§. γ'. Περὶ τῶν περιοδικῶν δεκαδικῶν κλασμάτων.

§. 158. Εἰς τὴν ἐκτίμησιν κοινοῦ τινὸς κλάσματος εἰς δεκαδικὸν κλάσμα, τουτέστι εἰς δεκατημόρια, ἑκατοστημόρια τῆς ἀρχικῆς μονάδος, ἀκολουθοῦν ἰδιαίτεραι τινὲς καὶ ἄξιαι ἐξετάσεως περιστάσεις· ἀλλὰ πρὶν νὰ ἐρευνήσωμεν αὐτὰς, εἶναι ἀνάγκη νὰ ἐπιστρέψωμεν ἐπὶ τοῦ τρόπου, διὰ τοῦ ὁποίου τρέπομεν κοινόν τι κλάσμα εἰς δεκαδικόν.

Ἴδομεν (ἀριθμ. 88), ὅτι διὰ νὰ ἐκτελέσωμεν ταύτην τὴν ἀναγωγὴν, πρέπει, ἀφ' οὗ γράψωμεν 0 εἰς τὸ πηλίκον, καὶ ὑποστιγμὴν εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ μηδενικοῦ, 1ον. Νὰ προσθέσωμεν εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ ἀριθμητοῦ ἓν 0, καὶ νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἐξαγόμενον ἀριθμὸν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ· αὕτη ἡ πρᾶξις δίδει εἰς τὸ πηλίκον δεκατημόρια, καὶ ἕν τι ὑπόλοιπον. 2ον. Νὰ γράψωμεν νέον 0 εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου, καὶ νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἐξαγόμενον ἀριθμὸν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, διὰ τῆς ὁποίας πράξεως εὑρίσκομεν εἰς τὸ πηλίκον ἑκατοστημόρια, καὶ δεύτερον ὑπόλοιπον. 3ον. Νὰ προσθέσωμεν εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου νέον 0, καὶ νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἐξαγόμενον ἀριθμὸν διὰ τοῦ παρονοματοῦ· ἐξακολουθοῦμεν δὲ ταύτην τὴν σειρὰν τῶν πράξεων, ἕως νὰ λάβωμεν τὸν βαθμὸν τῆς προσεγγίσεως, τὴν ὁποίαν θέλομεν.

Ἀλλ' εἶναι φανερὸν, ὅτι τὸ νὰ προσθέτωμεν διαδοχικῶς εἰς τὰ δεξιὰ τῶν διαφόρων ὑπολοίπων τοσάκις τὸ μηδὲν, ὅσα ψηφία δεκαδικὰ θέλομεν νὰ λάβωμεν, εἶναι τὸ αὐτὸ, ὡς νὰ τὰ θέτωμεν ὅλα ταῦτα τὰ μηδενικὰ ἐν ταυτῷ κατ' ἐξακολούθησιν εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ διαιρουμένου κλάσματος, τουτέστι νὰ πολλαπλασιάζωμεν τὸν ἀριθμητὴν ἐπὶ τὴν μονάδα ἀκολουθημένην ἀπὸ τόσα μηδενικὰ, ὅσα ψηφία δεκαδικὰ θέλομεν νὰ εὕρωμεν, καὶ νὰ διαιρῶμεν τὸ συναγόμενον γινόμενον διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, καὶ νὰ χωρίζωμεν ἔπειτα πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ πηλίκου, τὸν ἀριθμὸν τῶν ζητουμένων δεκαδικῶν ψηφίων· ἐπειδὴ κατὰ τὴν κοινὴν μέθοδον τῆς διαιρέσεως τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, καταβιβάζομεν διαδοχικῶς εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου τὰ μηδενικὰ, τὰ ὁποῖα ἐγράψαμεν ὅλα κατ' ἐξακολούθησιν. Αὕτη ἡ παρατήρησις θέλει μᾶς χρησιμεύσει εἰς τὴν ἀπόδειξιν τῶν δύο ἀκολούθων ἰδιοτήτων.

§. 159. 1^{ον}. Κάθε κοινὸν κλάσμα, τοῦ ὁποίου ὁ παρονομαστὴς δὲν περιέχει ἄλλους πρώτους παράγοντας, εἰμὴ 2 καὶ 5, ἄγεται εἰς πεπερασμένον τινὰ ἀριθμὸν δεκαδικῶν ψηφίων· τουτέστι ὕστερον ἀπὸ κάποιον ἀριθμὸν ἐργασιῶν θέλομεν φθάσει εἰς ὑπόλοιπον ἴσον μὲ τὸ μηδέν. Εἰς ταύτην τὴν περίστασιν τὸ ληφθὲν δεκαδικὸν κλάσμα ἐκφράζει ἀκριβῆ τιμὴν τοῦ δεδομένου κλάσματος.

Περιπλέον, ἐὰν τὸ κλάσμα ἦναι ἠγμένον εἰς τὴν ἁπλουστέραν του μορφὴν (τὸ ὁποῖον δυνάμεθα πάντοτε νὰ ὑποθέτωμεν), ὁ ὅλος ἀριθμὸς τῶν πράξεων, τὰς ὁποίας ἔχομεν νὰ ἐκτελέσωμεν, σημειοῦται διὰ τοῦ μεγαλητέρου τῶν ἐκθετῶν 2 καὶ 5, τῶν εἰσερχομένων εἰς τὸν παρονομαστήν.

Οὕτως τὰ κλάσματα $\frac{7}{8}$, $\frac{13}{25}$, $\frac{11}{40}$, $\frac{317}{1250}$, τὰ ὁποῖα δύνανται προφανῶς νὰ τεθῶσιν εἰς τὴν ἀκόλουθον μορφήν· $\frac{7}{2^3}$, $\frac{13}{5^2}$, $\frac{11}{2^3.5}$, $\frac{317}{2.5^4}$, ἄγονται εἰς πεπερασμένον ἀριθμὸν δεκαδικῶν ψηφίων.

Τὸ πρῶτον καὶ τρίτον εἶναι δεκτικὰ τριῶν ἐργασιῶν, τὸ δεύτερον, δύο, καὶ τὸ τέταρτον, τεσσάρων.

Καὶ τῷ ὄντι εὑρίσκομεν τὰς τιμάς των,

0,875 · 0,52 · 0,275 · 0,2536,

Τὸ ὁποῖον δυνάμεθα μὲ εὐκολίαν νὰ βεβαιώσωμεν ἐκτελοῦντες τὴν ἀναγωγήν των εἰς δεκαδικὰ κατὰ τὸν κοινὸν τρόπον.

Διὰ νὰ δώσωμεν λόγον ταύτης τῆς ἰδιότητος, παρατηροῦμεν, ὅτι

10, 100, 1000 ...... ὄντων ἴσων μὲ 2.5, $2^2.5^2$, $2^3.5^3$ .... ἐὰν διὰ νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν ἀναγωγὴν εἰς δεκαδικὸν κλάσμα, πολλαπλασιάσωμεν (ἀριθμ. 158) τὸν ἀριθμητὴν ἐπὶ 10, 100, 1000 .... τὸ συναγόμενον γινόμενον εἶναι διαιρετὸν διὰ 2.5, $2^2.5^2$, $2^3.3^3$ ...... λοιπὸν πολλαπλασιάζοντες τὸν ἀριθμητήν του ἐπὶ τὴν μονάδα ἀκολουθημένην ἀπὸ τόσα μηδενικά, ὅσαι μονάδες εὑρίσκονται εἰς τὸν μεγαλήτερον ἀπὸ τοὺς ἐκθέτας τοῦ 2 καὶ 5, τοὺς ὁποίους περιέχει ὁ παρονομαστής, τὸ συναγόμενον γίνεται ἐξ ἀνάγκης πολλαπλάσιον τοῦ παρονομαστοῦ.

Λοιπὸν ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργασιῶν, αἱ ὁποῖαι πρέπει νὰ ἐκτελεσθῶσιν, εἶναι περιωρισμένος, καὶ ἴσος μὲ τὸν μεγαλήτερον ἀπὸ τοὺς δύο ἐκθέτας τοῦ 2 καὶ 5, οἱ ὁποῖοι περιέχονται εἰς τὸν παρονομαστήν.

§. 160. Κάθε κοινὸν κλάσμα, τοῦ ὁποίου ὁ παρονομαστὴς περιέχει ἕνα ἢ πολλοὺς πρώτους παράγοντας διαφορετικοὺς τοῦ 2 καὶ 5, καὶ οἱ ὁποῖοι ἐν ταυτῷ δὲν περιέχονται εἰς τὸν ἀριθμητήν του, δίδει ἀριθμὸν ἀπεριόριστον, ἢ ἄπειρον δεκαδικῶν ψηφίων. Περιπλέον τὸ λαμβανόμενον δεκαδικὸν κλάσμα εἶναι περιοδικόν, τουτέστι μετά τινα ἀριθμὸν ἐργασιῶν τὰ αὐτὰ δεκαδικὰ ψηφία ἀναγεννῶνται μὲ τὴν αὐτὴν τάξιν.

Τῷ ὄντι ὁ πολλαπλασιασμὸς τοῦ ἀριθμητοῦ ἐπὶ 10, 100, 1000 . . . . . εἰσάγει τοὺς πρώτους παράγοντας 2 καὶ 5 ἕκαστον εἰς μίαν τινὰ δύναμιν· καὶ οὕτως ὁ πρῶτος παράγων, τὸν ὁποῖον ὑποθέτομεν, ὅτι εὑρίσκεται εἰς τὸν παρονομαστὴν χωρὶς νὰ εἰσέρχεται εἰς τὸν ἀριθμητὴν, δὲν θέλει εὑρεθῆ (ἀρθμ. 136) εἰς τὸ γινόμενον τοῦ ἀριθμητοῦ ἐπὶ ὁποιανδήποτε δύναμιν τοῦ 10. Λοιπὸν ὁποιονδήποτε ἀριθμὸν μηδενικῶν καὶ ἂν προσθέσωμεν, δὲν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν γινόμενον ἀκριβῶς διαιρετὸν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, καὶ οὕτως αἱ πράξεις ἐξακολουθοῦνται ἕως εἰς τὸ ἄπειρον.

Λέγω περιπλέον, ὅτι τὸ κλάσμα θέλει εἶναι περιοδικόν. Τῷ ὄντι ἐπειδὴ κατὰ τὸν τρόπον τοῦ ἀριθμοῦ 88, ἕκαστον ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν, εἶναι κάτιτι μικρότερον τοῦ διαιρέτου, ὅστις μένει σταθερὸς, ἕπεται ἐκ τούτου, ὅτι ὅταν κάμωμεν τὸ περισσότερον τόσας πράξεις, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ διαιρέτης μεῖον μιᾶς, πρέπει νὰ συναπαντήσωμεν ἓν τῶν προευρεθέντων ὑπολοίπων.

Ἀλλὰ προσθέτοντες 0 εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου, θέλομεν εὕρει νέον μερικὸν διαιρετέον ὅμοιον μὲ ἕνα τῶν προτέρων· καὶ ἐπειδὴ ὁ διαιρέτης εἶναι ὁ αὐτὸς, τὸ νέον πηλίκον, καὶ τὸ νέον ὑπόλοιπον θέλουν εἶναι παρομοίως ὅμοια μὲ ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα ἔδωκαν τὸν πρῶτον εὑρεθέντα διαιρετέον καὶ διαιρέτην. Προσθέτοντες εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου νέον 0, ξαναευρίσκομεν τὸν μερικὸν διαιρετέον, ὅστις ἀμέσως ἀκολουθεῖ ἐκεῖνον, τὸν ὁποῖον πρῶτον εἴχομεν εὕρει, καὶ ἐπομένως τὸ πηλίκον, τὸ ὁποῖον λαμβάνεται ὕστερον ἀπὸ ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον εἴχαμεν εὕρει, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Πρέπει λοιπὸν τινὰ ψηφία τοῦ πηλίκου νὰ ξαναναφανοῦν περιοδικῶς, καὶ κατὰ τὴν ἀκόλουθον τάξιν.

Ἄς κάμωμεν μερικὰς ἐφαρμογάς.

§. 161. Πρῶτον παράδειγμα. Ἄς προτεθῇ νὰ ἀνάξωμεν εἰς δεκαδικὰ τὸ κλάσμα $\frac{6}{7}$.

Ἀρκεῖ διὰ τοῦτο νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸν κανόνα τοῦ ἀριθμοῦ 88. Ἐδῶ ἡ περίοδος ἀρχίζει ὕστερον ἀπὸ τὴν ἕκτην ἐργασίαν, τουτέστιν ὕστερον ἀπὸ τόσας ἐργασίας, ὅσαι μονάδες εἶναι εἰς τὸν παρονομαστὴν 7, ἐλαττούμενον ἀπὸ μίαν μονάδα.

$$\begin{array}{r|l} 60 & 7 \\ \hline & 0,\ 857142|857142 \\ 40 & \\ 50 & \\ 10 & \\ 30 & \\ 20 & \\ 6 & \end{array}$$

Δεύτερον παράδειγμα. Ἔστω τὸ κλάσμα $\frac{13}{37}$.

Εἰς τοῦτο τὸ παράδειγμα ἡ περίοδος παῤῥησιάζεται μετὰ τὴν τρίτην ἐργασίαν· τουτέστι ταχύτερα ἀφ' ὅ,τι σημειόνει ὁ διαιρέτης 37.

$$\begin{array}{r|l} 130 & 37 \\ \hline & 0,\ 351|351 \\ 190 & \\ 50 & \\ 13 & \end{array}$$

Τρίτον παράδειγμα. $\frac{147}{875}$.

Ἐδῶ τὸ δεκαδικὸν κλάσμα εἶναι πεπερασμένον, μ' ὅλον ὅτι ὁ παρονομαστὴς 875 ἢ 7.125 περιέχει τὸν παράγοντα 7· ἀλλὰ παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ παράγων οὗτος εὑρίσκεται εἰς τὸν ἀριθμητὴν, καὶ ἐξαλείφοντές τον ἄνω καὶ κάτω, εὑ-

$$\begin{array}{r|l} 1470 & 875 \\ \hline & 0,\ 168 \\ 5650 & \\ 7000 & \\ 0000 & \end{array}$$

ρίσκομεν $\frac{21}{125}$ ἢ $\frac{21}{5^3}$, κλάσμα, τὸ ὁποῖον (ἀριθμ. 159) δύναται νὰ ἀχθῇ εἰς ἀριθμὸν πεπερασμένον δεκαδικῶν ψηφίων.

Τέταρτον παράδειγμα. $\frac{29}{84}$.

Ἡ περίοδος παῤῥησιάζεται εἰς τοῦτο τὸ παράδειγμα ὕστερον ἀπὸ τὴν ὀγδόην πρᾶξιν· ἀλλ᾽ ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ παρατηρήσωμεν εἶναι, ὅτι τὰ δύο

$$\begin{array}{l|l} 290 & 84 \\ \hline & 0,\ 34523809|523809\ \ldots \\ \ \ 380 & \\ \ \ \ 440 & \\ \ \ \ \ 200 & \\ \ \ \ \ \ 328 & \\ \ \ \ \ \ \ 680 & \\ \ \ \ \ \ \ \ 800 & \\ \ \ \ \ \ \ \ \ 44 & \end{array}$$

πρῶτα δεκαδικὰ ψηφία δὲν κάμνουν μέρος τῆς περιόδου, ἐν ᾧ εἰς τὰ δύο πρῶτα παραδείγματα η περίοδος ἀρχίζει ἀπὸ τὸ πρῶτον δεκαδικὸν ψηφίον.

Τὰ περιοδικὰ δεκαδικὰ κλάσματα, τῶν ὁποίων ἡ περίοδος ἀρχίζει ἀπὸ τὸ πρῶτον δεκαδικὸν ψηφίον, καλοῦνται ἁπλᾶ περιοδικὰ κλάσματα· καὶ ἐκεῖνα, τῶν ὁποίων ἡ περίοδος ἀρχίζει ὕστερον ἀπὸ τὸ ψηφίον ὁποιασδήποτε τάξεως, καλοῦνται μικτὰ περιοδικὰ κλάσματα.

§. 162. Ἴδομεν ὅτι ἀπὸ μερικὰ κοινὰ κλάσματα ἀναχθέντα εἰς δεκαδικὰ, ἐξάγονται δεκαδικὰ περιοδικά.

Καὶ ἀντιστρόφως. Πᾶν περιοδικὸν δεκαδικὸν κλάσμα ἁπλοῦν ἢ μικτὸν προκύπτει ἀπὸ κοινόν τι κλάσμα, καὶ δυνάμεθα εὐκόλως νὰ εὕρωμεν τὸ κλάσμα, ἀπὸ τὸ ὁποῖον ἐγεννήθη.

Τὸ ζήτημα τοῦτο παῤῥησιάζει δύο χωριστὰς περιστάσεις, ἢ τὸ περιοδικὸν κλάσμα εἶναι ἁπλοῦν, ἢ εἶναι μικτόν.

Ἂς παρατηρήσωμεν κατ' ἀρχὰς τὴν πρώτην περίστασιν.

Ἔστω 0, αβγδε . . . . . αβγδε . . . . αβγδε τὸ δεδομένον δεκαδικὸν κλάσμα, καὶ ἂς παραστήσωμεν διὰ ν τὸν ἀριθμὸν τῶν ψηφίων, τὰ ὁποῖα περιέχει ἑκάστη περίοδος, καὶ διὰ χ′ τὴν ἄγνωστον τιμὴν τοῦ κλάσματος.

Ἔχομεν λοιπὸν χ′=0, αβγδε . . . . αβγδε . . . . αβγδε. (1).

Ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὰ δύο μέλη ταύτης τῆς ἰσότητος ἐπὶ $10^ν$, ἢ ἐπὶ τὴν μονάδα ἀκολουθημένην ἀπὸ τόσα μηδενικὰ, ὅσα εἶναι τὰ ψηφία εἰς τὴν περίοδον, ἡ ὁποία πρᾶξις ἐκτελεῖται, προχωρούσης (ἀριθμ. 83) τῆς ὑποδιαστολῆς ν τάξεις κατὰ τὰ δεξιά,

Ἐντεῦθεν λαμβάνομεν $10^ν$. χ′, ἢ 100000 . . . ×χ′=αβγδε . . . αβγδ...αβγδ, τουτέστιν 100000 . . . ×χ′=αβγδε . . . +0, αβγδε . . . αβγδε (2).

Ἐὰν ἤδη ἀφαιρέσωμεν τὴν ἰσότητα (1) ἀπὸ τὴν ἰσότητα (2), καὶ παρατηρήσωμεν ὅτι

$$100000\ldots\times χ'-χ'=(100000-1)\,χ'$$

ἢ

$$=99999\ldots\times χ',$$

συνάγομεν

$$99999\ldots\times χ'=αβγδε\ldots$$

Τέλος πάντων $χ'=\dfrac{αβγδε\ldots}{99999\ldots}$

τὸ ὁποῖον φανερόνει, ὅτι περιοδικὸν δεκαδικὸν κλάσμα ἁπλοῦν εἶναι ἰσοδύναμον μὲ κοινὸν κλάσμα, τὸ ὁποῖον ἔχει δι' ἀριθμητὴν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τῆς περιόδου, καὶ παρονομαστὴν σύνθετον ἀπὸ τόσα 9, ὅσα ψηφία εἶναι εἰς τὴν περίοδον.

Οὕτως τὸ κλάσμα 0, 351351351 . . . εἶναι κατὰ τὸν κανόνα τοῦτον ἰσοδύναμεν μὲ τὸ κλάσμα $\frac{351}{999}$.

Τὸ τοιοῦτον κλάσμα γίνεται ἁπλούστερον, ὅταν παρατηρήσωμεν, ὅτι οἱ δύο του ὅροι εἶναι διαιρετοὶ διὰ τοῦ 9. Συνάγομεν δὲ διὰ τῆς ἐξαλείψεως τοῦ παράγοντος τούτου, $\frac{39}{111}$. Ἐξαλείφοντες ἐκ νέου τὸν παράγοντα 3, ὅστις καὶ αὐτὸς εἶναι κοινὸς, εὑρίκομεν τέλος πάντων τὸ ἀναχθὲν κλάσμα $\frac{13}{57}$, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ κλάσμα τοῦ δευτέρου παραδείγματος, περὶ οὗ ὅρα εἰς τὸν ἀριθμ. 161.

Ἔστω προσέτι τὸ κλάσμα 0,03960396 . . . . Ἡ περίοδος εἶναι ἐδῶ 0396· λοιπὸν τὸ κλάσμα εἶναι ἰσοδύναμον μὲ $\frac{0396}{9999}$, ἢ ἁπλῶς $\frac{396}{9999}$.

(Ἐξαλείφομεν 0, ὡς ἀνωφελές· ὅμως ἔπρεπε νὰ βαστάξωμεν πρότερον λογαριασμὸν, ἐπειδὴ κάμνει μέρος τῶν ψηφίων τῆς περιόδου). Ὁ παράγων 9 μὲ τὸ νὰ εἶναι κοινὸς τῶν δύο ὅρων τούτου τοῦ ἐξαγομένου, τὸν ἐξαλείφομεν, καὶ συνάγομεν $\frac{44}{1111}$, κλάσμα, τοῦ ὁποίου οἱ δύο ὅροι εἶναι ἀκόμη διαιρετοὶ διὰ τοῦ 11, καὶ ἐξαλείφοντές το, λαμβάνομεν τέλος πάντων $\frac{4}{101}$ διὰ τὸ κλάσμα ἠγμένον εἰς τοὺς ἁπλουστέρους του ὅρους.

Σ. Κ. Ἐὰν τὸ περιοδικὸν κλάσμα περιεῖχεν ἀκέραια, ἐκάμναμεν κατὰ πρῶτον ἀφαίρεσιν τοῦ ἀκεραίου, μετὰ ταῦτα τὸ ἐπροσθέταμεν εἰς τὸ ἰσοδύναμον κοινὸν κλάσμα, ἀφ' οὗ ἠθέλαμεν τὸ ἀνάξει εἰς τοὺς ἁπλουστέρους του ὅρους.

Οὕτως, ἂς ζητήσωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τῶν 4,162162 . . . .

Ἔχομεν κατὰ πρῶτον $0,162162 \ldots = \frac{162}{999} = \frac{18}{111} = \frac{6}{37}$. Λοιπὸν $4,162162 \ldots = 4\frac{6}{37} = \frac{154}{37}$.

§. 163. Ἂς ἔλθωμεν τώρα εἰς τὴν περίστασιν τῶν μικτῶν περιοδικῶν κλασμάτων.

Πρὸς ἀκριβεστέραν κατάληψιν ὑποθέτομεν, ὅτι ὑπάρχουσι τέσσαρα ψηφία πρὸ τῆς περιόδου, καὶ πέντε εἰς τὴν περίοδον· ἀλλ' ὁ τρόπος τοῦ συλλογισμοῦ δὲν θέλει εἶναι ὀλιγώτερον γενικός.

Ἔστω λοιπὸν 0, πκρσαβγδεαβγδε . . . τὸ δεδομένον κλάσμα. Παρατηροῦμεν, ὅτι πολλαπλασιάζοντες καὶ διαιροῦντές το εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν διὰ τοῦ 100000, τὸ βάλλομεν ὑπὸ τὴν μορφήν.

$$\frac{1}{100000}\ (\pi\kappa\rho\sigma,\ \alpha\beta\gamma\delta\epsilon\alpha\beta\gamma\delta\epsilon \ldots)$$

ἀλλ' ἡ ποσότης ἡ ἐντὸς τῆς παρενθέσεως ἰσοδυναμεῖ κατὰ τὸν εἰρημένον κανόνα μὲ $\pi\kappa\rho\sigma + \frac{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon}{99999}$, ἢ ἄγοντες τὸ ἀκέραιον εἰς κλάσμα, μὲ $\frac{\pi\kappa\rho\sigma \times 99999 + \alpha\beta\gamma\delta\epsilon}{99999}$.

Λοιπὸν τὸ ζητούμενον κλάσμα, τὸ ὁποῖον εἶναι 10000 φοραῖς μικρότερον, θέλει εἶναι ἴσον μὲ $\frac{\pi\kappa\rho\sigma \times 99999 + \alpha\beta\gamma\delta\epsilon}{999990000}$.

Τοῦτο μᾶς βεβαιόνει, ὅτι ὁποιονδήποτε μικτὸν περιοδικὸν κλάσμα, εἶναι ἰσοδύναμον μὲ κοινὸν κλάσμα, ἔχον ἀριθμητὴν μὲν τὴν περίοδον αὐξανομένην ἐκ τοῦ γινομένου τοῦ μὴ περιοδικοῦ μέρους ἐπὶ ἀριθμόν τινὰ σύνθετον ἐκ τόσων 9, ὅσα ἔχει ψηφία ἡ περίοδος, παρονομαστὴν δὲ τὸν αὐτὸν τοῦτον ἀριθμὸν 9 ἀκολουθούμενον ἀπὸ τόσα μηδενικά, ὅσα ἔχει ψηφία τὸ μὴ περιοδικὸν μέρος.

Ἐὰν θεωρήσωμεν π.χ. τὸ κλάσμα 0,3193069306.

Κατὰ τὸν προειρημένον κανόνα ἔχομεν τὴν τιμήν του $\dfrac{9306+31\times9999}{999900}$.

Διὰ νὰ καταστήσωμεν ἁπλούστερον τοῦτο τὸ ἐξαγόμενον, παρατηροῦμεν, ὅτι 31×9999 εἶναι τὸ αὐτὸ ὡς $31\times(10000-1)$ ἢ $310000-31$· τουτέστιν ἀφ' οὗ προσθέσωμεν τέσσαρα μηδενικὰ εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ 31, ἀρκεῖ νὰ ἀφαιρέσωμεν 31 ἀπὸ τὸ ἐξαγόμενον, καὶ ἔχομεν 309969.

Προσθέτοντες εἰς τοῦτον τὸν ἀριθμόν, 9306, ἐξάγομεν $\dfrac{319275}{999900}$, κλάσμα, τὸ ὁποῖον ἀνάγεται εἰς $\dfrac{129}{404}$, ἀφ' οὗ οἱ δύο του ὅροι διαδοχικῶς διαιρεθῶσιν διὰ 9,25 καὶ 11, τῶν ὁποίων εἶναι προφανῶς κοινοὶ διαιρέται· (ὅρα τὰ συσταθέντα χαρακτηριστικὰ διὰ τοὺς τρεῖς τούτους ἀριθμούς).

Προβάλλομεν δὲ διὰ γύμνασιν τὰ κλάσματα
16,285714285714 ....., 4,0428571428571 ...,
5,52027027.

Τὰ κοινὰ κλάσματα, μὲ τὰ ὁποῖα εἶναι ἰσοδύναμα, ἄγονται εἰς ὅρους ἁπλουστάτους.

§. 164. Ὁ τύπος $\dfrac{\pi\kappa\rho\sigma\times99999+\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon}{999990000}$ μᾶς ἄγει εἰς ἀξιοπαρατηρήτους συνεπείας.

Δυνάμεθα νὰ θέσωμεν αὐτὸν ὑπὸ τὴν μορφὴν $\frac{\pi\kappa\rho\sigma.\ (100000 - 1) + \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon}{999990000}$, ἢ καὶ κατ' ἄλλον τρόπον $\frac{\pi\kappa\rho\sigma\ 00000 - \pi\kappa\rho\sigma + \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon}{999990000}$.

Τούτου τεθέντος, εἶναι φανερὸν, κατὰ τὸν τελευταῖον τύπον, ὅτι ἀφ' οὗ ἐκτελέσωμεν τοὺς ὑπολογισμοὺς, οἵτινες εἶναι σημειωμένοι εἰς τὸν ἀριθμητὴν, τὸ ἐξαγόμενον δὲν τελειόνει εἰς ἓν, ἢ περισσότερα μηδενικά· ἐπειδὴ, διὰ νὰ γένῃ τοῦτο, ἔπρεπε τινὰ τῶν τελευταίων ψηφίων τοῦ πκρσ, νὰ εἶναι τὰ αὐτὰ, ὡς τὰ τελευταῖα ψηφία τοῦ αβγδε, καὶ εἰς ταύτην τὴν περίστασιν, ἡ περίοδος δὲν ἤθελεν ἀρχίζει ἀπὸ τὸ τέταρτον δεκαδικὸν ψηφίον, καθὼς ὑπεθέσαμεν, (π. χ., ἐὰν εἴχαμεν σ=ε, ρ=δ, τὸ πρωτότυπον κλάσμα ἤθελεν εἶναι 0, πκδεαβγδεαβγδε . . . ; καὶ ἡ περίοδος ἤθελεν ἀρχίζει ἀπὸ τὸ τρίτον ψηφίον, καὶ ἤθελεν εἶναι δεαβγ) . . . Βλέπομεν λοιπὸν, ὅτι μετὰ τὴν ἀναγωγὴν τῆς ἀνωτέρω ἐκφράσεως εἰς τοὺς ἁπλουστέρους ὅρους της, τὸ ἐξαγόμενον πρέπει νὰ ἦναι κλάσμα, τοῦ ὁποίου ὁ παρονομαστὴς περιέχει τοὺς δύο παράγοντας 2 καὶ 5, ἢ κἂν τὸν ἕνα τῶν δύο εἰς τὴν τετάρτην δύναμιν, τουτέστιν εἰς δύναμιν σημειωμένην διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μὴ εὑρισκομένων ψηφίων εἰς τὴν περίοδον.

Ἐντεῦθεν ἐξάγομεν τὰς δύο ἀκολούθους προτάσεις.

1η. Κάθε κλάσμα, τοῦ ὁποίου ὁ παρονομαστὴς δὲν περιέχει κανένα τῶν δύο παραγόντων 2 καὶ 5, ἢ εἶναι πρῶτος μὲ 2 καὶ 5, δίδει, ὅταν εἰς δεκαδικὸν ἀχθῇ, Περιοδικὸν ἁπλοῦν κλάσμα.

Τῷ ὄντι, ἐὰν ἦναι δυνατὸν νὰ ἀχθῇ εἰς περιοδικὸν μικτὸν κλάσμα, τότε τὸ ἰσοδύναμον κοινὸν κλάσμα, εἰς τὸ ὁποῖον ἄγεται, κατὰ τὸν κανόνα τοῦ ἀριθμοῦ 163, ὅταν φερθῇ εἰς τοὺς ἁπλουστέρους του ὅρους, θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸ δεδομένον κλάσμα· ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ἀδύνατον, ἐπειδὴ εἴδομεν (ἀριθμ. 157) ὅτι ἓν κλάσμα, τοῦ ὁποίου οἱ δύο ὅροι εἶναι πρῶτοι μεταξύ των, ἢ τὸ ὁποῖον εἶναι ἀνάγωγον, διὰ νὰ εἶναι ἴσον μ' ἄλλο κλάσμα, πρέπει νὰ εἶναι οἱ ὅροι του πολλαπλάσιοι τῶν τοῦ πρώτου ὅρων· ἤθελε δὲ προκύψει ἐκ τούτου ὅτι ὁ παρονομαστὴς τοῦ προτεθέντος κλάσματος ἦτον πολλαπλοῦς κατὰ 2 ἢ 5, τὸ ὁποῖον ἦτον ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως.

2α· Κάθε ἀνάγωγον κλάσμα, τοῦ ὁποίου ὁ παρονομαστὴς περιέχει ἕνα τῶν δύο παραγόντων 2 καὶ 5, ἢ καὶ τοὺς δύο ὑψωμένους ἕκαστον εἰς μίαν τινὰ δύναμιν, δίδει περιοδικὸν μικτὸν κλάσμα, τοῦ ὁποίου ἡ περίοδος πρέπει ν' ἀρχίζῃ ὕστερον ἀπὸ τόσα ψηφία, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ μεγαλήτερος τῶν δύο ἐκθετῶν τοῦ 2 καὶ 5, οἵτινες εὑρίσκονται εἰς τὸν παρονομαστήν.

Πρῶτον μὲν τὸ περιοδικὸν κλάσμα δὲν δύναται νὰ ἦναι ἁπλοῦν· ἐπειδὴ τοῦ τύπου τούτων ὄντος $\frac{αβγδε \; . \; . \; . \; .}{99999}$, εἶναι ἀδύνατον, ὥστε τὸ κλάσμα τοῦτο, τοῦ ὁποίου ὁ παρονομαστὴς δὲν περιέχει οὐδένα τῶν παραγόντων 2 καὶ 5, νὰ εἶναι μετὰ τὴν ἀναγωγὴν εἰς τοὺς ἁπλουστέρους του ὅρους, ἴσον μὲ τὸ δεδομένον κλάσμα, τοῦ ὁποίου ὁ παρονομαστὴς περιέχει τοὺς αὐτοὺς τούτους παράγοντας.

Δεύτερον δὲ ἡ περίοδος πρέπει νὰ ἀρχίζῃ ὕστερον ἀπὸ ν ψηφία, ἐὰν ν παῤῥησιάζῃ τὸν μεγαλήτερον τῶν δύο ἐκθετῶν τοῦ 2 καὶ 5, ὅς τις εὑρίσκεται εἰς τὸν παρονομαστήν· ἐπειδὴ, ὑποτιθεμένου π. χ, ὅτι ἀρχίζει μετὰ $\nu - 1$ ψηφία, τὸ ἰσοδύναμον κλάσμα μὲ τὸ περιοδικὸν τοῦτο κλάσμα ἤθελαν ἔχει παρονομαστὴν μὴ περιέχοντα τοὺς δύο παράγοντας 2 καὶ 5, ἢ τὸν ἕνα τούτων, παρὰ εἰς τὴν $\nu - 1$ δύναμιν, καὶ δὲν ἤθελεν εἶναι ἴσον μὲ τὸ δεδομένον κλάσμα· ἐπειδὴ ἄλλως τὰ τοιαῦτα δύο κλάσματα ὑπετέθησαν ἀνάγωγα.

Π. χ. Τὰ κλάσματα $\frac{6}{7}$, $\frac{13}{37}$ (ἀριθμ. 161) ἔδωσαν ἁπλᾶ περιοδικὰ κλάσματα· ἐπειδὴ 7 καὶ 37 εἶναι πρῶτα μὲ 2 καὶ 5· ἀλλὰ τὸ κλάσμα $\frac{29}{84}$ ἔδωκε περιοδικὸν κλάσμα, τοῦ ὁποίου ἡ περίοδος ἄρχιζε μετὰ τὸ δεύτερον ψηφίον, ἐπειδὴ 84 εἶναι ἴσον μὲ $2^2 . 21$.

Τέλος πάντων, τὸ κλάσμα $\frac{145}{176}$ δυνάμενον ἀνατεθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν $\frac{145}{2^4 . 11}$, δίδει περιοδικὸν κλάσμα, τοῦ ὁποίου ἡ περίοδος ἀρχίζει μετὰ τὸ τέταρτον δεκαδικὸν ψηφίον.

Εὑρίσκομεν τῷ ὄντι διὰ τὴν τιμὴν τούτου τοῦ κλάσματος εἰς δεκαδικὰ 0,8238636363 . . . .

§. 165. Δὲν ἐκτείνομεν περισσότερον τὴν ἐξέτασιν τῶν ἰδιοτήτων τῶν δεκαδικῶν περιοδικῶν κλασμάτων· ἀλλὰ παρατηροῦμεν μόνον, ὅτι ἀνάλογοι ἰδιότητες μὲ τὰς προηγουμένας παῤῥησιάζονται εἰς ὁποιονδήποτε σύστημα ἀριθμήσεως, ἔχον βάσιν β.

Κατὰ πρῶτον, διὰ νὰ ἀνάξωμεν κοινὸν κλάσμα εἰς ὑποδιαιρέσεις ἀνὰ β μικροτέρας τῆς μονάδος, πρέπει κατὰ τὸν κανόνα τοῦ ἀριθμοῦ 88 νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμητὴν ἐπὶ β ἢ 10, τουτέστι νὰ προσθέσωμεν 0 εἰς τὰ δεξιά του, καὶ νὰ διαιρέσωμε τὸ γινόμενον διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, * ἡ ὁποία πρᾶξι δίδει εἰς τὸ πηλίκον μονάδας ἀνὰ β μικροτέρας τῆ ἀρχικῆς μονάδος, καὶ ἔντι ὑπόλοιπον· καὶ νὰ γράφω μεν εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου νέον 0, καὶ νὰ δια ρέσωμεν τὸ ἐξαγόμενον διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, ὁποία πρᾶξις δίδει εἰς τὸ πηλίκον μονάδας ἀνὰ β μ κροτέρας τῶν προτέρων, ἢ ἀνὰ β^2 μικροτέρας τῆς ἀ χικῆς μονάδος· καὶ οὕτω διαδοχικῶς. Ἀποδεχόμεν δὲ τοῦτο ἔχομεν τὴν ἀκόλουθον θεωρίαν.

Κάθε κοινὸν κλάσμα, τοῦ ὁποίου ὁ παρονομ στὴς δὲν περιέχει ἄλλους πρώτους παράγοντας, εἰ ἐκείνους, οἵτινες εἰσέρχονται εἰς τὴν βάσιν β, ἀν χθὲν εἰς ὑποδιαιρέσεις ἀνὰ β μικροτέρας τῆς μονάδο δίδει χώραν εἰς κλάσμα ἐκ πεπερασμένου ἀριθμοῦ ψ φίων· ἀλλὰ κάθε ἀνάλογον κλάσμα, τοῦ ὁποίου παρονομαστὴς περιέχει πρώτους παράγοντας, διας ρετικοὺς τῶν ὅσοι συνθέτουν τὴν βάσιν, δίδει χώρ εἰς κλάσμα ἐξ ἀπείρου ἀριθμοῦ ψηφίων καὶ περιοδικ

Καὶ οὕτω περὶ τῶν ἄλλων ἰδιοτήτων. Παραιτο μεν δὲ εἰς τοὺς μαθητὰς τὴν φροντίδα νὰ τὰς ἀ ζητῶσι, καὶ νὰ τὰς ἐκφράζωσι καὶ νὰ τὰς ἀπο κνύωσι.

§. δ'. Περὶ τῶν Συνεχῶν Κλασμάτων.

§. 166. Τὰ συνεχῆ κλάσματα ἔλαβαν τὴν χήν τους ἀπὸ τὰς ὡς ἔγγιστα γινομένας ἐκτιμήσ τῶν κλασμάτων, τῶν ὁποίων οἱ ὅροι εἶναι μεγαλ τατοι, καὶ πρῶτοι μεταξύ των.

---

*) Μερικοὶ ἀριθμοὶ τούτου τοῦ παραγράφου ὑποθέτουσιν ἀ βραϊκὰς γνώσεις ὀλίγον τι πλέον ἐκτεταμένας, παρ' ἐκεῖ