εἰς τὸν διαιρέτην 3, ἐπὶ τὸν ὁποῖον πολλαπλασιάζομεν ὅλους τοὺς διαιρέτας 2, 4, 8, καὶ συνάγομεν τοὺς νέους διαιρέτας 6, 12, 24· διότι οὗτοι παῤῥησιάζουν 2×3, $2^2\times3$, $2^3\times3$. Περνῶμεν μετὰ ταῦτα εἰς τὸν διαιρέτην 5, καὶ πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 5 τοὺς ἀριθμοὺς 2, 4, 8, 3, 6, 12, 24. Ἡ τοιαύτη πρᾶξις μᾶς δίδει νέους διαρέτας, τοὺς ὁποίους θέτομεν εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ 5.

Ἐν ἑνὶ λόγῳ δι' ἕκαστον ἁπλοῦν παράγοντα προσδιορισμένον εἰς τὴν πρώτην σειρὰν τῶν ἐργασιῶν, πολλαπλιάζομεν ὅλους τοὺς διαιρέτας τοὺς πρὸ αὐτοῦ ἐπὶ τὸν παράγοντα τοῦτον, προσέχοντες νὰ μὴν ἐπαναλάβωμεν τὸ αὐτὸ γινόμενον.

Οὕτω περνῶντες εἰς τὸν δεύτερον διαιρέτην 7, πολλαπλασιάζομεν μόνον ἐπὶ τοῦτον τὸν διαιρέτην ὅλους τοὺς διαιρέτας, οἵτινες εὑρίσκονται εἰς τὴν ἰδίαν γραμμὴν εἰς τὴν ὁποίαν εἶναι καὶ ὁ πρῶτος διαρέτης 7, καὶ συνάγομεν 49, 98, 196.

Ἡ ὁδὸς εἶναι ἀπολύτως ἡ αὐτὴ εἰς κάθε ἄλλο παράδειγμα. Ἐνταῦθα προτείνομεν διὰ γύμνασιν νὰ εὕρωμεν ὅλους τοὺς διαιρέτας τῶν ἀριθμῶν 1764, 1665. 5670, 50527, τοὺς ὁποίους εὑρίσκομεν ἴσους μὲ $2^2.3^2.7^2.$ | $3^2.5.37.$ | $2.3^4.5.7.$ | $7^3.89.$ |

§. 149. Ἐπειδὴ εἶναι ἀναγκαιότατον νὰ μὴν παραιτήσωμεν οὔτε ἕνα τῶν διαιρετῶν, διὰ τοῦτο κάμνομεν γνωστὸν κανόνα τινὰ, διὰ τοῦ ὁποίου βεβαιονόμεθα, ἐὰν ἐπροσδιορίσθησαν ὅλοι οἱ διαιρέται ἑνὸς ἀριθμοῦ.

Πρὸς τοῦτο, ἃς ἐπαναλάβωμεν τὴν ἔκφρασιν $N=\alpha^{\nu}\beta^{\nu'}\gamma^{\nu''}\delta^{\nu'''}$· Εἶναι φανερὸν, ὅτι θέλομεν λάβει ὅλους τοὺς διαιρέτας τοῦ N, εἰς αὐτοὺς δὲ καὶ τὴν μονάδα, πολλαπλασιάζοντες ὅλους τοὺς ὅρους τῆς σειρᾶς . . . . . . $1, \alpha', \alpha^2, \alpha^3, \alpha 4 \ldots \alpha^{\nu}$
ἐπὶ ὅλους τοὺς ὅρους ταύτης $1, \beta', \beta^2, \beta^3, \beta 4 \ldots \beta^{\nu'}$

Μετὰ ταῦτα ὅλους τοὺς ὅρους τοῦ οὕτως προσδιορισμένου γινομένου, ἐπὶ τοὺς ὅρους τῆς νέας σειρᾶς . $1, \gamma, \gamma^2, \gamma^3, \gamma^4 \ldots \gamma^{\nu''}$ καὶ τέλος πάντων ὅλους τοὺς ὅρους τοῦ νέου γινομένου ἐφ' ὅλους τοὺς ὅρους τῆς νέας σειρᾶς . . . $1, \delta, \delta^2, \delta^3, \delta^4 \ldots \delta^{\nu'''}$ καὶ οἱ διάφοροι ὅροι τούτου τοῦ τελευταίου γινομένου, ἄλλο δὲν εἶναι, εἰμὴ συμπλοκὴ ἀνὰ ἕν, ἀνα δύο, ἀνὰ τρία . . . . . τῶν α, β, δ . . . . ὑψωμένων εἰς δυνάμεις, τῶν ὁποίων οἱ βαθμοὶ δὲν ὑπερβαίνουν ν, ν', ν'', ν''' . . . . . ἀλλ' ὁ ἀριθμὸς τῶν ὅρων τοῦ πρώτου πολυωνύμου εἶναι προφανῶς $\nu+1$, ὁ δὲ ἀριθμὸς τῶν ὅρων τοῦ δευτέρου εἶναι $\nu'+1$. Λοιπὸν ὅλος ὁ ἀριθμὸς τῶν ὅρων τοῦ γινομένου τῶν δύο πολυωνύμων εἶναι ἴσος μὲ $(\nu+1)(\nu'+1)$.

Παρομοίως ὁ ἀριθμὸς τῶν ὅρων τοῦ τρίτου πολυωνύμου εἶναι $\nu''+1$· οὕτως ὁ ὅλος ἀριθμὸς τῶν ὅρων τοῦ γινομένου ἐκ τριῶν σειρῶν εἶναι $(\nu+1)(\nu'+1)(\nu''+1)$, καὶ οὕτω διαδοχικῶς. Ἐκ τούτου ἐξάγομεν τὸν ἀκόλουθον κανόνα. „Αὔξανε κατὰ μονάδα τοὺς ἐκθέτας ν, ν', ν'' . . . . τῶν διαφόρων πρώτων παραγόντων, οἵτινες εἰσέρχονται εἰς τὸν ἀριθμὸν N, μετὰ ταῦτα πολλαπλασίαζε ἀναμεταξύ των τοὺς οὕτω αὐξανομένους κατὰ μονάδα ἐκθέτας, καὶ τὸ γινόμενον ἐκφράζει τοὺς διαιρέτας ὅλους τοῦ N, ἐμπεριλαμβανομένης καὶ τῆς μονάδος.“ Διὰ τοῦτο εἰς τὰς πράξεις ἐγράψαμεν ἐπὶ κεφαλῆς τῶν διαιρετῶν τὸν 1, ὅστις πρέπει καὶ αὐτὸς νὰ βάλλεται εἰς λογαριασμόν.

Εἰς τὸ προειρημένον παράδειγμα εὑρήκαμεν $5880 = 2^3 . 3^1 . 5^1 . 7^2$· τοῦτο δὲ μᾶς δίδει $(3+1)(1+1)(1+1)(2+1)$ ἢ $4 \times 2 \times 2 \times 3$, ἢ 48, διὰ τὸν ὅλον ἀριθμὸν τῶν διαιρετῶν πραγματικῶς διαφορετικῶν ἀναμεταξύτων, τὸ ὁποῖον εἶναι εὔκολον νὰ βεβαιωθῶμεν ἀπὸ τὸν πίνακα (ἀρ. 148).

§. 150. **Πρώτη παρατήρησις.** Ἀκολουθεῖ ἐνίοτε, δοκομάζοντες τὴν διαίρεσιν τοῦ ἀριθμῦ N διὰ τῶν πρώτων ἀριθμῶν 2, 3, 5, 7 . . . . νὰ μὴν εὑρίσκωμεν κἀνένα ἀπὸ αὐτοὺς διαιροῦντα ἐντελῶς αὐτὸν, ἀλλ' ἀφ' οὗ δοκιμάσωμεν διαιρέτην τινὰ, ὅστις νὰ ἀπερνᾷ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ N (ὅρα ἀρ. 181), χωρὶς νὰ εὕρωμεν κἀνένα ἀκριβῆ διαιρέτην, εἶναι ἀνωφελὲς νὰ δοκιμάζωμεν ἄλλους νέους διαιρέρας, καὶ βεβαιούμεθα, ὅτι N εἶναι πρῶτος ἀριθμός.

Οὕτως 73 εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος, ἐπειδὴ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 73 εἶναι μεταξὺ τοῦ 8 καὶ 9, καὶ κἀνεῖς ἀριθμὸς ἕως εἰς 9 δὲν διαιρεῖ ἐντελῶς 73.

Πρὸς ἀπόδειξιν ταύτης τῆς προτάσεως, ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ A καὶ B, τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον ἔστω N. Σημειόνοντες διὰ P τὴν τετραγωνκὴν ῥίζαν τοῦ N, ἔχομεν $A \times B = P \times P$, ἐκ τοῦ ὁποίου συνάγομεν, διαιροῦντες τὰ δύο μέλη διὰ τοῦ γινομένου $B \times P$, τὴν ἰσότητα $\frac{A}{P} = \frac{P}{B}$.

Ἀλλὰ διὰ νὰ ὑπάρχῃ αὐτὴ ἡ ἰσότης, πρέπει, ἐὰν ἔχωμεν $A > P$, νὰ ἔχωμεν εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν $B < P$, ἐπειδὴ ἀλλέως ἠθέλαμεν ἔχει ἀριθμὸν μεγαλήτερον τῆς μονάδος, ἴσον μὲ ἀριθμὸν μικρότερον αὐτῆς. Ἕπεται ἐκ τούτου, ὅτι δὲν ὑπάρχει κἀνεὶς διαιρέτης τοῦ N μεγαλήτερος τοῦ P μόνον, διότι δὲν εἶναι πλέον μικρότερος· οὕτως τὸ N εἶναι πρῶτος ἀριθμός. Οἱ νέοι, οἵτινες γνωρίζουν τὴν ἐξαγωγὴν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης, γνωρίζουν χωρὶς κόπον, κατὰ τὴν ἄνω παρατήρησιν, ὅτι 113, 719, 977, 3329, 8123 . . . . . εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι.

§. 151. **Δευτέρα παρατήρησις.** Ὅλοι οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ ἔχουσι ταύτην τὴν πολλὰ περίεργον ἰδιότητα, ὅτι, ἐὰν αὐξηθῶσιν ἢ ἐλαττωθῶσι κατὰ μονάδα, τὸ ἐξαγόμενον εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 6. Μὲ ἄλλους λόγους, ὅλοι οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ περιλαμβάνονται εἰς τὸν γενικὸν τύπον $6\nu \pm 1$ (ὄντος ν ἀκεραίου ἀριθμοῦ.)

Διὰ νὰ δώσωμεν τὸν λόγον ταύτης τῆς ἰδιότητος, ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι πᾶς ἀκέραιος ἀριθμὸς ἐξ ἀνάγκης περιλαμβάνεται εἰς μίαν τῶν ἀκολούθων ἓξ κλάσεων.

$6\nu+1$, $6\nu+2$, $6\nu+3$, $6\nu+4$, $6\nu+5$, $6\nu+6$ *).

Ἡ δευτέρα, ἡ τετάρτη καὶ ἡ ἕκτη κλάσις σύγκεινται ἀπὸ ἀριθμοὺς διαιρετοὺς διὰ τοῦ 2, καὶ διὰ τοῦτο δὲν δύνανται νὰ ἦναι ἀριθμοὶ πρῶτοι· ἡ τρίτη περιέχει ἀριθμοὺς διαιρετοὺς διὰ τοῦ 3· μένουσι λοιπὸν αἱ δύο κλάσεις $6\nu+1$, $6\nu+5$, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἱκαναὶ νὰ περιλαμβάνωσι τοὺς πρώτους ἀριθμοὺς **)· καὶ ἐπειδὴ $6\nu+5$ εἶναι ἴσον μὲ $6\nu+6-1=6(\nu+1)$ $1=6\nu'-1$, ν' ἐκφράζοντος ἀκέραιον τινὰ ἀριθμὸν, ἕπεται, ὅτι οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ περιλαμβάνονται εἰς τὸν τύπον $6\nu \pm 1$.

Ἀλλ' ἐκ ταύτης τῆς παρατηρήσεως δὲν ἠμποροῦμεν νὰ ἐξάξωμεν τὴν ἀντίστροφον, ὅτι κάθε ἀριθμὸς τοῦ τύπου $6\nu+1$ ἢ -1 εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος.

Π. χ. 25 εἶναι ἴσον μὲ $6\times4+1$, καὶ δὲν εἶναι πρῶτος ἀριθμός· 121 εἶναι ἴσον μὲ $6\times20+1$, καὶ δὲν εἶναι πρῶτος ἀριθμὸς, ἐπειδὴ $11\times11=121$.

*) Ἐὰν εἰς τὴν σειρὰν τῶν ἓξ κλάσεων τῶν ἀριθμῶν καλέτωμεν ν, ἴσον τῷ 0, συνάγομεν, 1, 2, 3, 4, 5, 6· Ἐὰν ν ληφθῇ ἴσον 1 συνάγομεν 7, 8, 9, 10, 11, 12· ἐὰν τὸ ν ἴσον τῷ 2, συνάγομεν, 13, 14, 15, 16, 17, 18, καὶ οὕτως ἐφεξῆς, τουτέστιν ἐξ αὐτῶν τῶν ἓξ κλάσεων συνάγομεν διαδοχικῶς ὅλους τοὺς ἀριθμοὺς. Ὁ Μεταφραστής.

**) Ἐπειδὴ δίδοντες διαφορετικὰς τιμὰς τοῦ ν ἐξάγομεν τὰς ἀκολούθους τιμὰς διὰ $6\nu+1$, $6\nu+5$, τουτέστι $\nu=0=1=$, $2=3=4$ . . . . ἐξάγομεν 1 καὶ 5, 7 καὶ 11, 13 καὶ 17, 19 καὶ 23, 25 καὶ 29 . . . . Ἐκτὸς τοῦ $\nu=4$ κάθε ἄλλη πρὸ τοῦ 4 τιμὴ τοῦ ν μᾶς ἔδωκε πρώτους ἀριθμούς. Ὁ Μεταφραστής.

Ἐν γένει ὅλοι οἱ περιττοὶ ἀριθμοὶ, οἵτινες δὲν εἶναι διαιρετοὶ διὰ τοῦ 3, ἐμπεριέχονται εἰς τὸν τύπον $6\nu \pm 1$. Ἤδη πολλαπλασιάζοντες δύο ἢ πολλοὺς πρώτους ἀριθμοὺς διαφορετικοὺς τοῦ 2 καὶ 3 ἐξάγομεν γινόμενον, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν αὐτὴν ἰδιότητα, χωρὶς νὰ ἦναι ἀριθμὸς πρῶτος, ἐπειδὴ ἐσχηματίσθη διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἄλλων ἀριθμῶν . . . .

§. 152. Ἀναγωγὴ τῶν κλασμάτων εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν.

Ὁ συσταθεὶς γενικὸς κανὼν εἰς τὸν ἀριθμὸν 42, διὰ νὰ ἀνάγωμεν δύο ἢ περισσότερα κλάσματα εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν, μᾶς ἄγει εἰς κλάσματα, τῶν ὁποίων οἱ ὅροι εἶναι πολλὰ μεγάλοι· Ἤδη, ὅταν οἱ ἀρχικοὶ παρονομασταὶ περιέχωσι κοινοὺς παράγοντας, εἶναι δυνατὸν νὰ ἐξάξωμεν ἀριθμὸν πολὺ μικρότερον τοῦ γινομένου, τὸ ὁποῖον θέλει εἶναι μετὰ ταῦτα ὁ κοινὸς παρονομαστὴς ὅλων τῶν κλασμάτων.

Τοῦτο τὸ ζήτημα τὸ διὰ τοὺς ἁπλουστάτους ὑπολογισμούς του ἀξιολογώτατον, περὶ τοῦ ὁποίου ἤδη λαλοῦμεν, συνίσταται εἰς τὸν προσδιορισμὸν τοῦ ἁπλουστέρου πολλαπλασίου τῶν παρονομαστῶν δύο, ἢ περισσοτέρων κλασμάτων.

Ἰδοὺ ποῖος εἶναι ὁ κανὼν, τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ ἐξακολουθήσωμεν, διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τοῦτον τὸν ἀριθμόν. „Ἀνάλυσε τοὺς διαφόρους παρονομαστὰς εἰς τοὺς πρώτους παράγοντάς των, κατὰ τὸν κανόνα τοῦ ἀρ. 148. Σχημάτισε μετὰ ταῦτα τὸ γινόμενον ὅλων τούτων, ὑψωμένων ἀμοιβαίως εἰς τὴν ἀνωτέραν δύναμιν, εἰς τὴν ὁποίαν οὗτοι εὑρίσκονται ὑψωμένοι εἰς τοὺς διαφόρους παρονομαστάς. Τὸ οὕτω σχηματιζόμενον γινόμενον εἶναι ὁ ζητούμενος ἀριθμός.“

Κατὰ πρῶτον αὐτὸς ὁ ἀριθμὸς εἶναι πολλαπλάσιος ἑκάστου παρονομαστοῦ, ἐπειδὴ περιέχει ὅλους τοὺς πρώτους παράγοντας εἰς δύναμιν τοὐλάχιστον ἴσην μὲ ἐκείνην, ἥτις εἰσέρχεται εἰς αὐτὸν τὸν παρονομαστήν. Λέγω πρὸς τούτοις, ὅτι τοῦτο τὸ πολλαπλάσιον εἶναι τὸ ἁπλούστερον, ἐπειδὴ, διὰ νὰ περιέχῃ ἀκριβῶς ὁποιονδήποτε παρονομαστὴν, πρέπει νὰ περιέχῃ ἕκαστον πρῶτον παράγοντα εἰς δύναμιν τινὰ τοὐλάχιστον ἴσην μὲ ἐκείνην, ἥτις περιέχεται εἰς αὐτὸν τὸν παρονομαστήν.

Προκείσθω λόγου χάριν νὰ ἀνάξωμεν εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν τὰ ἓξ κλάσματα

$$\frac{13}{60},\ \frac{17}{28},\ \frac{23}{240},\ \frac{173}{225},\ \frac{319}{490},\ \frac{523}{720}.$$

Οἱ ἓξ παρονομασταὶ ἀναλυόμενοι εἰς τοὺς ἁπλοῦς των παράγοντας, κατὰ τὸν γνωστὸν κανόνα, ἄγονται εἰς

$$2^2\cdot 3\cdot 5,\ 2^2\cdot 7,\ 2^4\cdot 3\cdot 5,\ 3^2\cdot 5^2,\ 2\cdot 5\cdot 7^2,\ 2^4\cdot 3^2\cdot 5.$$

Οἱ μόνοι πρῶτοι παράγοντες, οἵτινες εἰσέρχονται εἰς τούτους τοὺς παρονομαστὰς, εἶναι 2, 3, 5 καὶ 7, καὶ αἱ ἀνώτεραι δυνάμεις, εἰς τὰς ὁποίας οὗτοι οἱ παράγοντες ὑφόνονται, εἶναι 2^4., 3^2, 5^2, 7^2 . . . Σχηματίζοντες λοιπὸν τὸ γινόμενον τῶν ἀνωτέρων τούτων δυνάμεων ἔχομεν 176400· καὶ οὗτος εἶναι ὁ ἀριθμὸς, ὅς τις εἶναι τὸ ἁπλούστερον πολλαπλάσιον ὅλων τῶν παρονομαστῶν, ἢ ὁ κοινὸς παρονομαστὴς, πρὸς τὸν ὁποῖον πρόκειται νὰ φέρωμεν ὅλα τὰ κλάσματα, ὡς ἀκολούθως.

Πολλαπλασιάζομεν διαδοχικῶς τοὺς δύο ὅρους ἑκάστου κλάσματος ἐπὶ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἁπλουστέρου πολλαπλασίου διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ κλάσματος ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἐργαζόμεθα. Οὕτως εἰς τοῦτο τὸ παράδειγμα, λαμβάνομεν κατ' ἀρχὰς τὸ πρῶτον κλάσμα.

Ἡ διαίρεσις τοῦ 176400 διὰ 60 δίδει 2940 πηλίκον, καὶ πολλαπλασιάζοντες τοὺς δύο ὅρους αὐτοῦ τοῦ κλάσματος ἐπὶ 2940 ἔχομεν $\frac{38220}{176400}$. Εὑρίσκομεν παρομοίως διὰ τὰ ἄλλα πέντε κλάσματα

$$\frac{107100}{176400}, \frac{16905}{176400}, \frac{135632}{176400}, \frac{114840}{176400}, \frac{128135}{176400}.$$

Ὅλαι αὗται αἱ πράξεις εἶναι πολλὰ σύνθετοι, ἀλλ' ἤθελαν εἶναι πλέον ἐπίπονοι, καὶ ἠθέλαμεν πέσει εἰς παρονομαστὰς πολλὰ μεγάλους, ἐὰν ἠκολουθούσαμεν τὸν συσταθέντα κανόνα εἰς τὸν ἀριθμὸν 44.

Ἡ ἀνάλυσις τῶν παρονομαστῶν εἰς τοὺς ἁπλουστέρους των παράγοντας ἐκτελεῖται ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον μὲ τὴν μόνην παρατήρησιν αὐτῶν, καὶ μάλιστα ὅταν περιέχωσι πολλαῖς φοραῖς τοὺς παράγοντας 2, 3, 5, τῶν ὁποίων εἴδομεν τὰ χαρακτηριστικὰ τῆς διαιρετότητος, καθὼς καὶ τῶν πολλαπλασίων των 4, 6, 8, 9, 12, 15, 18, 25, 36 . . . . .

Θέτομεν δὲ διὰ γύμνασιν τὰ ἀκόλουθα κλάσματα.

$$\frac{13}{20}, \frac{17}{48}, \frac{113}{280}, \frac{527}{960}, \frac{1211}{1800}, \frac{3613}{5040}, \frac{5237}{6860}.$$

(τὸ ἁπλούστερον πολλαπλάσιον ὅλων τῶν παρονομαστῶν εἶναι $2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot = 4939200$).

§. 153. Παρατήρησις περὶ τοῦ μεγίστου κοινοῦ Διαιρέτου.

Ἐσυστήσαμεν εἰς τὸν ἀριθμὸν 49, μέθοδον τοῦ νὰ προσδιορίζωμεν τὸν μεγαλήτερον ἀριθμὸν, ὅς τις δύναται νὰ διαιρῇ ἐν ταὐτῷ δύο δεδομένους ἀριθμούς. Αὕτη ἡ μέθοδος εἶναι ἁπλουστάτη, καὶ ἡ δεῖξις, τὴν ὁποίαν ἐδώκαμεν, μᾶς εὐχαριστεῖ πληρέστατα, ὡς πρὸς τὴν ἀκρίβειαν αὐτῆς. Μ' ὅλον τοῦτο γνωστοποιοῦμεν ὠφελίμως τινὰς ἰδιότητας τούτου τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου, αἱ ὁποῖαι μᾶς εὐκολύνουν τὰς πράξεις τῆς μεθόδου.

Ἔστωσαν Α καὶ Β οἱ δεδομένοι ἀριθμοί. Ἂς ἐννοήσωμεν, ὅτι, ἀφ' οὗ τοὺς ἀνελύσαμεν καὶ τοὺς δύο εἰς τοὺς ἁπλοῦς των παράγοντας κατὰ τὴν μέθοδον τοῦ ἀριθμοῦ 148, εὑρήκαμεν, ὅτι α, β, γ, δ εἶναι οἱ κοινοὶ πρῶτοι παράγοντες αὐτῶν, καὶ οἱ μόνοι, τοὺς ὁποίους εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν εὑρήκαμεν. Σημειόνομεν ἔτι διὰ ν, ν', ν'', ν''' τοὺς ἐκθέτας τῶν ἀνωτέρων δυνάμεων αὐτῶν τῶν παραγόντων, κοινῶν εἰς Α καὶ Β. Ἔχομεν λοιπὸν $Α=α^{ν} β^{ν'} γ^{ν''} δ^{ν'''} Α'$ καὶ $Β=α^{ν} β^{ν'} γ^{ν''} δ^{ν'''} Β'$ . . . (1) (Α' καὶ Β' ὄντων ἀριθμῶν πρώτων μεταξύ των). Τῷ ὄντι, ἢ περιέχουσιν ἀκόμη ὁ εἷς καὶ ὁ ἄλλος τινὰς τῶν παραγόντων α, β, γ, δ, ἐκ τῶν ὁποίων ὅσοι εὑρίσκονται εἰς Α', δὲν δύνανται νὰ εὑρεθῶσιν εἰς Β', ἐπειδὴ ἀλλέως ν, ν', ν'', ν''' δὲν ἤθελαν εἶναι οἱ ἐκθέται τῶν ἀνωτέρων κοινῶν δυνάμεων, ἢ Α' καὶ Β' σύγκεινται ἀπὸ πρώτους παράγοντας διαφορετικοὺς τοῦ α, β, γ, δ, καὶ τότε οἱ παράγοντες τοῦ Α' διαφέρουν τῶν τοῦ Β', ἀλλέως δὲν ἤθελαν εἶναι α, β, γ, δ οἱ μόνοι πρῶτοι κοινοὶ παράγοντες. Λοιπὸν Α' καὶ Β' εἶναι πρῶτοι ἀναμεταξύ των.

Προκύπτει ἐκ τῶν προειρημένων, ὅτι οἱ κοινοὶ παράγοντες τοῦ Α καὶ Β εἶναι γινόμενα τινῶν δυνάμεων τοῦ α, β, γ, δ ἑνὸς βαθμοῦ ἴσου ἢ μικροτέρου τῶν ν, ν', ν'', ν''', καὶ συμπλεκομένων ἀνὰ ἓν, ἀνὰ δύο, ἀνὰ τρία, ἀνὰ τέσσαρα· ἀλλὰ τὸ μέγιστον γινόμενον, τὸ ὁποῖον ἐδυνάμεθα οὕτως νὰ προσδιορίσωμεν εἶναι φανερὰ τὸ $α^{ν} β^{ν'} γ^{ν''} δ^{ν'''}$. Λοιπὸν ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δύο δεδομένων ἀριθμῶν.

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης δύο ἀριθμῶν εἶναι τὸ γινόμενον τῶν πρώτων παραγόντων κοινῶν εἰς αὐτοὺς τοὺς δύο ἀριθμοὺς, καὶ ὑψωμένων σχετικῶς εἰς τὴν μικροτέραν τῶν δύο δυνάμεων, εἰς τὰς ὁποίας οὗτοι οἱ παράγοντες εὑρίσκονται εἰς τοὺς δύο ἀριθμούς.

Συνέπεια. Πᾶς κοινὸς διαιρέτης δύο ἀριθμῶν διαιρεῖ τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην των, διότι εἴδομεν, ὅτι κάθε μερικὸς διαιρέτης πρέπει νὰ ἦναι εἷς των παραγόντων τοῦ $\alpha^{\nu}\beta^{\nu'}\gamma^{\nu''}\delta^{\nu'''}$.

§ 154. Αὕτη ἡ ἰδιότης χορηγεῖ ἓν ἄλλο μέσον διὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου δύο ἀριθμῶν. „Ἀρχίζομεν κατὰ πρῶτον νὰ ἐρευνῶμεν ὅλους τοὺς διαιρέτας τοῦ Α, κατὰ τὴν μέθοδον τοῦ ἀριθμοῦ 148, καὶ παρομοίως τοὺς τοῦ ἀριθμοῦ Β. Θεωροῦμεν δὲ μετὰ ταῦτα, ποῖος εἶναι ὁ μεγαλήτερος ἀπὸ ὅλους τοὺς διαιρέτας, οἵτινες εἶναι κοινοὶ εἰς τοὺς δύο πίνακας, καὶ οὕτως ἔχομεν τὸν ζητούμενον ἀριθμόν.“ Ἢ ἀλλέως, τὸ ὁποῖον εἶναι πλέον σύντομον. „Ἀφ' οὗ ἀναλύσωμεν μόνον τοὺς δύο ἀριθμοὺς εἰς τοὺς ἁπλοῦς των παράγοντας (ἀρ. 148) σχηματίζομεν γινόμενόν τι ἐκ τῶν κοινῶν πρώτων παραγόντων, καὶ ὑψωμένων ἀμοιβαίως εἰς τὴν μικροτέραν τῶν δύο δυνάμεων, κατὰ τὰς ὁποίας οὗτοι οἱ παράγοντες εὑρίσκονται εἰς τοὺς δύο ἀριθμούς.“

Ἔστωσαν π. χ. οἱ δύο ἀριθμοὶ 2150 καὶ 3612, τῶν ὁποίων ζητοῦμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην.

2150	1	3612	1	
1075	2	1806	2	
215	5	903	2	$2 \times 43 = 86$.
43	5	301	3	
1	43	43	7	
		1	43	

Εὑρίσκομεν διὰ τοὺς ἁπλοῦς διαιρέτας τοῦ 2150, 2, 5, 5, 43, καὶ διὰ τοὺς ἁπλοῦς διαιρέτας τοῦ 3612, 2, 2, 3, 7, 43.

Λοιπὸν 2×43 ἢ 86 εἶναι ὁ ζητούμενος μέγιστος κοινὸς διαιρέτης.

Βλέπομεν πρὸς τούτοις, ὅτι 5×5 ἢ 25, καὶ 2×3×7 ἢ 42 εἶναι τὰ πηλίκα τῆς διαιρέσεως τῶν 2150 καὶ 3612 διὰ 86.

§. 155. Αὕτη ἡ μέθοδος εἶναι ἐν γένει ὀλιγώτερον ἁπλῆ ἀπὸ τὴν κοινὴν μέθοδον, καὶ μάλιστα, ὅταν εἰσάγωμεν εἰς τὰς πράξεις τοὺς ἀκολούθους μετασχηματισμούς.

Ἐπειδὴ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης δύο ἀριθμῶν σύγκειται ἀπὸ τοὺς κοινοὺς πρώτους παράγοντας τῶν δύο ἀριθμῶν, δυνάμεθα πρεπόντως νὰ ἐξαλείψωμεν ἀπὸ ἕνα ἐκ τῶν δύο, πρῶτον τινὰ παράγοντα, ὅς τις εὑρίσκεται εἰς αὐτὸν, καὶ δὲν εἰσέρχεται εἰς τὸν ἄλλον, καὶ ἀντιστρόφως.

Δυνάμεθα παρομοίως, ἐὰν θέλωμεν, νὰ ἐξαλείψωμεν παράγοντα, ὅς τις φανερὰ εἶναι κοινὸς εἰς τοὺς δύο ἀριθμούς· ἀρκεῖ εἰς τὸ τέλος τῆς πράξεως νὰ τὸν ἐνθυμώμεθα, ὅταν πολλαπλασιάζωμεν τὸ ἐξαγόμενον ἐπὶ τὸν ἐξαλειφθέντα παράγοντα.

Παρατηροῦμεν προσέτι, ὅτι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης δύο ἀριθμῶν μὲ τὸ νὰ ἦναι (ἀρ. 49) ὁ αὐτὸς μὲ τὸν ὅς τις ὑπάρχει μεταξὺ τοῦ μικροτέρου ἀριθμοῦ καὶ τοῦ πρώτου ὑπολοίπου, μεταξὺ τοῦ ὑπολοίπου καὶ τοῦ δευτέρου, καὶ ἐφεξῆς . . . . ἡ τοιαύτη ἐξάλειψις δύναται νὰ ἐκτελεσθῇ εἰς ἑκάστην τῶν παρὰ τῆς μεθόδου ἀπαιτουμένων πράξεων.

Οὕτως ἐπαναλαμβάνοντες τοὺς δύο ἀριθμοὺς 2150 καὶ 3612, βλέπομεν, ὅτι 2150 περιέχει τὸν παράγοντα 5, καὶ παρομοίως τὸν παράγοντα 25, ὁ ὁποῖος δὲν εἰσέρχεται εἰς 3612· τὸν ἐξαλείφομεν λοιπὸν, καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 86.

Παρομοίως 3612 περιέχει τὸν παράγοντα 3, ὅς τις δὲν εἰσέρχεται εἰς 2150, τὸν ἐξαλείφομεν, καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 1204.

Οἱ δύο ἀριθμοὶ 86 καὶ 1204 ἔχουσι προφανῶς κοινὸν παράγοντα τὸ 2, τὸ ὁποῖον βάλλομεν κατὰ μέρος, τὸ δὲ ζήτημα ἄγεται εἰς τὸ νὰ ἀναζητήσωμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τοῦ 43 καὶ 602. Διαιροῦντες 602 διὰ 43 εὑρίσκομεν ἀκριβὲς πηλίκον 14. Λοιπὸν 43×2 ἢ 86 εἶναι ὁ ζητούμενος μέγιστος κοινὸς διαιρέτης.

Ἔστωσαν προσέτι οἱ δύο ἀριθμοὶ 377 καὶ 249. Ἐξαλείφομεν πρῶτον τὸν παράγοντα 3, ὅς τις εὑρίσκεται εἰς τὸ 249, καὶ δὲν εἰσέρχεται εἰς τὸ 377· τὸ δὲ ζήτημα ἄγεται εἰς τὸ νὰ προσδιορίσωμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην μεταξὺ τοῦ 377 καὶ 83.

Ἂς ἐφαρμόσωμεν τὴν μέθοδον. Διαιροῦντες 377 διὰ 83, εὑρίσκομεν πηλίκον 4, καὶ ὑπόλοιπον 45, ἀλλ' ἀντὶ νὰ διαιρέσωμεν 83 διὰ 45, ὡς συνειθίζομεν, παρατηροῦμεν, ὅτι $45=3^2\times5$. ἤδη οἱ παράγοντες 3 καὶ 5 δὲν εἰσέρχονται εἰς τὸ 83. Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ ἐξαλείφωμεν ἀπὸ τὸ 45 τὸν παράγοντα 3^2 καὶ τὸν 5, καὶ ἐξάγομεν τελικὸν πηλίκον τὴν μονάδα. Λοιπὸν 377 καὶ 83, καὶ ἐπομένως 377 καὶ 249 εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

$$\begin{array}{r|l} & 4 \\ 377 & 83 \\ \hline 45 & \end{array}$$

Γυμναζόμενοι ὀλίγον εἰς τοὺς μετασχηματισμοὺς τούτους, εὐκολύνομεν πολὺ τὴν μέθοδον τῶν ὑπολογισμῶν. Ἡμεῖς δὲ μὲ ἄλλον σκοπὸν δὲν ἐπαῤῥησιάσαμεν ταύτην τὴν νέαν μέθοδον, εἰμὴ διότι εἶναι ἀναγκαία εἰς τὸν ἀλγεβραϊκὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην.

§. 156. Ἔχομεν χρείαν κάποτε νὰ προσδιορίζωμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην περισσοτέρων παρὰ δύο ἀριθμῶν, καὶ ἰδοὺ τίνι τρόπῳ προσδιορίζομεν αὐτόν.

(Διὰ συντομίαν τῆς γραφῆς σημειόνομεν διὰ τριῶν ψηφίων μ. κ. δ. τὰς τρεῖς λέξεις μέγιστος κοινὸς διαιρέτης).

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν μ. κ. δ. μεταξὺ πολλῶν ἀριθμῶν, πρέπει κατὰ πρῶτον νὰ ζητήσωμεν τὸν μ. κ. δ. μεταξὺ δύο τούτων τῶν ἀριθμῶν, μετὰ ταῦτα μεταξὺ τοῦ εὑρεθέντος καὶ ἑνὸς τρίτου ἀριθμοῦ, μετὰ ταῦτα μεταξὺ τούτου τοῦ τελευταίου, καὶ ἑνὸς τετάρτου ἀριθμοῦ . . . . .

Ἔστωσαν Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, ... οἱ προτεθέντες ἀριθμοὶ, καὶ ἂς καλέσωμεν Δ τὸν μ. κ. δ. μεταξὺ τοῦ Α καὶ Β, Δ′ τὸν μ. κ. δ. μεταξὺ τοῦ Δ καὶ Γ, λέγω πρῶτον, ὅτι Δ′ εἶναι μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τοῦ Α, Β, Γ. Τῷ ὄντι ὁ μ. κ. δ. τοῦ Α, Β, καὶ Γ, ἐπειδὴ ἔχει νὰ διαιρέσῃ Α καὶ Β, διαιρεῖ Δ, ὅς τις εἶναι ὁ μ. κ. δ. αὐτῶν (ὅρα ἀρ. 153), περιπλέον διαιρεῖ καὶ τὸ Γ, διὰ τοῦτο πρέπει νὰ διαιρῇ καὶ Δ′, ὅς τις εἶναι ἐξ ὑποθέσεως ὁ μ. κ. δ. τοῦ Δ καὶ Γ. Προσέτι δὲ Δ′ διαιρῶν Δ, διαιρεῖ Α καὶ Β· οὕτως Δ′ διαιρεῖ Α, Β, Γ, καὶ ἐπομένως εἶναι ὁ μ. κ. δ. αὐτῶν. Λοιπὸν οὗτος ὁ τελευταῖος ἀριθμὸς καὶ Δ′ εἶναι ἀμοιβαίως διαιρετοὶ ὁ εἷς διὰ τοῦ ἄλλου, καὶ διὰ τοῦτο εἶναι ἴσοι.

Παρομοίως ὁ μ. κ. δ. μεταξὺ Α, Β, Γ, Ε, ἐπειδὴ μέλλει νὰ διαιρῇ Α, Β, Γ, διαιρεῖ καὶ τὸ Δ′, τὸ ὁποῖον εἶναι ὁ μ. κ. δ. αὐτῶν, προσέτι διαιρεῖ τὸ Ε, οὕτως πρέπει νὰ διαιρῇ τὸν μ. κ. δ. Δ″ τοῦ Δ′ καὶ Ε. Προσέτι ἐπειδὴ Δ″ διαιρῶν Δ′, διαιρεῖ καὶ Α, Β, Γ, οὕτω Δ″ διαιρεῖ Α, Β, Γ, Ε, καὶ διὰ τοῦτο τὸν μ. κ. δ. αὐτῶν. Οὗτος ὁ τελευταῖος ἀριθμὸς καὶ Δ″

ὄντες ἀμοιβαίως διαιρετοὶ ὁ εἷς διὰ τοῦ ἄλλου, εἶναι ἴσοι, καὶ οὕτω καθεξῆς.

Σ. Κ. Ἐννοεῖται ἡ ὠφέλεια ἐν γένει, τοῦ νὰ ἐργαζώμεθα κατὰ πρῶτον ἐπὶ τῶν δύο ἁπλουστέρων ἀριθμῶν, ἐπειδὴ ὁ ζητούμενος μ. κ. δ. δὲν δύναται νὰ ὑπερβαίνῃ ἐκεῖνον, ὅς τις ὑπάρχει μεταξὺ τῶν δύο τούτων ἀριθμῶν· εὑρίσκομεν διὰ τῆς τοιαύτης πράξεως, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ 504, 756, 1260 καὶ 2058 ἔχουσι μ. κ. δ. τὸν 42.

Ἦτον ἐπίσης δυνατὸν νὰ ἀναλύσωμεν τοὺς τέσσαρας ἀριθμοὺς εἰς τοὺς ἁπλοῦς των διαιρέτας, καὶ νὰ ἐκτελέσωμεν ἐπὶ αὐτῶν τὸ ὅ,τι εἴπομεν εἰς τὸν ἀριθμὸν 154.

§. 157. Παρατηρήσεις περὶ τῶν ἀναγώγων κλασμάτων.

Καλοῦμεν (ἀρ. 51) κλάσμα ἀνάγωγον ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον δὲν ἐκφράζεται δι' ἁπλουστέρων ὅρων. Ἕπεται προδήλως ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τούτου, ὅτι οἱ δύο ὅροι τοῦ ἀναγώγου κλάσματος εἶναι πρῶτοι μεταξύ των· ἐπειδὴ ἐὰν εἶχαν κοινὸν παράγοντα, ἠθέλαμεν ἠμπορέσει νὰ τοὺς διαιρέσωμεν δι' αὐτοῦ, καὶ νὰ λάβωμεν ἁπλούστερον κλάσμα, τὸ ὁποῖον ἤθελεν εἶναι ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως.

Ἀντιστρόφως, κάθε κλάσμα, τοῦ ὁποίου οἱ δύο ὅροι εἶναι πρῶτοι μεταξύ των, εἶναι ἀνάγωγον.

Τῷ ὄντι ἂς σημειώσωμεν διὰ $\frac{\alpha}{\beta}$ τὸ δεδομένον κλάσμα, τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι εἶναι καθ' ὑπόθεσιν πρῶτοι μεταξύ των, καὶ ἔστω ἄλλο κλάσμα $\frac{\gamma}{\delta}$ ἴσον μὲ τὸ πρῶτον.

Ἔχομεν λοιπὸν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$· ὅθεν ἐξάγομεν $\gamma=\frac{\alpha\delta}{\beta}$, ἀλλὰ γ εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός· λοιπὸν $\frac{\alpha\delta}{\beta}$ πρέπει νὰ ἦναι καὶ αὐτὸ ἀκέραιος ἀριθμός· ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως β εἶναι πρῶτος μὲ τὸ α, διὰ τοῦτο (ἀρ. 132) β πρέπει νὰ διαιρῇ δ, καὶ οὕτως ἔχομεν $\delta=\beta\kappa$. Ἀντεισάγοντες ταύτην τὴν τιμὴν τοῦ δ εἰς τὴν ἔκφρασιν τοῦ γ, λαμβάνομεν $\gamma=\frac{\alpha\beta\kappa}{\beta}=\alpha\kappa$. Τοῦτο μᾶς δείχνει προδήλως, ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{\gamma}{\delta}$, διὰ νὰ ἦναι ἰσοδύναμον μὲ ἄλλο κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$, τοῦ ὁποίου οἱ δύο ὅροι εἶναι πρῶτοι μεταξύ των, πρέπει οἱ δύο ὅροι γ καὶ δ νὰ ἦναι οἱ αὐτοὶ πολλαπλάσιοι τοῦ α καὶ β.

Λοιπὸν $\frac{\alpha}{\beta}$ δὲν δύναται νὰ ἦναι ἰσοδύναμον μὲ κἀνὲν ἄλλο ἁπλούστερον κλάσμα. Ἕπεται ἐκ τούτου, ὅτι ἀφ' οὗ διαιρέσωμεν τοὺς δύο ὅρους ἑνὸς κλάσματος διὰ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου των, τὸ ἐξαγόμενον κλάσμα εἶναι ἀνάγωγον· πρότασις, τὴν ὁποίαν ἐκφράσαμεν (ἀρ. 5.), ἀλλὰ δὲν τὴν ἀπεδείξαμεν.

Συμπεραίνομεν προσέτι, ὅτι δύο ἀνάγωγα κλάσματα δὲν δύνανται νὰ ἦναι ἴσα, ἐκτὸς, ἐὰν οἱ ἀριθμηταὶ καὶ παρονομασταί των ἦναι ἴσοι.

Τῷ ὄντι, τὸ πρῶτον ὂν ἀνάγωγον πρέπει νὰ ἔχῃ τοὺς δύο ὅρους του πρώτους μεταξύ των. Λοιπὸν, διὰ νὰ ἦναι τὸ δεύτερον ἴσον μὲ αὐτὸ, πρέπει οἱ δύο του ὅροι νὰ ἦναι τὰ ἴδια πολλαπλάσια τῶν δύο ὅρων τοῦ πρώτου, καὶ ἐπειδὴ τοῦτο τὸ δεύτερον κλάσμα ἔχει παρομοίως τοὺς δύο του ὅρους πρώτους μεταξύ των, πρέπει ἁπλῶς νὰ ἦναι ἴσοι μὲ τοὺς δύο ὅρους τοῦ πρώτου.