μεγαλητέρου τετραγώνου, τὸ ὁποῖον περιέχεται εἰς τὸ ἀριστερὸν μέρος τοῦ 14, τουτέστιν εἰς τὸ 5682, καὶ διὰ νὰ λάβωμεν τὰς δεκάδας ταύτης τῆς νέας ῥίζης, πρέπει ἀκόμη νὰ ἀφαιρέσωμεν δύο τελευταῖα ψηφία 82, καὶ νὰ ἐξάξωμεν τὴν ῥίζαν τοῦ μεγαλητέρου τετραγώνου τοῦ περιεχομένου εἰς τὸ 56.

Ἐξάγοντες λοιπὸν τὴν ῥίζαν τοῦ 56, εὑρίσκομεν 7 διὰ τὸ 49. Γράφομεν 7 εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ, καὶ ἀφαιροῦμεν 49 ἀπὸ τὸ 56, καὶ ἔχομεν ὑπόλοιπον 7, εἰς τὸ πλευρὸν τοῦ ὁποίου κατεβάζομεν τὸ ἀκόλουθον τμῆμα 82 (ἐπειδὴ πρέπει ἤδη νὰ προσδιορίσωμεν τὸ δεύτερον ψηφίον τῆς ῥίζης τοῦ μεγαλητέρου τετραγώνου τοῦ περιεχομένου εἰς 5682)· χωρίζομεν τὸ τελευταῖον ψηφίον εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ 782. μετὰ ταῦτα διαιροῦμεν τὸ 78 διὰ τοῦ 14, διπλοῦ τῆς ἤδη εὑρεθείσης ῥίζης, καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 5, τὸ ὁποῖον γράφομεν εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ 14, καὶ ὑπὸ αὐτὸ τὸ ἴδιον. Μετὰ ταῦτα πολλαπλασιάζομεν 145

---

*) Ἐπειδὴ τὸ α^2 διαφέρει τοῦ $(\alpha+1)^2$ κατὰ $2\alpha+1$, τὸ δὲ α^2 διαφέρει τοῦ 568214 ὄχι περισσότερον τοῦ 2α, καὶ διὰ τοῦτο $100\,\alpha^2$ διαφέρει τοῦ 56821400 ὄχι περισσότερον τοῦ $2\alpha\times 100$, τὸ δὲ $100\,(\alpha+1)^2$ διαφέρει τοῦ $100\,\alpha^2$ κατὰ

$$100\times 2\alpha+100\times 1.$$

λοιπὸν $100\,(\alpha+1)^2$ διαφέρει τοῦ 56821400, τ' ὀλιγώτερον 100. λοιπόν,

$$56821400+44<100\,(\alpha+1)^2.$$

(Ὁ Μεταφραστής).

ἐπὶ 5, καὶ ἀφαιροῦμεν τὸ γινόμενον 725 ἀπὸ τὸ 782· τὸ δὲ 75 παῤῥησιάζει τότε τὴν συλλογὴν τῶν δεκάδων τῆς ῥίζης τοῦ ἀριθμοῦ 568214.

Διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὰς μονάδας κατεβάζομεν εἰς τὸ πλευρὸν τοῦ ὑπολοίπου 57, τὸ τμῆμα 14· τοῦτο μᾶς δίδει 5714, τοῦ ὁποίου χωρίζομεν τὸ τελευταῖον ψηφίον. Διαιροῦντες δὲ 571 διὰ 150 διπλασίου τῆς εὑρεθείσης ῥίζης ἔχομεν 3 πηλίκον, τὸ ὁποῖον γράφομεν εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ 150, καὶ ὑπὸ αὐτὸ τὸ ἴδιον. Μετὰ ταῦτα πολλαπλασιάζομεν 1503 ἐπὶ 3, καὶ ἀφαιροῦμεν τὸ διδόμενον 4509 ἀπὸ 5714· τὸ δὲ 753 ἐκφράζει τὸν ὅλον ἀριθμὸν τῶν δεκάδων τῆς ζητουμένης ῥίζης.

Τέλος πάντων, διὰ νὰ ἔχωμεν τὸ ψηφίον τῶν μονάδων, κατεβάζομεν εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου 1205 τὸ τελευταῖον τμῆμα 44. Μετὰ ταῦτα ἀμελοῦντες τὸ τελευταῖον ψηφίον, διαιροῦντες τὸ εἰς τὰ ἀριστερὰ μέρος 12054 διὰ 1506 διπλασίου τῆς εὑρεθείσης ῥίζης, ἔχομεν πηλίκον 8, τὸ ὁποῖον γράφομεν εἰς τὰ δεξιὰ τῶν 1506, καὶ ὑπ' αὐτὸ τὸ ἴδιον· πολλαπλασιάζομεν ὕστερον 15068 ἐπὶ 8, καὶ ἀφαιροῦντες τὸ γινόμενον 120544 λαμβάνομεν μηδὲν ὑπόλοιπον· λοιπὸν 7538 εἶναι ἡ ζητουμένη ῥίζα.

Διὰ νὰ τὴν βεβαιώσωμεν, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν 7538 ἐφ' ἑαυτὸν, κατὰ τοὺς κανόνας τοῦ ἀριθμητικοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Ἐὰν καλῶς ἐννοήσωμεν τὰ διάφορα μέρη τῆς ἀνωτέρας πράξεως, θέλομεν συμπεράνει μὲ εὐκολίαν τὴν ἀκόλουθον μέθοδον.

Χωρίζομεν τὸν ἀριθμὸν εἰς τμήματα ἀνὰ δύο ψηφία ἕκαστον, ἀρξάμενοι ἀπὸ τὰ δεξιὰ (ὁ ἀριθμὸς τῶν τμημάτων εἶναι ἴσος μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν ψηφίων τῆς ῥίζης). Λαμβάνομεν τὴν ῥίζαν τοῦ μεγαλητέρου τετραγώνου, τὸ ὁποῖον περιέχεται εἰς τὸ πρῶτον τμῆμα κατὰ τὰ ἀριστερὰ, τὸ ὁποῖον ἠμπορεῖ νὰ ἔχῃ μόνον ἓν ψηφίον, καὶ ἀφαιροῦμεν τὸ τετράγωνον τοῦ εὑρεθέντος ψηφίου ἀπὸ τὸ πρῶτον κατὰ τὰ ἀριστερὰ τμῆμα.

Κατεβάζομεν εἰς τὸ πλευρὸν τοῦ ὑπολοίπου τὸ δεύτερον κατὰ τὰ ἀριστερὰ τμῆμα καὶ χωρίζομεν τὸ τελευταῖον ψηφίον διὰ στιγμῆς. Μετὰ ταῦτα διαιροῦμεν τὸ εἰς τὰ ἀριστερὰ μέρος τούτου τοῦ ψηφίου, διὰ τοῦ διπλασίου τῆς εὑρεθείσης ῥίζης. Γράφομεν δὲ τὸ πηλίκον εἰς τὸ πλευρὸν τοῦ διπλασίου τῆς ῥίζης, καὶ πολλαπλασιάζομεν τὸν σχηματισμένον οὕτως ἀριθμὸν ἐπὶ τὸ πηλίκον, καὶ ἀφαιροῦμεν τὸ γινόμενον ἀπὸ τὸ πρῶτον ὑπόλοιπον τὸ συναγόμενον ἐκ τοῦ δευτέρου τμήματος.

Κατεβάζομεν εἰς τὸ πλευρὸν τοῦ νέου ὑπολοίπου τὸ τρίτον τμῆμα, καὶ χωρίζομεν τὸ τελευταῖον ψηφίον. Διαιροῦμεν ἔπειτα τὸ εἰς τὰ ἀριστερὰ μέρος διὰ τοῦ διπλασίου τῆς εὑρεθείσης ῥίζης· γράφομεν τὸ πηλίκον εἰς τὸ πλευρὸν τοῦ διπλασίου, καὶ μετὰ ταῦτα πολλαπλασιάζομεν τὸν οὕτως σχηματισθέντα ἀριθμὸν ἐπὶ τὸ πηλίκον καὶ ἀφαιροῦμεν τὸ γινόμενον ἐκ τοῦ συναγομένου δευτέρου ὑπολοίπου ἀπὸ τὸ τρίτον τμῆμα. Ἀκολουθοῦμεν ταύτην τὴν σειρὰν τῶν πράξεων, ἕως νὰ κατεβάσωμεν ὅλα τὰ τμήματα.

Ἐὰν εἰς τὸ τέλος ὅλων τῶν πράξεων εὕρωμεν μηδὲν ὑπόλοιπον, ὁ δεδομένος ἀριθμὸς εἶναι ἀκριβὲς τετράγωνον· ἐὰν δὲ εὕρωμεν ὑπόλοιπον, τότε ὁ ἀριθμὸς δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον, ὅμως ἔχομεν τὴν ῥίζαν τοῦ μεγαλητέρου τετραγώνου τοῦ περιεχομένου εἰς τὸν ἀριθμὸν, ἢ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ αὐτὸ, τὸ ἀκέραιον μέρος τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ ἀριθμοῦ· τὸ δὲ ὑπόλοιπον πρέπει νὰ εἶναι (ἀριθμ. 180) μικρότερον τοῦ διπλασίου τῆς εὑρεθείσης ῥίζης πλέον ἕν, ἢ ἀλλέως τὰ ψηφία τῆς εὑρεθείσης ῥίζης κακῶς ἐπροσδιορίσθησαν.

§. 183. Ἐφαρμόζομεν ἐκ νέου τὰ εἰρημένα εἰς τὴν ἐξαγωγὴν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τῶν ἀριθμῶν 17698849 καὶ 698485, καὶ εὑρίσκομεν $\sqrt{17698849} = 4207$, $\sqrt{698485} = 835$ μὲ ὑπόλοιπον 1260.

Πρώτη παρατήρησις. Εἰς τὸ πρῶτον τούτων τῶν δύο παραδειγμάτων εὑρίσκομεν 0 δι' ἓν τῶν ψηφίων τῆς ῥίζης. Τοῦτο ἀπαντᾶται, ἐπειδὴ ἀφ' οὗ κατεβάσαμεν ἓν τμῆμα, καὶ ἐχωρίσαμεν τὸ τελευταῖον ψηφίον, τὸ εἰς τὰ δεξιὰ μέρος εἶναι μικρότερον τοῦ διπλασίου τῆς εὑρεθείσης. Τοῦτο φανερόνει, ὅτι ἡ ῥίζα δὲν ἔχει μονάδας τῆς ἀντικειμένης τάξεως εἰς, τὸ καταβιβασθὲν τμῆμα, ἀλλὰ πρέπει νὰ βάλωμεν ἓν 0 εἰς τὴν ῥίζαν, διὰ νὰ δώσῃ εἰς τὰ εὑρεθέντα ψηφία τὴν σχετικήν των τιμήν.

Δευτέρα παρατήρησις. Προκύπτει ἐκ τῆς φύσεως τῆς ἰδίας πράξεως, ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν ψηφίων τῆς ῥίζης εἶναι ἴσος μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀπὸ δύο ψηφία τμημάτων, τὰ ὁποῖα δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν εἰς τὸν δεδομένον ἀριθμόν. Ἀλλ' αὕτη ἡ πρότασις δεικνύεται ἐκ τῶν προτέρων, τουτέστι χωρὶς τὴν βοήθειαν τῆς μεθόδου.

Τῷ ὄντι τὸ τετράγωνον τοῦ $10^{\nu-1}$ ἢ τοῦ μικροτέρου ἀριθμοῦ ἐκ ν ψηφίων, εἶναι ἴσον μὲ τὴν μονάδα ἀκολουθημένην ἀπὸ $2(\nu-1)$ ἢ ἀπὸ $2\nu-2$ μηδενικὰ, καὶ ἐκφράζει τὸν μικρότερον ἀριθμὸν ἀπὸ $2\nu-1$ ψηφία. Ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος, τὸ τετράγωνον τοῦ 10^{ν}, ἢ τοῦ μικροτέρου ἀριθμοῦ συνισταμένου ἀπὸ $\nu+1$ ψηφία εἶναι ἴσον μὲ τὴν μονάδα ἀκολουθημένην ἀπὸ 2ν μηδενικὰ, καὶ ἐκφράζει τὸν πλέον μικρότερον ἀριθμὸν συνιστάμενον ἀπὸ $2\nu+1$ ψηφία. Λοιπὸν κάθε ἀριθμὸς, ὅς τις δύναται νὰ ἀναλυθῇ εἰς ν τμήματα, ἕκαστον ἀπὸ δύο ψηφία (ἐξ ὧν τὸ ἓν ἠμπορεῖ νὰ ἔχῃ ἓν μόνον ψηφίον), ἔχει ῥίζαν, ἥτις περιέχεται μεταξὺ τοῦ $10^{\nu-1}$ καὶ 10^{ν}, καὶ ἐπομένως σύνθετον ἀπὸ ν ψηφία.

§. 184. Τρίτη παρατήρησις. Γνωρίζομεν συχνὰ ἀπὸ τὴν ἁπλῆν παρατήρησιν ἑνὸς ἀριθμοῦ ἀκεραίου, ὅτι δὲν εἶναι ἀκριβὲς τετράγωνον, καὶ τοῦτο εἶναι ὠφέλιμον εἰς τὰς πράξεις. Ἰδοὺ τὰ ἀρχικὰ τούτου σημεῖα.

1ον. Παντὸς ἀρτίου ἀριθμοῦ, ὅς τις δύναται νὰ ἐκφρασθῇ διὰ 2ν, τὸ τετράγωνον $4\nu^2$ εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ 4.

Οὕτως, πᾶς ἄρτιος ἀριθμὸς, ὅς τις δὲν εἶναι διαιρετὸς διὰ 4 (ἀριθμ. 140), δὲν εἶναι ἀκριβὲς τετράγωνον. Παρομοίως ἐπειδὴ τὸ τετράγωνον περιττοῦ τινὸς ἀριθμοῦ $2\nu+1$ εἶναι $4\nu^2+4\nu+1$, ἀριθμὸς, ὅς τις ἐλαττούμενος ἀπὸ μίαν μονάδα γίνεται διαιρετὸς διὰ τοῦ 4, ἕπεται ὅτι πᾶς ἀριθμὸς περιττὸς, ὅς τις ἐλαττούμενος ἀπὸ 1, δὲν εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 4, δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον.

2ον. Ἐν γένει πᾶς ἀριθμὸς, ὅς τις περιέχων ἕνα παράγοντα πρῶτον α, δὲν εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ α^2, δὲν δύναται νὰ εἶναι τέλειον τετράγωνον· ἐπειδὴ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τούτου τοῦ ἀριθμοῦ, ἐὰν ἦτον ἀκεραία, ἤθελεν εἶναι (ἀριθμ. 134) τῆς μορφῆς $\alpha\nu$, τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον $\alpha^2\nu^2$ εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ α^2.

Οὕτως ἀριθμός τις διαιρετὸς διὰ 3 ἢ 5, πρέπει εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν νὰ εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 9 ἢ 25, διὰ νὰ εἶναι τέλειον τετράγωνον.

Ἐπειδὴ κατὰ τὴν σύνθεσιν τοῦ τετραγώνου ἑνὸς ἀριθμοῦ, ὅς τις περιέχει περισσότερον ἀπὸ ἓν ψηφίον, (ἀριθμ. 181) αἱ ἁπλαῖ μονάδες τοῦ τετραγώνου προ-

νται ἀπὸ τὸ τετράγωνον τῶν μονάδων τῆς ῥίζης·
ιατίζοντες δὲ τὰ τετράγωνα τῶν ἐννέα πρώτων
μῶν, βλέπομεν, ὅτι οὐδὲν τούτων τελειόνει εἰς
ηφία 2, 3, 7, 8.

4ον. Πᾶς ἀριθμὸς, ὅς τις τελειόνει εἰς τὸ φη-
5, δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον, ἐὰν τὸ φη-
τῶν δεκάδων του δὲν εἶναι 2. Τὸ χαρακτηριστι-
τοῦτο πορίζεται καὶ αὐτὸ ἀπὸ τὴν σύνθεσιν τοῦ
αγώνου ἀριθμοῦ τινὸς ἐκ δύο ἢ περισσοτέρων φη-
ν. Τὰ δύο τελευταῖα φηφία τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ
ταύτην τὴν περίστασιν προέρχονται ἀπὸ τὸ τετρά-
ον τῶν μονάδων τῆς ῥίζης· διότι τοῦ φηφίου τού-
τῶν μονάδων ὄντος 5, τὸ διπλοῦν γινόμενον τῶν
ίδων ἐπὶ τοῦτο τὸ φηφίον εἶναι ἀναγκαίως εἰς ἀριθ-
ἑκατοντάδων· ἀλλὰ τὸ τετράγωνον τοῦ 5 εἶναι
, λοιπὸν ὁ ἀριθμὸς πρέπει νὰ τελειόνῃ εἰς 25.

5ον. Τέλος πάντων, πᾶς ἀριθμὸς, ὅς τις τε-
όνει εἰς ἀριθμὸν περιττὸν μηδενικῶν δὲν εἶναι τέ-
ον τετράγωνον· τοῦτο εἶναι φανερόν· ἐπειδὴ ἐὰν
ίζα ἦτον ἀκριβὴς, αὕτη ἤθελεν εἶναι ἀκέραιος ἀριθ-
τελειόνων εἰς ἓν ἢ περισσότερα μηδενικὰ, τοῦ
ίου τὸ τετράγωνον ἔπρεπε νὰ περιέχῃ δύο φοραῖς
ειότερα μηδενικὰ, ἀφ' ὅσα δὲν ἤθελεν ἔχει ἡ ῥίζα,
ἑπομένως ἀριθμός τις ἄρτιος μηδενικῶν, τὸ ὁποῖον
ελεν εἶναι ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως.

ξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης διὰ προσεγγίσεως.

§. 185. Ὅταν ἀκέραιός τις ἀριθμὸς δὲν ἦναι
τράγωνον ἄλλου ἀκεραίου ἀριθμοῦ, δὲν δύναται νὰ
αι πλέον οὔτε τετράγωνον ἀκριβοῦς κλασματικοῦ
ιθμοῦ (ἀριθμ. 179)· ἀλλ' ἐὰν εἶναι ἀδύνατον νὰ