$$\frac{P}{P'}-\frac{K}{K'}=\frac{(K\rho+\Pi)K'-K(K'\rho+\Pi')}{P'K'}$$

Ἐκτελοῦντες τοὺς ὑπολογισμοὺς, καὶ ἀνάγοντες εὑρίσκομεν

$$\frac{P}{P'}-\frac{K}{K'}=\frac{\Pi K'-K\Pi'}{P'K'}.$$

Ὅθεν βλέπομεν, ὅτι ὁ ἀριθμητὴς τῆς διαφορᾶς $\frac{P}{P'}-\frac{K}{K'}$ εἶναι ἴσος καὶ μὲ ἐναντίον σημεῖον τοῦ ἀριθμητοῦ της διαφορᾶς $\frac{K}{K'}-\frac{\Pi}{\Pi'}$ ἢ $\frac{K\Pi'-\Pi K'}{K'\Pi'}$· τουτέστιν οἱ ἀριθμηταὶ δύο διαδοχικῶν διαφορῶν εἶναι ἴσοι καὶ μὲ ἐναντία σημεῖα.

Ἀλλ' ἐὰν θεωρήσωμεν τὰ δύο πρῶτα ἡγμένα $\frac{\alpha}{1}$ καὶ $\frac{\alpha\beta+1}{\beta}$, ἔχομεν $\frac{\alpha\beta+1}{\beta}-\frac{\alpha}{1}=\frac{+1}{\beta\times 1}$.

Λοιπὸν κατὰ τὰ προειρημένα ὁ ἀριθμητὴς τῆς ἀκολούθου διαφορᾶς πρέπει νὰ εἶναι -1· ὁ ἀριθμητὴς τῆς τρίτης διαφορᾶς πρέπει νὰ εἶναι $+1$, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Ἐν γένει ὁ ἀριθμητὴς μιᾶς τινὸς διαφορᾶς εἶναι $+1$, ἐὰν ἡ δευτέρα τῶν δύο θεωρουμένων ἡγμένων ἦναι βαθμοῦ ἀρτίου, καὶ -1, ἐὰν ἦναι περιττοῦ· ὁ δὲ παρονομαστὴς εἶναι προδήλως πάντοτε ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν τῶν δύο ἡγμένων.

§. 172. *Συνέπεια τῆς προηγουμένης ἰδιότητος.* Ἡγμένον τὶ ὁποιουδήποτε βαθμοῦ $\frac{P}{P'}$ εἶναι πάντοτε κλάσμα, ἢ ἀνάγωγος κλασματικὸς ἀριθμός.

Τῷ ὄντι ἂς ὑποθέσωμεν πρὸς τὸ παρὸν, ὅτι P καὶ P′ ἔχουσι κοινὸν παράγοντα τὸ θ· ἐπειδὴ δὲ, κα-

τὰ τὴν ἀνωτέρω ἰδιότητα ἔχομεν $PK' - KP' = + \text{ ἢ } - 1$· ἐξάγομεν διαιροῦντες τὰ δύο μέλη διὰ ϑ,
$\frac{PK'}{\vartheta} - \frac{KP'}{\vartheta} = + \text{ ἢ } - \frac{1}{\vartheta}$· ἀλλὰ τὸ πρῶτον μέλος ταύτης τῆς ἰσότητος εἶναι ἀκέραιος ἀριθμὸς, ἐπειδὴ P καὶ P' εἶναι διαιρετοὶ διὰ τοῦ ϑ, καὶ τὸ δεύτερον μέλος εἶναι οὐσιωδῶς κλάσμα· λοιπὸν εἶναι ἄτοπον νὰ ὑποθέσωμεν, ὅτι P καὶ P' δὲν εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοί.

Ἕπεται ἐκ τούτου, ὅτι, ἐὰν τρέψωμεν εἰς συνεχὲς, ἓν κλάσμα, τοῦ ὁποίου οἱ δύο ὅροι δὲν εἶναι πρῶτοι ἀριθμοὶ μεταξύ των, καὶ σχηματίσωμεν μετὰ ταῦτα ὅλα τὰ ἡγμένα ἕως εἰς τὸ τελευταῖον, δὲν θέλομεν εὕρει τὸ δεδομένον κλάσμα ὑπὸ τὴν πρωτότυπον μορφήν του, ἀλλὰ τοῦτο τὸ ἴδιον κλάσμα ἡγμένον εἰς τὴν ἁπλουστέραν του μορφὴν, τουτέστιν ἐλεύθερον ἀπὸ τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην μεταξὺ τῶν δύο ὅρων του.

Ἔστω π. χ. τὸ κλάσμα $\frac{348}{924}$.

Τρέποντές το εἰς συνεχὲς κλάσμα εὑρίσκομεν

$$\frac{348}{924} = 0 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{9}}}}}$$

Τὰ δὲ ἡγμένα εἶναι $\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{29}{77}$.

Τὸ τελευταῖον ἡγμένον $\frac{29}{77}$ εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ $\frac{348}{924}$, ἐλευθέρα τοῦ παράγοντος 12, κοινοῦ εἰς τοὺς δύο ὅρους του.

§. 173. Δευτέρα ἰδιότης. Ἂς ἐπαναλάβωμεν τὸ γενικὸν συνεχὲς κλάσμα

$$\chi = \alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma + \cfrac{1}{\delta + \cfrac{1}{\varepsilon \ldots}}}}$$

Θεωροῦτες τὰ πρῶτα συστατικὰ κλάσματα, εὐκόλως γνωρίζομεν, ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ χ περιέχεται μεταξὺ τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου ἡγμένου, μεταξὺ τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Τῷ ὄντι ἔχομεν προφανῶς κατὰ πρῶτον $\chi > \alpha$· λέγω ἔπειτα ὅτι $\chi < \alpha + \frac{1}{\beta}$, ἐπειδὴ διὰ νὰ λάβωμεν τὴν τιμὴν τοῦ χ, πρέπει νὰ αὐξήσωμεν τὸ β ἀπὸ τὸ ὑπόλοιπον τοῦ συνεχοῦς κλάσματος· οὕτως, τὸ κλάσμα $\frac{1}{\beta}$ εἶναι μεγαλήτερον ἀφ' ὅ,τι πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸ α. Λοιπὸν $\alpha + \frac{1}{\beta}$ εἶναι πολλὰ μεγάλον.

Ἤδη, ἐὰν θεωρήσωμεν τὸ ἡγμένον $\alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma}}$, ἐπειδὴ γ εἶναι πολλὰ μικρὸν, ἕπεται ὅτι $\beta + \frac{1}{\gamma}$ εἶναι παρονομαστὴς πολλὰ μεγάλος. Λοιπὸν $\alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma}}$ εἶναι κλάσμα μικρότερον ἀπὸ τὴν ἀληθῆ τιμὴν τοῦ χ.

Ἠμποροῦμεν ὅσον θέλωμεν νὰ προχωρήσωμεν τοῦτον τὸν συλλογισμόν· ἀλλ' ἦτον ὠφέλιμον νὰ δώμεν ἀπόδειξίν τινὰ ἀναξάρτητον ἀπὸ τὸν βαθμὸν τοῦ συστατικοῦ κλάσματος, εἰς τὸ ὁποῖον ἀσχολούμεθα.

Ἔστωσαν πρὸς τοῦτο τὰ δύο διαδοχικὰ ἡγμένα $\frac{\Pi}{\Pi'}$ καὶ $\frac{K}{K'}$, ὁποιουδήποτε βαθμοῦ, καὶ πρόκειται νὰ προσδιορίσωμεν τὴν τιμὴν τῶν διαφορῶν $x-\frac{\Pi}{\Pi'}, x-\frac{K}{K'}$.

Παρατηροῦμεν, ὅτι εἰς τὴν ἔκφρασιν τοῦ ἡγμένου $\frac{P}{P'}$, ἢ $\frac{K\rho+\Pi}{K'\rho+\Pi'}$ ἂν ἀντεισάξωμεν ἀντὶ τοῦ ἀτελοῦς πηλίκου ρ, τὸ τέλειον πηλίκου ψ ἢ $\rho+\cfrac{1}{\sigma+\cfrac{1}{\tau+\ldots}}$, τοῦ ὁποίου ρ εἶναι τὸ ἀκέραιον μέρος, θέλει ἀναφανῆ ἡ τιμὴ τοῦ ἀριθμοῦ ἡγμένου εἰς συνεχὲς κλάσμα, ἐπειδὴ τότε ἔχομεν τὸ ἡγμένον τοῦ ὅλου συνεχοῦς κλάσματος. Ἔχομεν λοιπὸν κατὰ ταύτην τὴν παρατήρησιν. $x=\frac{K\psi+\Pi}{K'\psi+\Pi'}$.

ὅθεν $x-\frac{\Pi}{\Pi'}=\frac{K\psi+\Pi}{K'\psi+\Pi'}-\frac{\Pi}{\Pi'}=\frac{(K\Pi'-\Pi K')\psi}{(K'\psi+\Pi')\Pi'}$

καὶ $x-\frac{K}{K'}=\frac{K\psi+\Pi}{K'\psi+\Pi'}-\frac{K}{K'}=\frac{\Pi K'-K\Pi'}{(K'\psi+\Pi')K'}$

Ἤδη, ἐὰν θεωρήσωμεν προσεκτικῶς τὰς δύο ταύτας διαφοράς, βλέπομεν, ὅτι οἱ παρονομασταὶ εἶναι οὐσιωδῶς θετικοί. Εἰς δὲ τοὺς ἀριθμητὰς ψ εἶναι θετικὸν, καὶ $K\Pi'-\Pi K'$, $\Pi K'-K\Pi'$ εἶναι ἴσοι καὶ ἐναντίων σημείων. Οὕτως οὗτοι οἱ ἀριθματαὶ ἔχουν διαφορετικὰ σημεῖα.

Ἕπεται ἐκ τούτου, ὅτι, ἐὰν ἔχωμεν $x > \text{ἢ} < \frac{\Pi}{\Pi'}$, πρέπει ἐξ ἀνάγκης νὰ ἔχωμεν . . . . . . $x > \text{ἢ} < \frac{K}{K'}$.

τουτέστιν, ἐὰν ὁ ἀριθμὸς ἀχθεὶς εἰς συνεχὲς κλάσμα εἶναι μεγαλήτερος ἢ μικρότερος παρὰ τὸ ἡγμένον $\frac{\Pi}{\Pi'}$, ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς θέλει εἶναι ἢ μικρότερος, ἢ μεγαλήτερος παρὰ $\frac{K}{K'}$. Λοιπὸν τέλος πάντων, ἡ τιμὴ τοῦ ἀριθμοῦ ἀχθέντος εἰς συνεχὲς κλάσμα περιέχεται πάντοτε μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ἡγμένων ὁποιουδήποτε βαθμοῦ.

Σημείωσις. Ἐὰν τὸ ἡγμένον $\frac{K}{K'}$ εἶναι βαθμοῦ ἀρτίου, $K\Pi' - \Pi K'$, τὸ ὁποῖον εἶναι ὁ ἀριθμητὴς τῆς διαφορᾶς μεταξὺ $\frac{K}{K'}$ καὶ $\frac{\Pi}{\Pi'}$, εἶναι θετικὸν καὶ ἴσον μὲ $+1$ (ἀριθμ. 171.). Οὕτως ἔχομεν $x > \frac{\Pi}{\Pi'}$ καὶ $x < \frac{K}{K'}$. Λοιπὸν ὅλα τὰ ἡγμένα περιττοῦ βαθμοῦ εἶναι μικρότερα παρὰ τὸν ἡγμένον εἰς συνεχὲς κλάσμα ἀριθμόν.

§. 174. Τρίτη ἰδιότης. Τὰ διάφορα ἡγμένα δίδουν ὡς ἔγγιστα τιμὰς τοῦ x, καὶ μὲ εὐκολίαν προσδιορίζομεν τὸν βαθμὸν τῆς προσεγγίσεως δι' ἑκάστου τούτων.

Κατὰ πρῶτον, ἐπειδὴ εἴδομεν, ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ x εὑρίσκεται μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ἡγμένων, $\frac{\Pi}{\Pi'}$ καὶ

$\frac{K}{K'}$, ἕπεται ὅτι ἡ διαφορὰ μεταξὺ χ καὶ ἑνὸς τούτων τῶν ἡγμένων εἶναι μικροτέρα παρὰ $\frac{1}{\Pi' K'}$, διαφρὰ, ἥτις ὑπάρχει μεταξὺ τῶν δύο ἡγμένων. Ἤδη λοιπὸν βλέπομεν, ὅτι τὸ σφάλμα τὸ πραττόμενον, ὅταν λαμβάνωμεν ἓν τῶν δύο ἡγμένων διὰ τὴν τιμὴν τοῦ χ, εἶναι μικρότερον τῆς μονάδος διὰ τοῦ γινομένου τῶν παρονομαστῶν τῶν διαιρεθείσης. Ἀλλὰ μᾶλλον, ἐὰν θεωρήσωμεν τὴν διαφορὰν $\chi - \frac{K}{K'} = \frac{\Pi K' - K\Pi'}{(K'\psi + \Pi')K'}$, τὴν ὁποίαν ἐλάβομεν εἰς τὸν ἀνωτέρω ἀριθμὸν, ἐπειδὴ ἔχομεν (ἀριθμ. 171) $\Pi K' - K\Pi' = 1$ (ἀφαιρεθέντος τοῦ σημείου), προκύπτει $\chi - \frac{K}{K'} = \frac{1}{(K'\psi + \Pi')K'}$. Ἀλλὰ τὸ τέλειον πηλίκον ψ εἶναι φύσικὰ μεγαλήτερον τοῦ 1, λοιπὸν $(K'\psi + \Pi')\ K'$ εἶναι $> (K' + \Pi')\ K'$, καὶ διὰ περισσότερον δίκαιον $> K'^2$. Λοιπὸν $\chi - \frac{K}{K'} < \frac{1}{(K' + \Pi')K'}$, καὶ ἔτι μᾶλλον $\chi - \frac{K}{K'} < \frac{1}{K'^2}$. Οὕτως ἡ διαφορὰ μεταξὺ χ καὶ $\frac{K}{K'}$, ἢ τὸ πραττόμενον σφάλμα, ὅταν λαμβάνωμεν $\frac{K}{K'}$, ὡς τιμὴν τοῦ χ, εἶναι μικροτέρα παρὰ τὴν μονάδα διὰ τοῦ γινομένου τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ ἡγμένου διαιρεθεῖσαν καὶ πολλαπλασιασθεῖσαν ἐπὶ τὸ ἄθροισμα τοῦ αὐτοῦ τούτου παρονομαστοῦ, καὶ τοῦ πρὸ αὐτοῦ, ἢ μὲ ὄχι τόσην ἀκρίβειαν, ἀλλὰ μὲ πλειοτέραν ἁπλότητα, μικρότερον τῆς μονάδος διὰ τοῦ τετραγώνου τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ ἡγμένου διαιρεθείσης.

§. 175. Τετάρτη ἰδιότης. Ἡγμένον ὁποιουδήποτε βαθμοῦ δίδει τιμὴν ἐγγυτέραν εἰς τὴν χ, παρὰ κάθε ἄλλο πρὸ αὐτοῦ.

Τῷ ὄντι ἂς θεωρήσωμεν ἀκόμη τὰς δύο διαφορὰς τοῦ ἀριθμοῦ 173, $\chi - \frac{\Pi}{\Pi'} = \frac{(\mathrm{K}\Pi' - \Pi\mathrm{K}')\psi}{(\mathrm{K}'\psi+\Pi')\Pi'}$, καὶ $\chi - \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{K}'} = \frac{\Pi\mathrm{K}' - \mathrm{K}\Pi'}{(\mathrm{K}'\psi+\Pi')\mathrm{K}'}$. καὶ ἐπειδὴ ἔχομεν (ἀριθμ. 170) $\mathrm{K}' > \Pi'$, ἕπεται, ὅτι ὁ παρονομαστὴς $(\mathrm{K}'\psi+\Pi)\mathrm{K}$ εἶναι μεγαλήτερος παρὰ τὸν παρονομαστὴν $(\mathrm{K}'\psi+\Pi')\Pi'$ προσέτι ψ εἶναι >1, λοιπὸν (ἀφαιρεθέντος τοῦ σημείου) ὁ ἀριθμητὴς $\Pi\mathrm{K}' - \mathrm{K}\Pi'$ εἶναι μικρότερος παρὰ τὸν ἀριθμητὴν $(\mathrm{K}\Pi' - \Pi\mathrm{K}')\psi$. Οὕτω διὰ ταύτης τῆς διπλῆς αἰτίας, ἡ διαφορὰ μεταξὺ χ καὶ $\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{K}'}$ εἶναι ἀριθμητικῶς μικροτέρα παρὰ τὴν μεταξὺ χ καὶ $\frac{\Pi}{\Pi'}$.

§. 176. Πέμπτη καὶ τελευταία ἰδιότης. Ἡγμένον ὁποιουδήποτε βαθμοῦ πλησιάζει πλέον εἰς τὴν τιμὴν τῆς χ, ὄχι μόνον παρὰ κάθε ἄλλο πρὸ αὐτοῦ ἠγμένον, ἀλλ' ἀκόμη παρὰ κάθε ἄλλο κλάσμα, τοῦ ὁποίου ὁ παρονομαστὴς εἶναι μικρότερος παρὰ τὸν τοῦ θεωρουμένου ἠγμένου, ὥστε βεβαιούμεθα, ὅτι δὲν ὑπάρχει κἀνὲν ἄλλο κλάσμα δίδον εἰς ὅρους ἁπλουστέρους τιμὴν πλησιεστέραν εἰς τὴν χ.

Ἔστω $\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{K}'}$ τὸ θεωρούμενον ἠγμένον, καὶ τ κλάσμα $\frac{\mu}{\mu'}$ ἔχον $\mu' < \mathrm{K}'$· λέγω, ὅτι $\chi - \frac{\mu}{\mu'}$ εἶναι μεγαλήτερον (ἀφαιρεθέντος τοῦ σημείου) παρὰ $\chi - \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{K}'}$.

Δεῖξις. Παρατηροῦμεν κατὰ πρῶτον, ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{\mu}{\mu'}$, δὲν δύναται νὰ εὑρεθῇ μεταξὺ $\frac{K}{K'}$ καὶ $\frac{\Pi}{\Pi'}$, ἐπειδὴ διὰ νὰ ὑπάρχῃ τοῦτο, ἔπρεπεν ἡ διαφορὰ μεταξὺ $\frac{\Pi}{\Pi'}$ καὶ $\frac{\mu}{\mu'}$, τουτέστι $\frac{\Pi\mu'-\mu\Pi'}{\Pi'\mu'}$, νὰ ἦναι ἀριθμητικῶς μικροτέρα τῆς διαφορᾶς $\frac{1}{\Pi'K'}$, μεταξὺ τοῦ $\frac{K}{K'}$ καὶ $\frac{\Pi}{\Pi'}$, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀδύνατον· ἐπειδὴ $\Pi\mu'-\mu\Pi'$ ἀριθμὸς ἀκέραιος, εἶναι τοὐλάχιστον ἴσος μὲ τὸ 1, καὶ $\mu'\Pi'$ εἶναι μικρότερος παρὰ τὸ $\Pi'K'$, ἐξαιτίας τῆς ὑποθέσεως $\mu'<K'$; (δὲν δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν $\Pi\mu'-\mu\Pi'=0$, ἐπειδὴ ἠθέλαμεν ἔχει $\frac{\Pi}{\Pi'}=\frac{\mu}{\mu'}$, καὶ ἐπειδὴ τοῦτο τὸ τελευταῖον κλάσμα, μὲ τὸ νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἡγμένον, τὸ ὁποῖον προηγεῖται $\frac{K}{K'}$, ἡ πρότασις ἤδη εἶναι ἀποδεδειγμένη.)

Ἕπεται ἐκ τούτου, ὅτι $\frac{\Pi}{\Pi'}$ εἶναι εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν $>$ ἢ $<\frac{\mu}{\mu'}$. Λοιπὸν αἱ διαφοραὶ $\frac{\Pi}{\Pi'}-\frac{\mu}{\mu'}$ καὶ $\frac{K}{K'}-\frac{\mu}{\mu'}$, ἢ οἱ ἀριθμηταί των $\Pi\mu'-\mu\Pi'$, $K\mu'-\mu K'$, εἶναι τοῦ ἰδίου σημείου.

Τούτου τεθέντος, εὑρίσκομεν (ἀριθμ. 173).

$$x \mp \frac{K}{K'} = \frac{\Pi K'-K\Pi'}{(K'\psi+\Pi')K'} = \frac{1}{(K'\psi+\Pi')K'}.$$

Ἂς λάβωμεν τώρα τὴν διαφορὰν μεταξὺ χ καὶ $\frac{\mu}{\mu'}$, συνάγομεν $\chi - \frac{\mu}{\mu'} = \frac{K\psi+\Pi}{K'\psi+\Pi'} - \frac{\mu}{\mu'} = \frac{(K\mu'-\mu K')\psi+\Pi\mu'-\mu\Pi'}{(K'\psi+\Pi')\mu'}$. ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως, $\mu < K'$, οὕτως ὁ παρονομαστὴς ταύτης τῆς δευτέρας διαφορᾶς εἶναι μικρότερος ἐκείνου τῆς πρώτης· προσέτι ὁ ἀριθμητὴς $(K\mu' - \mu K')\psi + \Pi\mu' - \mu\Pi'$ εἶναι σύνθετος ἀπὸ δύο ὅρους, οἵτινες ἢ προσθέτονται, ἢ ἀφαιροῦνται εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν, καὶ διὰ τοῦτο μεγαλήτερος τοῦ 2. Λοιπὸν διὰ τὸν διπλοῦν τοῦτον λόγον $\chi - \frac{\mu}{\mu'}$ εἶναι ἀριθμητικῶς μεγαλήτερον παρὰ $\chi - \frac{K}{K'}$.

Σ. Κ. Αἱ τέσσαρες τελευταῖαι ἰδιότητες ἐπιστηρίζονται ἐπὶ τοῦ ἰδίου ὑπολογισμοῦ, ἐκείνη δὲ τοῦ ἀριθμοῦ 173, ἥτις θεωρεῖ τὴν ἔκφρασιν τῆς διαφορᾶς μεταξὺ τοῦ χ καὶ $\frac{\mu}{\mu'}$, λογίζεται ἡ πέμπτη. Τοῦτο καταστaίνει τὰς ἀποδείξεις πλέον εὐκόλους.

§. 177. Διὰ νὰ τελειώσωμεν τὴν στοιχειώδη θεωρίαν τῶν συνεχῶν κλασμάτων, σημειόνομεν ἐδῶ τὴν χρῆσιν αὐτῆς, ὅταν ἐκτιμῶμεν τὴν ὡς ἔγγιστα τιμὴν ἀναγώγου τινὸς κλάσματος, τοῦ ὁποίου οἱ δύο ὅροι εἶναι πολλὰ μεγάλοι.

Κατὰ πρῶτον ἄγομεν τὸν δεδομένον ἀριθμὸν εἰς συνεχὲς κλάσμα κατὰ τὸν κανόνα τοῦ ἀριθμοῦ 167, μετὰ ταῦτα σχηματίζομεν τὰ διαδοχικὰ ἡγμένα, κατὰ τὸν νόμον τοῦ 169 ἀριθμοῦ· οὕτως ἔχομεν σειρὰν κλασμάτων, ἐναλλὰξ μεγαλήτερα καὶ μικρότερα παρὰ τὸν δεδομένον ἀριθμὸν (ἀριθμ. 173)· καὶ μεταξὺ τῶν τοιούτων κλασμάτων ἐκλέγομεν ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον δίδει τὸν βαθμὸν τῆς προσεγγίσεως, τὸν ὁποῖον θέλομεν νὰ εὕρωμεν διὰ τὸ κλάσμα. Ὁ τοιοῦτος βαθμὸς (ἀριθμ. 174) σημειοῦται διὰ $\frac{1}{(K'+\Pi')K'}$ ἢ $\frac{1}{K'^2}$, ἐὰν $\frac{K}{K'}$ ἦναι τὸ ἡγμένον, τὸ ὁποῖον θεωροῦμεν· τὸ ἡγμένον πρέπει νὰ ἦναι (ἀριθμ. 175) βαθμοῦ τόσον πλέον μακρὰν, ὅσον θέλομεν νὰ εὕρωμεν μεγαλήτερον βαθμὸν προσεγγίσεως.

Ἂς προτεθῇ π. χ., νὰ ἐκτιμήσωμεν ὡς ἔγγιστα τὸν λόγον τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον.

Ἠξεύρομεν ὅτι ὁ λόγος οὗτος ἐκφραζόμενος εἰς δεκαδικὰ ἔχει διὰ τιμὴν μεῖον ἑκατοχιλιοστημορίου, 3, 14159, ἢ $\frac{314159}{100000}$.

Εὑρίσκομεν κατὰ πρῶτον διὰ τὴν τιμὴν τούτου τοῦ ἀριθμοῦ ἡγμένου εἰς συνεχὲς κλάσμα,

$$\frac{314159}{100000},\ \text{ἢ}\ x=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{25+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{4}}}}}}}$$

τὸ ὁποῖον δίδει τὰ διαδοχικὰ ἡγμένα, κατὰ τὸν νόμον τοῦ ἀριθμοῦ 169· $\frac{3}{1}$, $\frac{22}{7}$, $\frac{333}{106}$, $\frac{355}{113}$, $\frac{9208}{2931}$, $\frac{9563}{3044}$, $\frac{76149}{24239}$, $\frac{314159}{100000}$. Ἐὰν λάβωμεν κατὰ πρῶτον $\frac{22}{7}$ διὰ τὴν τιμὴν τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ, πράττομεν σφάλμα μικρότερον παρὰ $\frac{1}{7(7+1)}$ ἢ $\frac{1}{56}$· ἀλλὰ τὸ ἡγμένον τοῦτο δίδει ἀκόμη προσεγγίσεως πλέον ἀνώτερον βαθμόν· διότι ἐπειδὴ ὁ δεδομένος ἀριθμὸς εὑρίσκεται μεταξὺ τῶν $\frac{22}{7}$ καὶ $\frac{333}{106}$, ἕπεται ὅτι $\frac{22}{7}$ διαφέρει τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ κατὰ ποσότητα μικροτέραν παρὰ $\frac{22}{7}-\frac{333}{106}$ ἢ $\frac{1}{742}$· οὕτως τὸ πραχθὲν σφάλμα εἶναι πολλὰ μικρότερον ἀπὸ $\frac{1}{100}$· οὕτως τὸν ἀριθμὸν $\frac{22}{7}$, ἢ $3\frac{1}{7}$ συχνὰ μεταχειριζόμεθα, διὰ νὰ ἐκφράσωμεν τὸν λόγον τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον, καὶ εἶναι ὁ λόγος, τὸν ὁποῖον ἔδωκεν ὁ Ἀρχιμήδης.

Τὸ τέταρτον ἡγμένον $\frac{355}{113}$, τὸ ὁποῖον δὲν εἶναι περισσότερον σύνθετον παρὰ τὸ $\frac{333}{106}$, δίδει τιμὴν πολὺ πλέον πλησιάζουσαν. Διότι ἐπειδὴ ὁ δεδομένος ἀριθμὸς εὑρίσκεται μεταξὺ $\frac{355}{113}$ καὶ $\frac{9208}{2931}$, ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ καὶ τοῦ $\frac{355}{113}$ εἶναι μικροτέρα τοῦ $\frac{1}{113\times2931}$ κλάσματος, τὸ ὁποῖον φανερὰ εἶναι μικρότερον παρὰ 0,00001. Πρέπει νὰ σημειώσωμεν, ὅτι τὰ δύο κλάσματα $\frac{355}{113}$ καὶ $\frac{314159}{100000}$, τῶν ὁποίων τὸ πρῶτον ἐκφράζεται εἰς ὅρους ἁπλουστέρους δίδουν τὴν αὐτὴν προσέγγισιν (ἐκτιμωμένην εἰς δεκαδικὰ) διὰ τὴν σχέσιν τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον. Οὗτος εἶναι ὁ λόγος, τὸν ὁποῖον ἔδωκεν ὁ Ἀδριανὸς Μέτιος. Τὰ ἀκόλουθα ἠγμένα, εἶναι τόσον πολλὰ σύνθετα, ὥστε δυσκόλως καὶ ἀνωφελῶς ἀντεισάγονται εἰς τὸν δεδομένον ἀριθμόν.

Δὲν ἐκτεινόμεθα περισσότερον εἰς τὰς ἰδιότητας τῶν ἀριθμῶν, ἀλλὰ συμβουλεύομεν τὴν νεολαίαν, ἥτις ἤδη γυμνασμένη εἰς τὴν ἀλγεβραϊκὴν ἀνάλυσιν, ἀγαπᾷ πλειοτέρας γνώσεις ἐπάνω εἰς τοῦτο τὸ μέρος, νὰ ἀναγνώσῃ τοὺς δύο τόμους, οἵτινες ἐπιγράφονται „Θεωρία τῶν ἀριθμῶν παρὰ τοῦ Λεγένδρου, καὶ ἀριθμητικαὶ ἐξετάσεις τοῦ Γάους", βιβλίον μεταφρασμένον ἄριστα ἀπὸ τὸν Πολυέτον Δελίσλιον εἰς τὴν Γαλλικὴν Γλῶσσαν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ϛ΄.

Σχηματισμὸς τῶν δυνάμεων, καὶ ἐξαγωγὴ τῶν Τετραγωνικῶν καὶ Κυβικῶν ῥιζῶν τῶν ἀριθμῶν.

---

§. αος. Σχηματισμὸς τοῦ Τετραγώνου, καὶ ἐξαγωγὴ τῆς Τετραγωνικῆς ῥίζης.

§. 178. **Προοιμιώδεις γνώσεις.** — Καλεῖται τετράγωνον (ἀριθμ. 111) ἡ δευτέρα δύναμις ἑνὸς ἀριθμοῦ, τὸ γινόμενον τούτου, πολλαπλασιαζομένου ἐφ' ἑαυτόν, καὶ τετραγωνικὴ ῥίζα ἑνὸς