100 διαιρεῖται διὰ 4, καὶ δίδει πηλίκον 25, ἐπειδὴ 100=25×4· λοιπὸν τὸ πρῶτον μέρος διαιρεῖται διὰ τοῦ 4 ἢ διὰ τοῦ 25· ἀλλὰ καὶ τὸ δεύτερον μέρος διαιρεῖται καὶ αὐτὸ ἐξ ὑποθέσεως διὰ τοῦ 4 ἢ 25· οὕτως ὅλος ὁ ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ τοῦ 4 ἢ διὰ τοῦ 25· Π. χ. 3548 διαιρεῖται διὰ τοῦ 4, ἐπειδὴ 48 εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 4· 27875 διαιρεῖται διὰ τοῦ 25, ἐπειδὴ 75 εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 25· τὸ δὲ 13758 δὲν εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ 4, ἀλλὰ δίδει ὑπόλοιπον 2, τουτέστιν ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν διαιροῦντες τὸ 58 διὰ τοῦ 4· 25659 δὲν διαιρεῖται διὰ τοῦ 25 ἀλλὰ δίδει ὑπόλοιπον 9, ἢ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ 59 διὰ τοῦ 25.

Σ. Κ. Διὰ τὸν ἀριθμὸν 25, μόνον οἱ ἀριθμοὶ, οἵτινες τελειόνουν εἰς 00, 25, 50, καὶ 76 διαιροῦντας διὰ τοῦ 25.

$\overline{4}^{ον}$ Πᾶς ἀριθμὸς, τοῦ ὁποίου τρία τελευταῖα ψηφία, θεωρούμενα μὲ τὰς σχετικάςτων τιμὰς, σχηματίζουσιν ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ 8, ἢ διὰ 125, εἶναι παρομοίως διαιρετὸς διὰ τοῦ 8 ἢ 125.

Δὲν ἀναπτύσσομεν τὴν δεῖξιν, ἐπειδὴ εἶναι ἀνάλογος μὲ τὰς ἀνωτέρω. Ἀρκεῖ μόνον νὰ σημειώσωμεν, ὅτι αὕτη ἐπιστηρίζεται εἰς τοῦτο, ὅτι 1000=125×8· ἀλλ' αὕτη ἡ ἰδιότης δὲν εἶναι εἰς χρῆσιν.

§. 141. Ἰδιότητες τῶν ἀριθμῶν 3 καὶ 9.

Πᾶς ἀριθμὸς, τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων θεωρουμένων εἰς τὴν ἀπόλυτον τιμήν των εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 3 ἢ διὰ τοῦ 9, εἶναι καὶ αὐτὸς ὁ ἴδιος διαιρετὸς διὰ τοῦ 3 ἢ διὰ τοῦ 9.

Παρατηροῦμεν κατὰ πρῶτον, ὅτι ἐὰν ἐξ ὁποιασδήποτε δυνάμεως τοῦ 10 ἢ τῆς μονάδος, ἥτις ἔχει εἰς τὰ δεξιά της ἀριθμόν τινα μηδενικῶν, ἀφαιρέσωμεν 1, τὸ ἐξαγόμενον εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ 9. Ἐπειδὴ τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο συντίθεται ἀπὸ τόσα ψηφία 9, γραμμένα τὸ ἓν κατ' ἐξακολούθησιν τοῦ ἄλλου, ὅσα μηδενικὰ ἔχει· ἀλλ' ἡ ἀπόλυτος τιμὴ, ἑκάστου ψηφίου 9 εἶναι διαιρετὴ τόσον διὰ τοῦ 3, ὅσον καὶ διὰ τοῦ 9· λοιπὸν τὸ αὐτὸ ἀκολουθεῖ καὶ διὰ τὴν σχετικήν του τιμὴν, ἥτις εἶναι πολλαπλάσιος τῆς ἀπολύτου τιμῆς. Οὕτως τὸ ἐξαγόμενον εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ 3 ἢ διὰ τοῦ 9.

Τούτου τεθέντος, ἔστω θζδγβα ὁ προβαλλόμενος ἀριθμὸς, τὸν ὁποῖον σημειόνομεν διὰ N, καὶ ἔχομεν κατὰ τὴν θεμελιώδη ἀρχὴν τοῦ συστήματος τῆς ἀριθμήσεως $N=\alpha+10\beta+10^2\gamma+10^3\delta+10^4\zeta+10^5\eta\ .\ .\ .$ ἰσότης, τὴν ὁποίαν δυνάμεθα νὰ θέσωμεν ὑπὸ τὴν ἀκόλουθον μορφήν.

$$N=\left\{\begin{array}{llll} +(10-1)\beta+ & (10^2-1)\gamma+ & (10^3-1)\delta+ \\ +\alpha \quad +\beta & \quad +\gamma & \quad +\delta \\ (10^4-1)\zeta+\ .\ .\ .\ .\ .\ . & & \\ \quad +\zeta+\ .\ .\ .\ .\ .\ . & & \end{array}\right.$$

[Π. χ. $10^3.\delta=\delta.10^3-\delta+\delta=(10^3-1)\delta+\delta$] ἀλλὰ κατὰ τὰ προειρημένα $10-1$, 10^2-1, 10^3-1 . . . . καὶ ἐν γένει $10^\nu-1$ μὲ τὸ νὰ ἦναι διαιρετὰ διὰ τοῦ 3 ἢ διὰ τοῦ 9, ἡ πρώτη ὁριζόντιος γραμμὴ σύγκειται ἀπὸ σειρὰν ἀριθμῶν πολλαπλασίων τοῦ 3 ἢ τοῦ 9, οὕτω τὸ πρῶτον μέρος τοῦ ἀριθμοῦ N εἶναι καὶ αὐτὸ διαιρετὸν διὰ 3 ἢ διὰ 9· λοιπὸν ἐὰν τὸ δεύτερον μέλος, τὸ ὁποῖον ἄλλο δὲν εἶναι, παρὰ τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τοῦ προβαλλομένου ἀριθμοῦ, θεωρουμένου μὲ τὴν ἀπόλυτόν του τιμὴν, εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ 3 ἢ διὰ τοῦ 9, ὅλος ὁ ἀριθμὸς εἶναι καὶ αὐτὸς διαιρετὸς διὰ τοῦ 3, ἢ διὰ τοῦ 9· Ο· Ε· Δ.

§. 142. Διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ὁποιουδήποτε ἀριθμοῦ διὰ 9, ἀρκεῖ νὰ χάμωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων θεωρουμένων μὲ τὴν ἀπόλυτον τιμήν των, καὶ νὰ τὸ διαιρέσωμεν διὰ τοῦ 9· ἐὰν ἡ τοιαύτη διαίρεσις δὲν δώσῃ ὑπόλοιπον, ὁ δεδομένος ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 9· ἀλλ' ἐὰν εὕρωμεν ὑπόλοιπον, τοῦτο εἶναι τὸ αὐτὸ, ὡς ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἠθέλαμεν δείξει, ἐὰν ἐδιαιρούσαμεν τὸν δεδομένον ἀριθμὸν διὰ τοῦ 9. Τοῦτο εἶναι συνέπεια τῆς συσταθείσης ἀρχῆς εἰς τὸν ἀριθμὸν 139.

§. 143. Ἰδιότης τοῦ ἀριθμοῦ 11. Κάθε ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς διὰ 11, ὅταν ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ψηφίων τῶν περιττῶν τάξεων ἀπὸ τὰ δεξιὰ, καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τῆς ἀρτίας τάξεως ἦναι 0, ἢ πολλαπλάσιον τοῦ 11.

Πρὶν ἀποδείξωμεν ταύτην τὴν ἰδιότητα, εἶναι ἀνάγκη νὰ παρατηρήσωμεν

1ον Ὅτι κάθε δύναμις βαθμοῦ ἀρτίου τοῦ 10 ἐλαττουμένη κατὰ μίαν μονάδα εἶναι διαιρετὴ διὰ τοῦ 11.

Τῷ ὄντι τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο εἶναι σύνθετον ἐκ σειρᾶς τινῶν ψηφίων 9 εἰς ἀριθμὸν ἄρτιον γραμμένων κατ' ἐξακολούθησιν τοῦ ἑνὸς εἰς τὸ ἄλλο· ἕκαστον δὲ τμῆμα ἐκ δύο ψηφίων θεωρούμενον μόνον, σχηματίζει 99 ἢ 9·11, καὶ διὰ τοῦτο εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ 11· λοιπὸν ἡ σχετικὴ τιμὴ ἑκάστου τμήματος, ἥτις εἶναι πολλαπλάσιος τῆς ἀπολύτου τιμῆς, εἶναι καὶ αὐτὴ διαιρετὴ διὰ τοῦ 11· λοιπὸν ἐν γένει $10^{2\nu}-1$ εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ 11 (2ν ἐκφράζει καθὼς ἠξεύρομεν ἀριθμὸν ἄρτιον.)

2ον Κάθε δύναμις βαθμοῦ περιττοῦ τοῦ ἀριθμοῦ 10 δύναται νὰ ἐκφρασθῇ διὰ $10^{2\nu+1}$ (ἀρ 140)· ἀλλ' ἔχομεν καὶ $10^{2\nu+1}=10^{2\nu}\times 10$ (ὅρα ἀρ. 115), καὶ κατ' ἄλλον τρόπον $10^{2\nu+1}=10^{2\nu}\times 10-10+10$ $=(10^{2\nu}-1)\,10+10$· προσθέτοντες 1 καὶ εἰς τὰ δύο μέλη ἐξάγομεν $10^{2\nu+1}+1=(10^{2\nu+1}-1)\ 10+11$· ἀλλὰ $10^{2\nu}-1$ εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ 11 κατὰ τὴν πρώτην πρότασιν, 11 προσέτι εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ ἑαυτοῦ του· λοιπὸν $10^{2\nu+1}+1$ εἶναι διαιρετὸν διὰ 11.

Τούτου θετέντος, ἔστω . . . . ηθζδγβα ὁ προβαλλόμενος ἀριθμὸς, τὸν ὁποῖον καλοῦμεν N, οὕτως ἔχομεν $N=\alpha+10\cdot\ \beta+10^2\cdot\ \gamma+10^3\delta+10^4\zeta+10^5\vartheta+$ . . . . . ἰσότης, τὴν ὁποίαν δυνάμεθα νὰ γράφωμεν ὑπὸ τὴν μορφήν.

$$N=\begin{cases}+(10+1)\ \beta+(10^2+1)\ \gamma+(10^3+1)\ \delta+\\ +\alpha\ -\ \beta\ \qquad +\gamma\ -\ \delta\\ (10^4+1)\zeta+\ .\ .\ .\ .\ .\\ \qquad +\zeta-.\ .\ .\ .\ .\end{cases}$$

Ἤδη κατὰ τὰς ἀνωτέρω δύο παρατηρήσεις ἡ πρώτη γραμμὴ σύγκειται ἀπὸ ἀριθμοὺς οὐσιωδῶς διαιρετοὺς διὰ 11, καὶ ἑπομένως σχηματίζει τὸ πρῶτον μέλος, τὸ ὁποῖον καὶ αὐτὸ εἶναι διαιρετὸν διὰ 11. Λοιπὸν ἐὰν τὸ δεύτερον μέρος, τὸ ὁποῖον ἄλλο δὲν εἶναι, παρὰ ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ ἀθροίσματος $\alpha+\gamma+\zeta+$ . . . . τῶν ψηφίων βαθμοῦ περιττοῦ, καὶ τὸ ἄθροισμα $\beta+\delta+\vartheta+$ . . . . τῶν ψηφίων βαθμοῦ αρτίου, εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ 11, καθὼς ὑπεθέσαμεν, ὅλος ὁ ἀριθμὸς N εἶναι παρομοίως διαιρετὸς διὰ τοῦ 11· Ο. Ε. Δ.

§. 144. Ὅταν ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ψηφίων τάξεως περιττῆς, καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ψηφίων τάξεως ἀρτίας, δὲν ἦναι 0 ἢ πολλαπλάσιον τοῦ 11, ὁ ὅλος ἀριθμὸς δὲν εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 11, ἐπειδὴ ἓν τῶν μερῶν του εἶναι διαιρετὸν καὶ τὸ ἄλλο δὲν εἶναι· ἀλλὰ τότε πρέπει νὰ θεωρήσωμεν δύο περιστάσεις ὡς πρὸς τὸν τρόπον τοῦ λαμβάνειν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως.

1ον. Ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τάξεως περιττῆς εἶναι μεγαλήτερον τοῦ δευτέρου, ἡ διαφορὰ πρέπει νὰ προστεθῆ εἰς τὴν πρώτην ὁριζόντιον γραμμὴν τῆς τιμῆς τοῦ Ν. Σημειόνοντες λοιπὸν ταύτην τὴν πρώτην γραμμὴν διὰ Β, καὶ τὴν διαφορὰν, τὴν ὁποίαν ἔχομεν νὰ προσθέσωμεν, διὰ Γ, θέλομεν ἔχει $N=B+\Gamma$, καὶ ἐὰν Γ δὲν ἦναι διαιρετὸν διὰ 11, τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ Γ διὰ τοῦ 11, θέλει εἶναι, ὡς ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἠθέλαμεν λάβει διαιροῦντες Ν διὰ τοῦ 11 (ἀρ. 139).

2ον. Ἐὰν ἐξ ἐναντίας τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τάξεως ἀρτίας ἦναι μεγαλήτερον ἀπὸ ἐκεῖνο τῶν ψηφίων τάξεως περιττῆς, ἡ διαφορὰ πρέπει νὰ ἀφαιρεθῆ ἀπὸ τὴν πρώτην γραμμὴν, καὶ θέλομεν ἔχει $N=B-\Gamma$, Γ παριστάνοντος πάντοτε τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν τῆς διαφορᾶς.

Διὰ νὰ προσδιορίσωμεν εἰς ταύτην τὴν περίστασιν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ Ν διὰ τοῦ 11, παρατηροῦμεν, ὅτι ἔχομεν $B=11\times K$, Κ ὄντος ἀκεραίου ἀριθμοῦ, καὶ $\Gamma=11\times K'+E$· λοιπὸν
$N=11\times K-11\times K'-E$, ἢ ἀφαιροῦντες καὶ προσθέτοντες 11,
$N=11\times K-11\times K'-11+11-E=11\,(K-K'-1)+11-E$· ὥστε βλέπομεν, ὅτι εἰς ταύτην τὴν περίστασιν τὸ ὑπόλοιον τῆς διαιρέσεως τοῦ Ν διὰ τοῦ 11 εἶναι ἴσον ὄχι μὲ τὸ ὑπόλοιπον Ε τῆς διαιρέσεως τοῦ Γ διὰ τοῦ 11, ἀλλὰ μὲ τὸ ἐξαγόμενον, τὸ ὁποῖον προσδιορίζομεν ἀφαιροῦντες Ε ἀπὸ τὸ 11.

Ἔστω πρὸς ἀκριβῆ κατάληψιν τούτου ὁ ἀριθμὸς 47356708.

Κάμνοντες τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τάξεως περιττῆς, ἀρχίζοντες ἀπὸ τὰ δεξιὰ, εὑρίσκομεν 27· ἐκτελοῦντες προσέτι τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τάξεως ἀρτίας, λαμβάνομεν 13· ἤδη τὸ πρῶτον ἄθροισμα εἶναι μεγαλήτερον τοῦ δευτέρου· λοιπὸν λαμβανομένης τῆς διαφορᾶς 14, τὸ ὑπόλοιπον 3 ταύτης τῆς διαφορᾶς διαιρουμένης διὰ τοῦ 11, εἶναι ἴσον μὲ ἐκεῖνο τῆς διαιρέσεως ὅλου τοῦ ἀριθμοῦ, ὡς δυνάμεθα νὰ βεβαιωθῶμεν, ἐὰν διαιρέσωμεν τὴν τελευταίαν διαίρεσιν, κατὰ τὸν συνειθισμένον τρόπον.

Ὅμως, ἐὰν ὁ ἀριθμὸς ἦτον 370546345, ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τάξεως περιττῆς εἶναι 15, καὶ τῶν ψηφίων τάξεως ἀρτίας εἶναι $22 > 15$, ἕπεται, ὅτι λαμβάνοντες τὴν διαφορὰν μεταξὺ τούτων τῶν δύο ἀθροισμάτων, ἥτις εἶναι 7, τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ ὅλου ἀριθμοῦ διὰ τοῦ 11 δὲν εἶναι 7, ἀλλὰ $11 - 7$ ἢ 4, καθὼς δυνάμεθα νὰ βεβαιωθῶμεν.

§. 145. **Βάσανος διὰ τῶν 9 καὶ 11 τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως.** Ὑπάρχει σύντομός τις καὶ ἁπλῆ βάσανος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως, ὄχι βέβαια ἀξία σιωπῆς· καὶ ἰδοὺ τίνι τρόπῳ ἐκτελεῖται.

Ἀθροίζομεν διαδοχικῶς τὰ ψηφία τοῦ πολλαπλασιαστέου, καὶ διαιροῦμεν τὸ ἄθροισμα διὰ τοῦ 9, καὶ σημειόνομεν τὸ ὑπόλοιπον· παρομοίως ἀθροίζομεν τὰ ψηφία τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, καὶ διαιροῦμεν τὸ ἄθροισμα διὰ τοῦ 9, καὶ σημειόνομεν τὸ ὑπόλοιπον· Μετὰ ταῦτα πολλαπλασιάζομεν τὰ δύο ὑπόλοιπα καὶ διαιροῦμεν τὸ γινόμενόν των διὰ τοῦ 9, καὶ σημειόνομεν τὸ τρίτον ὑπόλοιπον.

Τέλος πάντων διαιροῦμεν τὸ γινόμενον τοῦ πολλαπλασιαστέου καὶ πολλαπλασιαστοῦ διὰ τοῦ 9, καὶ εὑρίσκομεν τέταρτον ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸ τρίτον, ἐὰν ἡ πρᾶξις ἦναι ὀρθή.

Ἂς πολλαπλασιασθοῦν π. χ. οἱ δύο ἀριθμοὶ 5786 καὶ 475.

Ἐκτελεσθέντος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ κατὰ τὴν συνειθισμένην μέθοδον, συναθροίζομεν τὰ ψηφία τοῦ πολλαπλασιαστέου, καὶ ἐκ τοῦ τοιούτου ἀθροίσματος ἀφαιροῦμεν τοσάκις τὸ 9, ὁσάκις εἶναι δυνατὸν νὰ ἀφαιρεθῇ, τουτέστι λέγομεν 5 καὶ 7 κάμνουν 12· ἀπὸ τὸ 12 ἀφαιροῦντες τὸ 9 ἔχομεν 3, 3 καὶ 8 κάμνουν 11, ἀπὸ τὸ 11 ἀφαιροῦντες τὸ 9 ἔχομεν 2· τέλος πάντων 2 καὶ 6 κάμνουν 8, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ πολλαπλασιαστέου διὰ τοῦ 9, καὶ τὸ ὁποῖον γράφομεν κατὰ μέρος.

```
   5786
    475        8|2
 -------       ---
  28930        7|2
 40502
23144
-------
2748350
```

Πράτομεν τὸ αὐτὸ καὶ εἰς τὸν πολλαπλασιαστὴν, καὶ εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 7, τὸ ὁποῖον γράφομεν ὑπὸ τὸ 8, ὡς ἐδῶ φαίνεται.

Πολλαπλασιάζομεν 8 ἐπὶ 7 καὶ ἔχομεν 56, τὸ ὁποῖον διαιροῦμεν διὰ τοῦ 9, καὶ εὑρίσκομεν τρίτον ὑπόλοιπον 2, τὸ ὁποῖον γράφομεν εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ 8. Τέλος πάντων πράττομεν ἐπὶ τοῦ ὅλου γινομένου, ὡς ἐπράξαμεν ἐπὶ τῶν δύο παραγόντων, καὶ ἐξάγομεν ὑπόλοιπον 2, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ἦναι ἴσον μὲ τὸ τρίτον, διὰ νὰ ἦναι ἡ ἐργασία ἀκριβής.

Διὰ νὰ δώσωμεν λόγον τῆς βασάνου διὰ τοῦ 9 μὲ τρόπον γενικὸν, ἂς σημειώσωμεν διὰ Α καὶ Β τοὺς δύο δεδομένους παράγοντας, διὰ Κ καὶ Κ′, Ε καὶ Ε′ τὰ πηλίκα καὶ τὰ ὑπόλοιπα τῆς διαιρέσεως τοῦ πολλαπλασιαστέου καὶ πολλαπλασιαστοῦ διὰ τοῦ 9, ἐντεῦθεν θέλομεν ἔχει τὰς ἀκολούθους ἰσότητας.

$$A=9\cdot K+E$$
$$B=9\cdot K'+E'.$$

Πολλαπλασιάζοντες μέλος ἐπὶ μέλος ταύτας τὰς δύο ἰσότητας θέλομεν εὑρεῖ (ἀρ. 115)

$$AB=9^2\cdot KK'+9K'E+9\cdot KE'+EE'.$$

Ἀλλ' οἱ τρεῖς πρῶτοι ὅροι τοῦ δευτέρου μέλους ταύτης τῆς ἰσότητος εἶναι προφανῶς πολλαπλάσιοι τοῦ 9. Λοιπὸν (ἀρ. 139) τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ γινομένου AB διὰ 9 πρέπει νὰ ἦναι ἴσον μὲ ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον θέλει δώσει τὸ γινόμενον EE', ὅταν διαιρεθῇ διὰ τοῦ 9, Ο, Ε, Δ.

Ἐὰν εἷς τῶν δύο παραγόντων τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἦναι διαιρετὸς διὰ 9, πρέπει νὰ ἀκολουθῇ τὸ αὐτὸ καὶ εἰς τὸ γινόμενον, καὶ τὸ αὐτὸ ἤθελεν ἀκολουθεῖ, ἐὰν τὸ γινόμενον EE' ἦναι πολλαπλάσιον τοῦ 9.

Εἰς δὲ τὴν βάσανον τῆς διαιρέσεως δύνανται νὰ ἀκολουθήσωσι δύο περιστάσεις· ὅταν γένῃ ἡ διαίρεσις, κατὰ τὴν κοινὴν μέθοδον, ἢ δὲν εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον, ἢ εὑρίσκομεν ἕν.

1^ον. Ἐὰν δὲν ὑπάρχῃ ὑπόλοιπον, ὁ διαιρετέος θέλει εἶναι τὸ ἀκριβὲς γινόμενον τοῦ διαιρέτου διὰ τοῦ προσδιορισθέντος πηλίκου, καὶ εἰς ταύτην τὴν περίστασιν ἐφαρμόζομεν τὸν προειρημένον κανόνα, θεωροῦντες τὸν διαιρέτην καὶ τὸ πηλίκον, ὡς δύο παράγοντας ἑνὸς πολλαπλασιασμοῦ, καὶ τὸν διαιρετέον ὡς τὸ γινόμενον.

2^ον. Ἐὰν λάβωμεν ὑπόλοιπον, (καὶ τοῦτο συμβαίνει συχνότερα) ἀφαιροῦμεν αὐτὸ ἀπὸ τὸν ὅλον διαιρετέον, καὶ τότε τὸ ὑπόλοιπον ταύτης τῆς ἀφαιρέσεως εἶναι τὸ ἀκριβὲς γινόμενον τοῦ διαιρέτου διὰ τὸ πηλίκον, καὶ πράττομεν ἐπὶ τῶν τριῶν τούτων τελευταίων ἀριθμῶν, ὡς ἀνωτέρω εἴδομεν.

Σ. Κ. Ὁσάκις μεταχειριζόμεθα τὴν βάσανον διὰ τοῦ 9, καὶ τὸ ὑπόλοιπον τὸ συναγόμενον ἀπὸ τὸ ὅλον γινόμενον, δὲν εἶναι ἴσον μὲ τὸ τρίτον ὑπόλοιπον, συμπεραίνομεν, ὅτι ἡ πρᾶξις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ δὲν ἐκτελέσθη ἀκριβῶς. Ἐὰν ὅμως τὸ ὑπόλοιπον τοῦ γινομένου ἦναι ἴσον μὲ τὸ τρίτον ὑπόλοιπον, δυνατὸν ἡ πρᾶξις νὰ ἦναι ἀκριβὴς, ἀλλὰ δὲν πρέπει ἀποφασιστικῶς νὰ τὴν λάβωμεν ὡς ἀκριβῆ πάντοτε διὰ τὰ ἀκόλουθα δύο αἴτια. Τὸ πρῶτον, ἐπειδὴ δυνατὸν εἶναι νὰ ἐγράψαμεν, εἴτε εἰς τὰ μερικὰ γινόμενα, εἴτε καὶ εἰς τὸ ὅλον γινόμενον μηδενικὰ ἀντὶ 9, καὶ κατὰ τὴν φύσιν τῆς βασάνου δὲν δυνάμεθα νὰ καταλάβωμεν τὸ σφάλμα· τὸ δεύτερον, ἐπειδὴ δύο ψηφία τόσον τῶν μερικῶν γινομένων, ὅσον καὶ τοῦ ὅλου γινομένου, δύναται νὰ ἦναι τὸ ἓν μεγαλήτερον, καὶ τὸ ἄλλο μικρότερον τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ μονάδων, τὸ ὁποῖον κάμνει τὴν ἀνταμοιβὴν εἰς τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τοῦ γινομένου, καὶ οὕτω δὲν καταλαμβάνομεν ἀκόμη τὸ σφάλμα.

Ἡ βάσανος αὕτη, μ' ὅλον ὅτι εἶναι πολλὰ εὔκολος εἰς τὰς πράξεις, δὲν εἶναι ἀκριβὴς, καὶ διὰ τοῦτο πρέπει νὰ τὴν θεωρῶμεν ὡς ἡμιβάσανον, μεταχειριζόμενοι αὐτὴν μόνον εἰς κατεπειγούσας περιστάσεις.

Ἡ βάσανος διὰ τοῦ 11, ἡ ὁποία δὲν διαφέρει ἐκείνης τοῦ 9, εἰμὴ εἰς τὸν τρόπον τοῦ προσδιορίζειν τὸ ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως ἑνὸς ἀριθμοῦ διὰ τοῦ 11 (ὅρα ἀρ. 144), εἶναι προτιμητέα, ἀγκαλὰ καὶ αὐτὴ εἶναι ὑποκειμένη εἴς τινα σφάλματα, ἀλλὰ τὰ σφάλματα ταῦτα συμβαίνουν σπανίως. Ἐπομένως τοιαῦται βάσανοι ἐφαρμόζονται παρομοίως εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν καὶ εἰς τὴν διαίρεσιν τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων, ἐπειδὴ αἱ πράξεις εἰς αὐτὰ ἐκτελοῦνται, ὡς ἐκεῖναι τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν.

§. 146. Ὑπάρχουν προσέτι χαρακτηριστικὰ τινὲ, διὰ μέσου τῶν ὁποίων γνωρίζομεν, ὅτι εἷς ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς διὰ τῶν πρώτων ἀριθμῶν 7, 13, 17.

Ἀλλ' ἡ μέθοδος, τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ ἀκολουθήσωμεν εἶναι, μακρὰ καὶ ἐπίπονος, καὶ εἶναι συντομώτερον νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν πρᾶξιν τῆς διαιρέσεως διὰ 7, 13. . . .

Τὰ δι' ἁπλῆν περιέργειαν ζητήματα ταῦτα ἀπαιτοῦν προσέτι περισσοτέρας ἀλγεβραϊκὰς ἀρχὰς, ἀφ' ὅσας ἕως τοῦ νῦν ἐξηγήσαμεν.

Συμβουλεύομεν δὲ τοὺς ἀρχαρίους νὰ γυμνασθῶσιν ἐπὶ τοῦ ἀκολούθου ζητήματος. Ποῖοι εἶναι εἰς ἕντι σύστημα ἀριθμήσεως, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι β, οἱ δύο ἀριθμοὶ, οἵτινες εἶναι δεκτικοὶ ἀναλόγων ἰδιοτήτων μὲ ἐκείνους τοῦ 9 καὶ 11 ἢ ἐννέα καὶ ἕνδεκα τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος, καὶ νὰ ἀποδείξωσι ταύτας τὰς ἰδιότητας. Θέλουσι δὲ φθάσει εὐκόλως κατὰ ταύτην τὴν ἀρχὴν, ὅτι εἰς κάθε σύστημα ἀριθμήσεως πᾶσα δύναμις τῆς βάσεως δύναται νὰ ἐκφρασθῇ διὰ τῆς μονάδος ἀκολουθημένης ἀπὸ τόσα μηδενικὰ, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ βαθμὸς τῆς δυνάμεως, τουτέστι διὰ 10^{ν}, ὄντος ν τοῦ βαθμοῦ τῆς δυνάμεως.

§. 147. Τὰ δὲ χαρακτηριστικὰ τῆς διαιρετότητος ἑνὸς ἀριθμοῦ διὰ τῶν πολλαπλασίων 6, 12, 15, 18, 36, 45 τῶν πρώτων ἀριθμῶν 2, 3, 5, ὄντα ἁπλούστατα, ἠμποροῦν νὰ τεθῶσιν ἐδῶ.

1ον. Εἷς ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 6 ἢ 18, ὅταν, τοῦ ἀριθμοῦ ὄντος ἀρτίου, τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του θεωρουμένων κατὰ τὰς ἀπολύτους τιμάς των, ἦναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 3 ἢ τοῦ 9. Ἐπειδὴ οὕτος ὁ ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς τότε διὰ τοῦ 2 καὶ διὰ τοῦ 3 ἢ 9· ἀλλὰ 2 καὶ 3 ἢ 2 καὶ 9 εἶναι πρῶτοι ἀναμεταξύτων. Λοιπὸν (ἀρ. 137) ὁ ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 6 ἢ διὰ τοῦ 18.

2ον. Εἷς ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 12 ἢ διὰ τοῦ 36, ὅταν τὰ δύο τελευταῖα ψηφία του, θεωρούμενα κατὰ τὴν σχετικήν των τιμὴν, σχηματίζωσιν ἀριθμὸν πολλαπλάσιον τοῦ 4, καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του προσέτι διαιρεῖται διὰ τοῦ 3 ἢ διὰ τοῦ 9, ἐπειδὴ τότε ὁ ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 4 καὶ διὰ τοῦ 3 ἢ 9, λοιπὸν εἶναι διαιρετὸς διὰ 4×3, ἢ 4×9, τουτέστι διὰ 12 ἢ 36.

3ον. Τέλος πάντων εἷς ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 15 ἢ 45, ὅταν, τοῦ τελευταίου ψηφίου ὄντος 0 ἢ 5, τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων ἦναι διαρετὸν διὰ τοῦ 3 ἢ διὰ τοῦ 9· ἐπειδὴ τότε ὁ ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 5 καὶ διὰ τοῦ 3 ἢ 9, λοιπὸν καὶ διὰ τοῦ 15 ἢ 45.

Ἂς ἔλθωμεν τώρα εἰς τὴν ἔρευναν ὅλων τῶν διαιρετῶν ἑνὸς ἀριθμοῦ τόσον τῶν ἁπλῶν, ὡσὰν καὶ τῶν συνθέτων. Τὴν πρότασιν δὲ ταύτην, ὡς μάλιστα ἀξιολογωτάτην, θέλομεν ἐκθέσει ἀκριβῶς καὶ γενικῶς.

§. 148. Ἔστω Ν ὁ ἀριθμὸς, τοῦ ὁποίου ζητοῦμεν νὰ γνωρίσωμεν ὅλους τοὺς διαιρέτας τόσον ἁπλοῦς, ὅσον καὶ συνθέτους.

Σημειόνομεν διὰ α τὸν μικρότερον πρῶτον ἀριθμὸν, ἀρχίζοντες ἀπὸ τὸν 2, ὅστις διαιρεῖ τὸ Ν, καὶ ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν τοῦ Ν διὰ α τόσαις φοραῖς διαδοχικῶς, ὅσον εἶναι δυνατόν. Ἔστω ν ὁ ἀριθμὸς τῶν φορῶν, κατὰ τὰς ὁποίας ἡ διαίρεσις ἐκτελέσθη, εἰς τρόπον, ὥστε ἔχομεν

$N = \alpha^{\nu} + N'$, N' μὴ περιέχοντος πλέον τὸν παράγοντα α. Ἐπειδὴ πᾶς πρῶτος ἀριθμὸς διαφορετικὸς τοῦ α διαρῶν N, πρέπει (ἀρ. 133) νὰ διαιρῇ N′, ἕπεται, ὅτι ἡ ἀναζήτησις τῶν πρώτων παραγόντων τοῦ N, διαφορετικῶν τοῦ α, ἄγεται εἰς ἐκείνην τῶν πρώτων παραγόντων τοῦ N′, ἀριθμοῦ ἁπλουστέρου παρὰ N.

Ἂς σημειώσωμεν πάλιν διὰ β τὸν ἁπλούστερον πρῶτον ἀριθμὸν, ὅστις διαιρεῖ τὸ N′, καὶ διὰ τοῦ ν′ τὸν ἀριθμὸν τῶν φορῶν, καθ᾽ ἃς ὁ τοιοῦτος παράγων εἰς τὸ N′ εἰσέρχεται· οὕτως ἔχομεν $N'=\beta^{\nu'}\times N''$, καὶ οὕτως ἐξάγομεν $N=\alpha^{\nu}\,\beta^{\nu'}\times N''$, N'' μὴ περιέχοντος πλέον τοὺς ἁπλοῦς παράγοντας α καὶ β.

Ἂς σημειώσωμεν ἔτι διὰ γ τὸν μικρότερον ἀριθμὸν, ὅστις διαιρεῖ τὸ N″, καὶ διὰ ν″ τὸν ἀριθμὸν τῶνφορῶν, καθ᾽ ἃς ὁ τοιοῦτος παράγων εἰσέρχεται, καὶεὑρίσκομεν

$N''=\gamma^{\nu''}\times N'''$, καὶ ἐπομένως $N=\alpha^{\nu}\,\beta^{\nu'}\,\gamma^{\nu''}\times N'''$.

Καὶ ἀκολουθοῦντες ταύτην τὴν σειρὰν τῶν πράξεων, θέλομεν εὑρεῖ πηλίκον, τὸ ὁποῖον θέλει εἶναι πρῶτος ἀριθμὸς, ἢ μία τις δύναμις πρώτου ἀριθμοῦ, καὶ τότε διαιροῦντες διὰ τούτου τόσαις φοραῖς, ὅσαις ἠμπορέσωμεν, θέλομεν εὑρεῖ τέλος πάντων πηλίκον ἴσον μὲ τὴν μονάδα.

Ἂς ὑποθέσωμεν πρὸς ἀκριβῆ τούτου κατάληψιν, ὅτι N''' εἶναι ἴσον μὲ $\delta^{\nu'''}$, δ ὄντος ἀριθμοῦ πρώτου, τότε θέλομεν ἔχει, $N=\alpha^{\nu}\,\beta^{\nu'}\,\gamma^{\nu''}\,\delta^{\nu'''}$, τῶν γραμμάτων α, β, γ, δ ἐκφραζόντων (ἀρ. 136) μόνον τοὺς πρώτους παράγοντας, τοὺς ὁποίους δύναται νὰ περιέχῃ τὸ N.

Ὁ Ἀριθμὸς N λέγεται τότε, ὅτι ἀνελύθη εἰς τοὺς ἁπλοῦς του παράγοντας.

Ἐὰν μετὰ ταῦτα θέλωμεν νὰ σχηματίσωμεν ὅλους τοὺς συνθέτους διαιρέτας, πρέπει (κατὰ τὸν ἀρ. 138) νὰ προσδιορίσωμεν ὅλα τὰ γινόμενα πολλαπλασιάζοντες ἀνὰ δύο, ἀνὰ τρεῖς τὰς δυνάμεις τῶν πρώτων παραγόντων, τὰς περιεχομένας μεταξὺ τῆς πρώτης καὶ τῆς δυνάμεως ν, διὰ α τῆς ν′, διὰ β τῆς ν″, διὰ γ . . . . . .

Διὰ νὰ ἔχωμεν τὴν βεβαιότητα, ὅτι ἐσχηματίσαμεν ὅλους τοὺς διαιρέτας, εἶναι πρέπον νὰ ἐξακολουθήσωμεν μίαν τινὰ τάξιν, καὶ ἰδοὺ τίνι τρόπῳ διατάττομεν τὴν πρᾶξιν.

Προκείσθω νὰ εὕρωμεν ὅλους τοὺς διαιρέτας τοῦ ἀριθμοῦ 5880.

5880	1.
2940	2.
1470	2. 4
735	2. 8
245	3. 6 . 12 . 24
49	5. 10 . 20 . 40 . | 15 . 30 . 60 . 120.
7	7 . 14 . 28 . 56 . | 21 . 42 . 84 . 168 | 35 . 70 . 140 . 280 | 105 . 210 . 420 . 840.
1	7 . 49 . 98 . 196 . 392 | 147 . 294 . 588 . 1176 | 245 . 490 . 980 . 1960.
	735 | 1470 . 2940 . 5880.

Ἀφ' οὗ γράψωμεν 1, τὸ ὁποῖον εἶναι ὁ διαιρέτης ὅλων τῶν ἀριθμῶν εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ 5880, τοὺς χωρίζομεν διὰ καθέτου γραμμῆς, καὶ ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν διὰ 2, τὸ ὁποῖον γράφομεν ὑπὸ τὸν διαιρέτην 1, καὶ λαμβάνομεν πηλίκον 2940, τὸ ὁποῖον θέτομεν ὑπὸ τῶν 5880· καὶ ἐπειδὴ 2940 εἶναι ἀκόμη διαιρετὸν διὰ 2, γράφομεν ἐκ νέου τοῦτον τὸν διαιρέτην 2 ὑπὸ τὸν πρῶτον, καὶ τὸ νέον πηλίκον 1470 ὑπὸ τὸ προηγούμενον· ἐπειδὴ τὸ πηλίκον τοῦτο εἶναι ἀκόμη διαιρετὸν διὰ τοῦ 2, θέτομεν τοῦτον τὸν νέον διαιρέτην ὑπὸ τὸν πρὸ ἑαυτοῦ, καὶ τὸ νέον πηλίκον 735 ὑπὸ τὸ 1470. Λοιπὸν δυνάμεθα νὰ συμπεράνωμεν, ὅτι $5880 = 2^3 \cdot 735$.

Τὸ πηλίκον 735 δὲν εἶναι πλέον διαιρετὸν διὰ τοῦ 2, ἀλλὰ διὰ τοῦ 3, τὸ ὁποῖον γράφομεν ὑπὸ τὸν τελευταῖον διαιρέτην· μετὰ ταῦτα θέτομεν τὸ πηλίκον 245 ὑπὸ τὸ ἀνωτέρω. Λοιπὸν $5880 = 2^3 \cdot 3 \cdot 245$. Τὸ 245 δὲν διαιρεῖται πλέον διὰ τοῦ 3, ἀλλὰ διὰ τοῦ 5, τὸ ὁποῖον γράφομεν ὑπὸ τὸν διαιρέτην 3, καὶ τὸ πηλίκον εἶναι 49, τὸ ὁποῖον δὲν διαιρεῖται πλέον διὰ τοῦ 5. Λοιπὸν $5880 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 49$.

Τὸ 49 εἶναι διαιρετὸν διὰ 7, τὸ ὁποῖον γράφομεν ὑπὸ τὸν διαιρέτην 5, καὶ δίδει πηλίκον 7, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀκόμη διαιρετὸν διὰ τοῦ ἑαυτοῦ του. Γράφομεν λοιπὸν ἐκ νέου τὸν διαιρέτην 7 ὑπὸ τὸν προηγούμενον, καὶ εὑρίσκομεν τελευταῖον πηλίκον 1. Λοιπὸν $5880 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2$.

Οὕτως ἀναλύεται λοιπὸν ὁ ἀριθμὸς εἰς τοὺς ἁπλοῦς του παράγοντας.

Διὰ νὰ λάβωμεν τοὺς συνθέτους διαιρέτας ἐπιστρέφομεν εἰς τὸν δεύτερον διαιρέτην 2, τὸν ὁποῖον πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸν πρὸ αὐτοῦ καὶ ἔχομεν 4, τὸ ὁποῖον θέτομεν εἰς τὸ πλευρὸν τοῦ δευτέρου διαιρέτου. Ἀπερνῶντες εἰς τὸν τρίτον διαιρέτην 2, τὸν πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 4 καὶ ἔχομεν 8 νέον διαιρέτην, ἐπειδὴ 8 εἶναι ἴσον μὲ 2^3. Περνῶμεν μετὰ ταῦτα εἰς τὸν διαιρέτην 3, ἐπὶ τὸν ὁποῖον πολλαπλασιάζομεν ὅλους τοὺς διαιρέτας 2, 4, 8, καὶ συνάγομεν τοὺς νέους διαιρέτας 6, 12, 24· διότι οὗτοι παῤῥησιάζουν 2×3, $2^2\times3$, $2^3\times3$. Περνῶμεν μετὰ ταῦτα εἰς τὸν διαιρέτην 5, καὶ πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 5 τοὺς ἀριθμοὺς 2, 4, 8, 3, 6, 12, 24. Ἡ τοιαύτη πρᾶξις μᾶς δίδει νέους διαρέτας, τοὺς ὁποίους θέτομεν εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ 5.

Ἐν ἑνὶ λόγῳ δι᾽ ἕκαστον ἁπλοῦν παράγοντα προσδιορισμένον εἰς τὴν πρώτην σειρὰν τῶν ἐργασιῶν, πολλαπλιάζομεν ὅλους τοὺς διαιρέτας τοὺς πρὸ αὐτοῦ ἐπὶ τὸν παράγοντα τοῦτον, προσέχοντες νὰ μὴν ἐπαναλάβωμεν τὸ αὐτὸ γινόμενον.

Οὕτω περνῶντες εἰς τὸν δεύτερον διαιρέτην 7, πολλαπλασιάζομεν μόνον ἐπὶ τοῦτον τὸν διαιρέτην ὅλους τοὺς διαιρέτας, οἵτινες εὑρίσκονται εἰς τὴν ἰδίαν γραμμὴν εἰς τὴν ὁποίαν εἶναι καὶ ὁ πρῶτος διαρέτης 7, καὶ συνάγομεν 49, 98, 196.

Ἡ ὁδὸς εἶναι ἀπολύτως ἡ αὐτὴ εἰς κάθε ἄλλο παράδειγμα. Ἐνταῦθα προτείνομεν διὰ γύμνασιν νὰ εὕρωμεν ὅλους τοὺς διαιρέτας τῶν ἀριθμῶν 1764, 1665. 5670, 50527, τοὺς ὁποίους εὑρίσκομεν ἴσους μὲ $2^2.3^2.7^2.$ | $3^2.5.37.$ | $2.3^4.5.7.$ | $7^3.89.$ |

§. 149. Ἐπειδὴ εἶναι ἀναγκαιότατον νὰ μὴν παραιτήσωμεν οὔτε ἕνα τῶν διαιρετῶν, διὰ τοῦτο κάμνομεν γνωστὸν κανόνα τινὰ, διὰ τοῦ ὁποίου βεβαιονόμεθα, ἐὰν ἐπροσδιορίσθησαν ὅλοι οἱ διαιρέται ἑνὸς ἀριθμοῦ.

Πρὸς τοῦτο, ἂς ἐπαναλάβωμεν τὴν ἔκφρασιν $N=\alpha^{\nu}\beta^{\nu'}\gamma^{\nu''}\delta^{\nu'''}$· Εἶναι φανερὸν, ὅτι θέλομεν λάβει ὅλους τοὺς διαιρέτας τοῦ N, εἰς αὐτοὺς δὲ καὶ τὴν μονάδα, πολλαπλασιάζοντες ὅλους τοὺς ὅρους τῆς σειρᾶς . . . . . . $1, \alpha', \alpha^2, \alpha^3, \alpha 4 \ldots \alpha^{\nu}$
ἐπὶ ὅλους τοὺς ὅρους ταύτης $1, \beta', \beta^2, \beta^3, \beta 4 \ldots \beta^{\nu'}$