προσθέσωμεν 0 εἰς τὰ δεξιά του, καὶ νὰ διαιρέσωμε τὸ γινόμενον διὰ τοῦ παρονομαστοῦ,* ἡ ὁποία πρᾶξι δίδει εἰς τὸ πηλίκον μονάδας ἀνὰ β μικροτέρας τῆ ἀρχικῆς μονάδος, καὶ ἕν τι ὑπόλοιπον· καὶ νὰ γράψω μεν εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου νέον 0, καὶ νὰ δια ρέσωμεν τὸ ἐξαγόμενον διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, ὁποία πρᾶξις δίδει εἰς τὸ πηλίκον μονάδας ἀνὰ β μ κροτέρας τῶν προτέρων, ἢ ἀνὰ β^2 μικροτέρας τῆς ἀ χικῆς μονάδος· καὶ οὕτω διαδοχικῶς. Ἀποδεχόμεν δὲ τοῦτο ἔχομεν τὴν ἀκόλουθον θεωρίαν.

Κάθε κοινὸν κλάσμα, τοῦ ὁποίου ὁ παρονομ στὴς δὲν περιέχει ἄλλους πρώτους παράγοντας, εἰ ἐκείνους, οἵτινες εἰσέρχονται εἰς τὴν βάσιν β, ἀν χθὲν εἰς ὑποδιαιρέσεις ἀνὰ β μικροτέρας τῆς μονάδο δίδει χώραν εἰς κλάσμα ἐκ πεπερασμένου ἀριθμοῦ ψ φίων· ἀλλὰ κάθε ἀνάλογον κλάσμα, τοῦ ὁποίου παρονομαστὴς περιέχει πρώτους παράγοντας, διαφ ρετικοὺς τῶν ὅσοι συνθέτουν τὴν βάσιν, δίδει χώρ εἰς κλάσμα ἐξ ἀπείρου ἀριθμοῦ ψηφίων καὶ περιοδικ

Καὶ οὕτω περὶ τῶν ἄλλων ἰδιοτήτων. Παραιτο μεν δὲ εἰς τοὺς μαθητὰς τὴν φροντίδα νὰ τὰς ἀ ζητῶσι, καὶ νὰ τὰς ἐκφράζωσι καὶ νὰ τὰς ἀποδ κνύωσι.

§. δ΄. Περὶ τῶν Συνεχῶν Κλασμάτων.

§. 166. Τὰ συνεχῆ κλάσματα ἔλαβαν τὴν χήν τους ἀπὸ τὰς ὡς ἔγγιστα γινομένας ἐκτιμήσ τῶν κλασμάτων, τῶν ὁποίων οἱ ὅροι εἶναι μεγαλ τατοι, καὶ πρῶτοι μεταξύ των.

---

*) Μερικοὶ ἀριθμοὶ τούτου τοῦ παραγράφου ὑποθέτουσιν ἀ βραϊκὰς γνώσεις ὀλίγον τι πλέον ἐκτεταμένας, παρ' ἐκεῖ

Ε.Υ. Κ.τ.Π ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

Διὰ νὰ ἐξηγηθῶμεν καλήτερα, ἔστω τὸ κλάσμα $\frac{159}{495}$, τοῦ ὁποίου μ' εὐκολίαν βλέπομεν, ὅτι οἱ δύο ὅροι εἶναι πρῶτοι μεταξύ των, καὶ διὰ τοῦτο εἶναι (ἀριθμ. 157.) ἀνάγωγον.

Παραιτοῦντες τὸ κλάσμα εἰς ταύτην τὴν μορφὴν εἶναι δύσκολον νὰ λάβωμεν καθαρὰν ἰδέαν περὶ αὐτοῦ. Ἐὰν ὅμως, κατὰ τὴν γνωστὴν ἀρχήν, διαιρέσωμεν τοὺς δύο του ὅρους διὰ 159, πρᾶξις, ἥτις δὲν ἀλλάζει τὴν τιμήν του, ἄγεται εἰς $\frac{1}{\left(\frac{443}{159}\right)}$, ἢ ἐκτελουμένης τῆς σημειωμένης διαιρέσεως εἰς τὸν παρονομαστήν, $\frac{1}{3+\frac{16}{159}}$.

Τούτου τεθέντος ἐξαλείφομεν ἀπὸ τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος $\frac{16}{159}$, τὸ δὲ προκύπτον κλάσμα $\frac{1}{3}$ εἶναι ὀλίγον μεγαλήτερον τοῦ δεδομένου, ἐπειδὴ ὠλιγοστεύθη ὁ παρονομαστής.

Ἀπὸ ἄλλο μέρος, ἐὰν ἀντὶ νὰ ἀμελήσωμεν $\frac{16}{159}$ ἀντεισάξωμεν ἀντὶ τούτου τοῦ κλάσματος 1, ἐκ τοῦ

αἱ ὁποῖαι ἐτέθησαν εἰς τὴν εἰσαγωγὴν τοῦ πέμπτου κεφαλαίου, ὅμως οἱ μαθηταὶ ἠμποροῦν νὰ παραιτήσουν τοῦτον τὸν παράγραφον, ἀρκεῖ νὰ ἐπιστρέψωσιν, ὅταν λάβουν περισσοτέραν γύμνασιν εἰς τὰς ἀλγεβραϊκὰς ἐργασίας, ἢ ὅταν ἔχουν τὴν ἀνάγκην νὰ τὸν σπουδάσωσι.

Ε.Υ.Δ της Κ.τ.Π ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

ὁποίου ἠθέλαμεν ἔχει $\frac{1}{3+1}$ ἢ $\frac{1}{4}$, τοῦτο τὸ νέον κλάσμα εἶναι μικρότερον παρὰ τὸ δεδομένον, ἐπειδὴ ηὐξήσαμεν τὸν παρονομαστήν.

Συμπεραίνεται λοιπὸν, ὅτι τὸ $\frac{159}{493}$ περιέχεται μεταξὺ $\frac{1}{3}$ καὶ $\frac{1}{4}$· τοῦτο δίδει ἤδη ἀκριβεστάτην ἰδέαν τοῦ κλάσματος.

Ἐὰν θέλωμεν μεγαλητέραν προσέγγισιν, ἀρκεῖ νὰ πράξωμεν ἐπὶ $\frac{16}{159}$, ὡς ἐπράξαμεν ἐπὶ τοῦ $\frac{159}{493}$.

Καὶ προκύπτει $\frac{16}{159}=\frac{1}{\left(\frac{159}{16}\right)}=\frac{1}{9+\frac{15}{16}}$, καὶ τὸ δεδομένον γίνεται $\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{9+\cfrac{15}{16}}}$.

Ἀμεληθέντος δὲ τοῦ $\frac{15}{16}$, τὸ $\frac{1}{9}$ εἶναι μεγαλήτερον τοῦ $\frac{16}{159}$· ὅθεν ἕπεται, ὅτι $\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{9}}$ εἶναι μικρότερον τοῦ $\frac{159}{493}$· ἀλλὰ $\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{9}}$, εἶναι τὸ αὐτὸ ὡς $\frac{1}{\left(\frac{28}{9}\right)}$ ἢ $\frac{9}{28}$· οὕτως τὸ δεδομένον περιέχεται μεταξὺ $\frac{1}{3}$ καὶ $\frac{9}{28}$.

Ἡ διαφορὰ τούτων τῶν δύο τελευταίων κλασμάτων, ἠγμένων εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν εἶναι $\frac{28-27}{84}$ ἢ $\frac{1}{84}$· λοιπὸν τὸ πραττόμενον σφάλμα, λαμβανομένου τοῦ $\frac{1}{3}$ διὰ τὴν τιμὴν τοῦ δεδομένου, εἶναι μικρότερον ἀπὸ $\frac{1}{84}$.

Πράττοντες ἐπὶ τοῦ $\frac{15}{16}$, ὡς ἐπράξαμεν εἰς τὰ ἀνώτερα, θέλομεν εὕρει, ὅτι $\frac{15}{16}=\frac{1}{\left(\frac{16}{15}\right)}=\frac{1}{1+\frac{1}{15}}$, καὶ τὸ δεδομένον κλάσμα δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{15}}}}.$$

Καὶ ἐξαλειφομένου τοῦ $\frac{1}{15}$, ὁ ἀριθμὸς $\frac{1}{1}$, ἢ 1, εἶναι μείζων τοῦ $\frac{15}{16}$· λοιπὸν $\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{1}}$ ἢ $\frac{1}{10}$ εἶναι μικρότερον τοῦ $\frac{16}{159}$, λοιπὸν $\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{1}}}$ ἢ $\frac{1}{\left(\frac{3+1}{10}\right)}$ ἢ $\frac{10}{31}$ εἶναι μεῖζον τοῦ $\frac{159}{493}$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΕΡΕΥΝΑΣ ΤΟΜΕΑΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΤΩΝ ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ: ΕΠ. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ Θ. ΠΕΤΣΙΟΣ
Ε.Υ.Δ της Κ.τ.Π ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

Ὅθεν βλέπομεν, ὅτι $\frac{159}{493}$ περιέχεται μεταξὺ $\frac{9}{28}$ καὶ $\frac{10}{31}$· τὸ πρῶτον εἶναι μικρότερον, τὸ δὲ δεύτερον μεγαλήτερον.

Ἀλλ' ἡ διαφορὰ τούτων τῶν δύο κλασμάτων εἶναι $\frac{10}{31}-\frac{9}{28}$, ἢ $\frac{1}{868}$· οὕτως τὸ πραχθὲν σφάλμα, λαμβανομένου ἢ τοῦ $\frac{9}{28}$, ἢ τοῦ $\frac{10}{31}$ διὰ τὴν τιμὴν τοῦ δεδομένου κλάσματος, εἶναι μικρότερον παρὰ $\frac{1}{868}$.

Βλέπομεν ὅτι διὰ ταύτης τῆς σειρᾶς τῶν πράξεων, εὑρίσκομεν ὅρους ἁπλουστέρους κλασμάτων, τὰ ὁποῖα δίδουσι τὰς προσεγγιζούσας τιμὰς ἄλλου κλάσματος, τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι εἶναι μεγαλώτατοι.

Τὸ κλάσμα $\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{15}}}}$ καλεῖται συνεχὲς κλάσμα.

Ἐν γένει ἐννοοῦμεν διὰ συνεχὲς κλάσμα, ἓν κλάσμα, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀριθμητὴν τὴν μονάδα, καὶ παρονομαστὴν, ἀκέραιον ἀριθμὸν, πλέον ἓν κλάσμα, τὸ ὁποῖον καὶ αὐτὸ ἔχει ἀριθμητὴν τὴν μονάδα, καὶ παρονομαστὴν ἀκέραιον, πλέον ἓν κλάσμα· καὶ οὕτω διαδοχικῶς.

Πολλάκις ὁ δεδομένος κλασματικὸς ἀριθμὸς εἶναι μεγαλήτερος τῆς μονάδος.

Οὕτω διὰ νὰ γενικεύσωμεν τὸν ὁρισμὸν τοῦ συνεχοῦς κλάσματος, πρέπει νὰ εἴπωμεν· τὸ συνεχὲς

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΤΟΜΕΑΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΕΡΕΥΝΩΝ ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ: ΕΠ. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ Θ. ΠΕΤΣΙΟΣ
Ε.Υ.Ε.Λ. της Κ.τ.Π. ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

κλάσμα εἶναι ἔκφρασις σύνθετος ἀπὸ ἀκέραιον, πλέον κλάσμα, ἔχον ἀριθμητὴν τὴν μονάδα, καὶ παρονομαστὴν, καὶ ἐφεξῆς.

Τοιαύτη εἶναι ἡ ἔκφρασις $\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\gamma+\cfrac{1}{\delta+\ldots}}}$ (α, β, γ, δ, . ὄντων τῶν ἀκεραίων παρονομαστῶν).

§. 167. Παρατηροῦντες τὴν ὁδὸν, τὴν ὁποίαν ἠκολουθήσαμεν, διὰ νὰ ἄξωμεν $\frac{159}{493}$ εἰς συνεχὲς κλάσμα, βλέπομεν, ὅτι ἐδιαιρέσαμεν κατὰ πρῶτον 493 διὰ 159, καὶ ἐλάβομεν πηλίκον 3, καὶ ὑπόλοιπον 16· μετὰ ταῦτα ἐδιαιρέσαμεν 159 διὰ 16, καὶ ἐλάβαμεν πηλίκον 9 καὶ ὑπόλοιπον 15· μετὰ ταῦτα ἐδιαιρέσαμεν 16 διὰ 15, καὶ ἐλάβαμεν πηλίκον 1 καὶ ὑπόλοιπον 1. Ἐκ τούτου εὐκόλως πορίζομεν τὸν ἀκόλουθον κανόνα. Διὰ νὰ ἄξωμεν κλάσμα, ἢ κλασματικὸν ἀριθμὸν εἰς συνεχὲς κλάσμα.

„Πρᾶξε ἐπὶ τῶν δύο ὅρων τοῦ δεδομένου κλάσματος, ὡς ἐὰν ἐζητεῖτο ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης του (ὅρα ἀριθμ. 49.)

Προέκτεινε τὴν ἐργασίαν, ἕως νὰ συναπαντήσῃς ὑπόλοιπον ἴσον τῷ μηδενὶ, τὰ δὲ κατὰ διαδοχὴν λαμβανόμενα πηλίκα, θέλουν εἶναι οἱ παρονομασταὶ τῶν κλασμάτων οἱ συγκροτοῦντες τὸ συνεχὲς κλάσμα.

Ὅταν ὁ δεδομένος ἀριθμὸς ἦναι μείζων τῆς μονάδος, τὸ πρῶτον πηλίκον παριστάνει τὸ ἀκέραιον μέρος, τὸ ὁποῖον εἰσέρχεται εἰς τὴν ἔκφρασιν τοῦ συνεχοῦς κλάσματος.“

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΤΟΜΕΑΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΕΡΕΥΝΑΣ ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ: ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ Θ. ΠΕΤΣΙΟΣ
Ε.Υ.Δ της Κ.τ.Π. ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

Δυνάμεθα κατὰ τοῦτον τὸν κανόνα νὰ ε
ξωμεν εἰς συνεχὲς κλάσμα τοὺς δύο ἀριθμοὺς $\frac{\;}{1}$
καὶ $\frac{829}{347}$.

Ἰδοὺ ὁ τύπος τῶν πράξεων.

$\overline{1}^{ον}$. $$149 \left| \frac{65}{2} \right| \frac{19}{3} \left| \frac{8}{2} \right| \frac{3}{2} \left| \frac{2}{1} \right| \frac{1}{2}.$$

Λοιπὸν $$\frac{65}{149}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2.}}}}}}$$

$\overline{2}^{ον}$. $$829 \left| \frac{347}{2} \right| \frac{135}{2} \left| \frac{77}{1} \right| \frac{58}{1} \left| \frac{19}{3} \right| \frac{1}{19}.$$

Λοιπὸν $$\frac{829}{347}=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{19.}}}}}$$

Τὰ συνεχῆ κλάσματα ἔχουσι μέγαν ἀριθ
ἰδιοτήτων, τῶν ὁποίων ἡ ἀναζήτησις ἐστάθη ἀντι
μενον τῶν ἀγώνων τῶν πλέον περιφήμων Γεωμετρ
Θέλομεν δὲ ἐκθέσει ἐδῶ τὰς στοιχειώδεις ἰδιότητ
ἤτοι τὰς συνηθεστέρας, καὶ τῶν ὁποίων ἡ δε

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΤΟΜΕΑΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΕΡΕΥΝΩΝ ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ: ΕΠ. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ Θ. ΠΕΤΣΙΟΣ
Ε.Υ. ΑΝ. Κ. ΠΙ ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

ἐπιστηρίζεται εἰς τὰς πρώτας ἀρχὰς τῆς Ἀλγέβρας. Ἀποστέλλομεν δὲ τὸν ἀναγνώστην, ἂν ἀγαπᾷ εὐρυχωροτέρας περιγραφὰς, εἰς τὰς ἐν τῇ Ἀλγέβρᾳ τοῦ Εὐλέρου προσθήκας τοῦ Λαγραγγίου.

Ὁρισμοί.

§. 168. Ἄς λάβωμεν τὸ γενικὸν συνεχὲς κλάσμα

$$\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\gamma+\cfrac{1}{\delta+\cfrac{1}{\varepsilon+\dots}}}}$$

τὸ ὁποῖον ὑποθέτομεν, ὅτι ἐκφράζει τὴν τιμὴν ἑνὸς κλάσματος ἀριθμοῦ σημειωμένου διὰ x.

Καλοῦνται κλάσματα συστατικὰ, τὰ κλάσματα $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$, $\frac{1}{\delta}$ . . τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα σύσταίνει τὸ συνεχὲς κλάσμα, καὶ πηλίκα ἀτελῆ οἱ παρονομασταὶ β, γ, δ . . . . καλοῦνται οὕτως οἱ τοιοῦτοι παρινομασταὶ, ἐπειδὴ β π. χ εἶναι τὸ ἀκέραιον τοῦ ἐκφραζομένου ἀριθμοῦ διὰ $\beta+\cfrac{1}{\gamma+\cfrac{1}{\delta+\dots}}$, καὶ γ εἶναι τὸ ἀκέραιον μέρος του ἐκφραζομένου ἀριθμοῦ διὰ $\gamma+\cfrac{1}{\delta+\cfrac{1}{\varepsilon\dots}}$, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Ἐξ ἐναντίας ἔδωκαν τὸ ὄνομα πηλίκα τέλεια εἰς τὰς ἐκφράσεις $\beta+\cfrac{1}{\gamma+\cfrac{1}{\delta+\dots}}$ $\gamma+\cfrac{1}{\delta+\cfrac{1}{\varepsilon\dots}}$, τῶν ὁποίων τὰ β, γ, δ . . . . εἶναι τὰ ἀκέραια μέρη.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΕΡΕΥΝΑΣ ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ: ΕΠ. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΠΕΤΣΙΟΣ
Ε.Υ.Δ της Κ.τ.Π ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

Κάθε τέλειον πηλίκον περιέχει, ἐκτὸς τοῦ ἀκ
ραίου, τὸ ὁποῖον εἰς αὐτὸ περιέχεται, ὅλα τὰ ακόλο
θα πηλίκα τοῦ συνεχοῦς κλάσματος, ἐπειδὴ ἐξ αἰτί
τῆς ἀναπτύξεως τοῦ τελείου πηλίκου εὑρίσκομεν ὅ
τὰ ἀκόλουθα πηλίκα. Τὸ τελευταῖον δὲ τέλειον πηλ
κον, τὸ ὁποῖον εἶναι ὁ παρονομαστὴς τοῦ τελευταί
συστατικοῦ κλάσματος, εἶναι πάντοτε τοὐλάχιστον ἴσ
μὲ 2, κατὰ τὸν τρόπον τοῦ ἀνάγειν κοινόν τι κλάσ
εἰς συνεχὲς κλάσμα (ἀριθμ. 167).

Καλοῦνται ἠγμένα, τὰ ἐξαγόμενα, τὰ ὁποῖα λα
βάνομεν, τρέποντες διαδοχικῶς εἰς ἕνα μόνον κλασμ
τικὸν ἀριθμὸν ἑκάστην τῶν ἐκφράσεων $\alpha+\frac{1}{\beta}$, $\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\gamma}}$.

Καλοῦνται προσέτι Συμπίπτοντα κλάσματα, ἐπειδή,
θέλομεν ἀποδείξει εὐθύς, τὰ τοιαῦτα ἐξαγόμενα πλ
σιάζουν βαθμηδὸν τὸν εἰς συνεχὲς κλάσμα ἠγμέν
ἀριθμόν, ὅσον περισσότερα συστατικὰ κλάσματα λα
βάνομεν.

Σχηματισμὸς τῶν διαδοχικῶν ἠγμένω

§. 169. Ἄς ἴδωμεν μήπως ὑπάρχῃ μέσον
ἁπλοῦν καὶ εὔκολον εἰς τὸ νὰ σχηματίζωμεν τὰ διάς
ρα ἠγμένα.

Τὸ πρῶτον εἶναι α, τὸ ὁποῖον δυνάμεθα νὰ γρ
ψωμεν οὕτως $\frac{\alpha}{1}$· τὸ δεύτερον $\alpha+\frac{1}{\beta}$, ἢ ἀναγομέν
τοῦ ἀκεραίου εἰς κλάσμα, $\frac{\alpha\beta+1}{\beta}$.

Διὰ νὰ λάβωμεν τὸ τρίτον, τὸ ὁποῖον παῤῥησι
ζεται διὰ $\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\gamma}}$ ἀρκεῖ νὰ ἀντεισάξωμεν εἰς τὴν δευ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΤΟΜΕΑΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΕΡΕΥΝΩΝ ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ ΕΠ. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ Θ. ΠΕΤΣΙΟΣ
Ε.Υ.Δ της Κ.Π ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

ραν ἀντὶ τοῦ β τὸ $\beta+\frac{1}{\gamma}$· ἐπειδὴ σημειόνοντες $\beta+\frac{1}{\gamma}$ διὰ β' ἔχομεν $\alpha+\frac{1}{\beta+\frac{1}{\gamma}}=\alpha+\frac{1}{\beta'}=\alpha+\frac{\alpha\beta'+1}{\beta'}$, ἔκφρασις, ἥτις δὲν διαφέρει τῆς $\frac{\alpha\beta+1}{\beta}$, εἰμὴ μόνον εἰς τοῦτο, ὅτι β' ἢ $\beta+\frac{1}{\gamma}$ τρατεῖ τὸν τόπον τοῦ β.

Κάμνοντες λοιπὸν ταύτην τὴν ἀντεισαγωγὴν, ἔχομεν τὸ τρίτον ἡγμένον $\alpha+\frac{1}{\beta+\frac{1}{\gamma}} = \frac{\alpha(\beta+\frac{1}{\gamma})+1}{\beta+\frac{1}{\gamma}} = \frac{\alpha\beta+\frac{\alpha}{\gamma}+1}{\beta+\frac{1}{\gamma}}$, ἢ ἀγομένων τῶν ἀκεραίων εἰς κλάσμα, καὶ πολλαπλασιαζομένων ἄνω καὶ κάτω ἐπὶ γ, τὸ $\frac{(\alpha\beta+1)\gamma+\alpha}{\beta\gamma+1}$.

Τὸ τέταρτον ἡγμένον θέλομεν λάβει παρομοίως, ἀντεισάγοντες εἰς τὸ τρίτον $\gamma+\frac{1}{\delta}$ ἀντὶ τοῦ γ, ἐκ τοῦ ὁποίου ἔχομεν $\alpha+\frac{1}{\beta+\frac{1}{\gamma+\frac{1}{\delta}}} = \frac{(\alpha\beta+1)\ (\gamma+\frac{1}{\delta})\ +\alpha}{\beta\ \ (\gamma+\frac{1}{\delta})\ +1} =$
$\frac{(\alpha\beta+1)\,\gamma+\frac{\alpha\beta+1}{\delta}+\alpha.}{\beta\gamma+\frac{\beta}{\delta}+1.}$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΕΡΕΥΝΩΝ ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΤΟΜΕΑΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ: Π. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ Θ. ΠΕΤΣΙΟΣ
Ε.Υ.Δ της Κ.τ.Π ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

Ἤ, ἀγομένων τῶν ἀκεραίων εἰς κλάσματα, κι πολλαπλασιαζομένων ἄνω καὶ κάτω ἐπὶ δ, ἔχομι
$$\frac{[(\alpha\beta+1)\gamma+\alpha]\delta+\alpha\beta+1}{(\beta\gamma+1)\delta+\beta}.$$

Χωρὶς νὰ προχωρήσωμεν περισσότερον, βλέπι μεν ἤδη, ὅτι ὁ ἀριθμητὴς τοῦ τρίτου ἡγμένου, λαμ βάνεται πολλαπλασιαζομένου τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ δευ τέρου ἐπὶ τὸ τρίτον πηλίκον γ, καὶ προστιθεμένου ει τὸ γινόμενον τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ πρώτου κλάσματος ὁ δὲ παρονομαστὴς σχηματίζεται κατὰ τὸν αὐτὸν τρό πον διὰ μέσου τῶν παρονομαστῶν τοῦ δευτέρου κα πρώτου κλάσματος.

Ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς τοῦ τετάρτο ἀγμένου λαμβάνονται παρομοίως, πολλαπλασιζομένω ἠμοιβαίως τῶν δύο ὅρων τοῦ τρίτου ἐπὶ τὸ τέταρτο πηλίκον δ, καὶ προστιθεμένων εἰς τὰ δύο γινόμενα τῶν δύο ὅρων τοῦ δευτέρου κλάσματος.

Ἐὰν προσέξωμεν εἰς τὸν τρόπον, καθ' ὃν τι τρίτον καὶ τέταρτον ἡγμένον ἐσχηματίσθησαν, κατα λαμβάνομεν, ὅτι ὁ σχηματισμὸς πρέπει νὰ ἐξακολου θήσῃ καὶ εἰς τὰ ἄλλα ἡγμένα· ἀλλὰ διὰ νὰ δείξωμε μ' ὅλην τὴν ἀκρίβειαν τὴν γενικότητα ταύτης τῆς προ-τάσεως, πρέπει νὰ προστρέξωμεν εἰς μέσον ἀνάλογοι μὲ τὸ δειχθὲν (ἀριθμ. 128). Θέλομεν δὲ δείξει ὅτι ὁ σχηματισμὸς οὗτος, ἀληθεύων εἰς τρία διαδο χικὰ ἡγμένα ὁποιουδήποτε βαθμοῦ, ἀληθεύει ἀκόμη καὶ εἰς τὴν ἀκόλουθον ἡγμένην· ἐπειδὴ ἀφ' οὗ ἐδείχθη ἀκριβὴς εἰς τὰ τρία πρῶτα ἡγμένα, θέλει εἶναι προ-σέτι καὶ εἰς τὸ τέταρτον· καὶ ἀληθεύων εἰς τοῦτο καὶ εἰς τὰ δύο προηγηθέντα, θέλει ἀληθεύσει καὶ εἰς τὸ πέμπτον, καὶ οὕτω διαδοχικῶς ἕως οὗ θέλωμεν.

Ἔστωσαν λοιπὸν $\frac{\Pi}{\Pi'}$, $\frac{K}{K'}$, $\frac{P}{P'}$, τρία διαδοχικὰ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΕΡΕΥΝΩΝ ... ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ... ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ... ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΘΕΤΣΙΟΣ
Ε.Υ.Δ. Κ.τ.Π. ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

ἡγμένα, ρ. τὸ ἀτελὲς πηλίκον, εἰς τὸ ὁποῖον ἐμείναμεν διὰ τὸν σχηματσιμὸν τοῦ $\frac{P}{P'}$, καὶ ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν $\frac{P}{P'}=\frac{K\rho+\Pi}{K'\rho+\Pi'}$. Ἂς προσθέσωμεν δὲ νέον συστατικὸν κλάσμα κατ' ἐξακολούθησιν τοῦ ρ, καὶ ἔτω $\frac{\Sigma}{\Sigma'}$, τὸ ἀνάλογον ἡγμένον· εἶναι φανερὸν, ὅτι, διὰ νὰ σχηματίσωμεν $\frac{\Sigma}{\Sigma'}$ πρέπει ἀφεύκτως νὰ ἀντεισάξωμεν εἰς την ἔκφρασιν $\frac{P}{P'}$, $\rho+\frac{1}{\sigma}$, ἀντὶ τοῦ ρ, καὶ οὕτως ἔχομεν,

$$\frac{\Sigma}{\Sigma'}=\frac{K}{K'}\;\frac{(\rho+\frac{1}{\sigma})+\Pi}{(\rho+\frac{1}{\sigma})+\Pi'}=\frac{(K\rho+\Pi)\sigma+K'}{(K'\rho+\Pi')\sigma+K'}=\frac{P\sigma+K}{P'\sigma+K'}.$$

Καὶ βλέπομεν, ὅτι $\frac{\Sigma}{\Sigma'}$ ἐξάγεται ἐκ τῶν δύο προτέρων, κατὰ τὸν ἐκφρασθέντα ἀνωτέρω νόμον. Λοιπὸν ὁ νόμος τοῦ σχηματισμοῦ εἶναι γενικός.

Οὕτως ὁ ἀριθμητὴς ὁποιουδήποτε ἡγμένου σχηματίζεται, πολλαπλασιαζομένου τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ προηγουμένου ἡγμένου ἐπὶ τὸ ἀτελὲς πηλίκον, τὸ ὁποῖον τοῦ ἀνταποκρίνεται, καὶ προστιθεμένου εἰς τὸ γινόμενον τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ ἡγμένου, τὸ ὁποῖον προηγεῖται δύο βαθμοὺς ἀπὸ ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον θέλομεν νὰ σχηματίσωμεν· ὁ παρονομαστὴς σχηματίζεται κατὰ τὸν αὐτὸν νόμον μὲ τοὺς δύο προηγουμένους παρονομαστάς.

Σ. Κ. Ὅταν ὁ ἀριθμὸς εἰς συνεχὲς κλάσμα ἢ χ εἶναι μικρότερος τῆς μονάδος, ἀντεισάγομεν $\frac{0}{1}$, ἀν-

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΕΡΕΥΝΩΝ ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΤΟΜΕΑΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ: ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Κ. ΠΕΤΣΙΟΣ
Ε.Υ.Δ της Ε.Π. ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

τὶ τοῦ α, διὰ νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸν νόμον, ὅστις ὑποθέτει ἐξ ἀνάγκης προσχηματισμένα τὰ δύο πρῶτα ἠγμένα.

Ἂς προτεθῇ ὡς πρῶτον παράδειγμα νὰ σχηματίσωμεν τὰ διαδοχικὰ ἠγμένα τοῦ συνεχοῦς κλάσματος.

$$\frac{64}{149}=\frac{0}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}}}}}$$

Ἔχομεν διὰ τὰ πρῶτα δύο ἠγμένα $\frac{0}{1}$ καὶ $\frac{1}{2}$.

Διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὸ τρίτον, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμητὴν 1 τοῦ δευτέρου ἐπὶ 3, καὶ προσθέτομεν 0 εἰς τὸ γινόμενον· πολλαπλασιάζομεν μετὰ ταῦτα τὸν παρονομαστὴν 2 τοῦ δευτέρου ἐπὶ 3 καὶ προσθέτομεν εἰς τὸ γινόμενον τὸν παρονομαστὴν 1 τοῦ πρώτου· ἐντεῦθεν προκύπτει $\frac{3}{7}$.

Εὑρίσκονται παρομοίως τὰ ἀκόλουθα ἠγμένα $\frac{7}{16}$, $\frac{17}{39}$, $\frac{24}{55}$, $\frac{65}{149}$.

Παρομοίως λαμβάνονται τὰ διάφορα ἠγμένα τοῦ συνεχοῦς κλάσματος τοῦ προερχομένου ἀπὸ $\frac{829}{347}$. (ὅρα ἀρθμ. 167.)

$$\frac{2}{1},\ \frac{5}{2},\ \frac{7}{3},\ \frac{12}{5},\ \frac{43}{18},\ \frac{829}{347}.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΤΟΜΕΑΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΕΡΕΥΝΩΝ ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ: ΕΠ. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΠΕΤΣΙΟΣ
Ε.Υ.Δ της Κ.τ.Π ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

§. 170. *Συνέπεια τοῦ προηγουμένου νόμου.* Ἕπεται προφανῶς ἐκ τοῦ νόμου τούτου, ὅτι οἱ ὅροι τῶν διαφόρων ἡγμένων αὐξάνουσι, καθ' ὅσον αὐξάνει ὁ ἀριθμὸς τῶν συστατικῶν κλασμάτων· ἐπειδὴ ὁ ἀριθμητὴς ἢ ὁ παρονομαστὴς ὁποιουδήποτε ἡγμένου εἶναι τοὐλάχιστον ἴσος μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμητῶν ἢ τῶν παρονομαστῶν τῶν δύο ἡγμένων, τὰ ὁποῖα προηγοῦνται τούτου.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΤΟΜΕΑΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΕΡΕΥΝΩΝ ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ: ΕΠΙΚ. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ Θ. ΠΕΤΣΙΟΣ

Ἰδιότητες τῶν Ἡγμένων.

§. 171. *Πρώτη ἰδιότης.* Ἐὰν λάβωμεν εἰς τὰ ἀνωτέρω δύο παραδείγματα τὴν διαφορὰν μεταξὺ δύο τινῶν διαδοχικῶν ἡγμένων, μὲ τὴν συνθήκην νὰ ἀφαιρῶμεν πάντοτε τὸ ἡγμένον, ἀπ' ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον τῷ ἀκολουθεῖ, θέλομεν εὕρει πάντοτε διὰ τὸν ἀριθμητὴν ταύτης τῆς διαφορᾶς $+1$ ἢ -1, κατὰ τὸν ἄρτιον ἢ περιττὸν βαθμὸν τῆς δευτέρας τῶν δύο ἡγμένων, τὴν ὁποίαν θεωροῦμεν. Ὁ παρονομαστὴς ταύτης τῆς διαφορᾶς εἶναι προσέτι πάντοτε ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν τῶν δύο ἡγμένων.

Οὕτως εἰς τὸ πρῶτον παράδειγμα, ἔχομεν,

$$\frac{1}{2}-\frac{0}{1}=\frac{+1}{2\times1},\ \frac{3}{7}-\frac{1}{2}=\frac{-1}{2\times7},\ \frac{7}{16}-\frac{3}{7}=\frac{+1}{16\times7}.$$

Αὕτη ἡ ἰδιότης εἶναι γενική.

Διὰ νὰ τὴν ἀποδείξωμεν, ἂς λάβωμεν εἰς τὸ γενικὸν συνεχὲς κλάσμα, τρία διαδοχικὰ ἡγμένα $\frac{\Pi}{\Pi'}, \frac{K}{K'}, \frac{P}{P'}$.

Θέλομεν ἔχει $\frac{P}{P'}-\frac{K}{K'}=\frac{PK'-KP'}{P'K'}$.

Ἀλλὰ κατὰ τὸν ἀριθμὸν 169, $P=K\rho+\pi$, $P'=K'\rho+\Pi'$, ἀντεισάγοντες ἀντὶ ρ καὶ P' τὰς τιμὰς εἰς τὸν ἀριθμητὴν τῆς ἄνω εἰρημένης διαφορᾶς, ἔχομεν

Ε.Υ. ΔΙΑΣ Κ.Π. ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

$$\frac{P}{P'}-\frac{K}{K'}=\frac{(K\rho+\Pi)K'-K(K'\rho+\Pi')}{P'K'}$$

Ἐκτελοῦντες τοὺς ὑπολογισμοὺς, καὶ ἀνάγοντες εὑρίσκομεν

$$\frac{P}{P'}-\frac{K}{K'}=\frac{\Pi K'-K\Pi'}{P'K'}.$$

Ὅθεν βλέπομεν, ὅτι ὁ ἀριθμητὴς τῆς διαφορᾶς $\frac{P}{P'}-\frac{K}{K'}$ εἶναι ἴσος καὶ μὲ ἐναντίον σημεῖον τοῦ ἀριθμητοῦ της διαφορᾶς $\frac{K}{K'}-\frac{\Pi}{\Pi'}$ ἢ $\frac{K\Pi'-\Pi K'}{K'\Pi'}$· τουτέστιν οἱ ἀριθμηταὶ δύο διαδοχικῶν διαφορῶν εἶναι ἴσοι καὶ μὲ ἐναντία σημεῖα.

Ἀλλ' ἐὰν θεωρήσωμεν τὰ δύο πρῶτα ἡγμένα $\frac{\alpha}{1}$ καὶ $\frac{\alpha\beta+1}{\beta}$, ἔχομεν $\frac{\alpha\beta+1}{\beta}-\frac{\alpha}{1}=\frac{+1}{\beta\times 1}$.

Λοιπὸν κατὰ τὰ προειρημένα ὁ ἀριθμητὴς τῆς ἀκολούθου διαφορᾶς πρέπει νὰ εἶναι -1· ὁ ἀριθμητὴς τῆς τρίτης διαφορᾶς πρέπει νὰ εἶναι $+1$, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Ἐν γένει ὁ ἀριθμητὴς μιᾶς τινὸς διαφορᾶς εἶναι $+1$, ἐὰν ἡ δευτέρα τῶν δύο θεωρουμένων ἡγμένων ἦναι βαθμοῦ ἀρτίου, καὶ -1, ἐὰν ἦναι περιττοῦ· ὁ δὲ παρονομαστὴς εἶναι προδήλως πάντοτε ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν τῶν δύο ἡγμένων.

§. 172. Συνέπεια τῆς προηγουμένης ἰδιότητος. Ἡγμένον τὶ ὁποιουδήποτε βαθμοῦ $\frac{P}{P'}$ εἶναι πάντοτε κλάσμα, ἢ ἀνάγωγος κλασματικὸς ἀριθμός.

Τῷ ὄντι ἂς ὑποθέσωμεν πρὸς τὸ παρὸν, ὅτι P καὶ P' ἔχουσι κοινὸν παράγοντα τὸ θ· ἐπειδὴ δὲ, κα-

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΕΡΕΥΝΩΝ ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΤΟΜΕΑΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ: ΕΠ. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ Θ. ΠΕΤΣΙΟΣ
Ε.Υ.Δ. της Κ.Π. ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006