μένους, ἢ ἐκφραζομένους εἰς ὁποιονδήποτε σύστημα ἀριθμήσεως.

§. β΄. Ἀρχαὶ περὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς Διαιρέσεως.

Διαιρετότης τῶν ἀριθμῶν.

§. 127. Ἀπεδείξαμεν ἤδη εἰς τὸν ἀριθμὸν 25 καὶ 26 1ον ὅτι τὸ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμὸν ἐπὶ γινόμενον δύο ἢ περισσοτέρων παραγόντων, εἶναι τὸ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν τοῦτον ἐφ' ἕκαστον τῶν παραγόντων διαδοχικῶς.

2ον Ὅτι τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν εἶναι τὸ αὐτὸ, εἰς ὁποίαν τάξιν ἐκτελεσθῇ ὁ πολλαπλασιασμός.

Μ' ὅλον ὅτι οἱ συλλογισμοὶ ἐσαφηνίσθησαν διὰ μερικῶν ἀριθμῶν, εἶναι ὅμως ἐπίσης γενικοὶ, καὶ διὰ νὰ τοὺς βεβαιωθῶμεν, ἀρκεῖ νὰ τοὺς ἐπαναλάβωμεν, γράφοντές τους διὰ τῶν γραμμάτων α, β, γ, δ . . .

Πρόκειται λοιπὸν μόνον νὰ βεβαιώσωμεν τὴν ἀκρίβειαν τῆς δευτέρας προτάσεως, ὁποῖος καὶ ἂν ἦναι ὁ ἀριθμὸς τῶν παραγόντων, τοὺς ὁποίους μέλλομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν μεταξύ των.

Κατ' ἀρχὰς ἂς παρατηρήσωμεν, ὅτι ἐὰν εἴχαμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμόν τινὰ Ν ἐπὶ β, καὶ νὰ πολλαπλασιάσωμεν μετὰ ταῦτα τὸ ἐξαγόμενον γινόμενον ἐπὶ γ, ἔπρεπε παρομοίως νὰ πολλαπλασιάσωμεν κατὰ πρῶτον τὸ Ν ἐπὶ γ, καὶ μετὰ ταῦτα τὸ ἐξαγόμενον γινόμενον ἐπὶ β.

Ἢ κατ' ἄλλον τρόπον, εἰς ἕνα πολλαπλασιασμὸν περισσοτέρων ἀπὸ δύο παράγοντας, δυνάμεθα νὰ ἀλλάξωμεν τὴν τάξιν τῶν δύο τελευταίων πολλαπλασιασμῶν, χωρὶς νὰ ἀλλάξωμεν τὸ γινόμενον.

Ἢ διὰ νὰ ὁμιλήσωμεν ἀλγεβραϊκῶς $N\times\beta\times\gamma = N\times\gamma\times\beta$. Τῷ ὄντι προκύπτει ἐκ τῆς προειρημένης πρώτης ἀρχῆς, ὅτι $N\times\beta\times\gamma = N\times\beta\gamma$ (τὸ $\beta\gamma$ ἐκφράζει τὸ ἐκτελούμενον γινόμενον δύο ἀριθμῶν β καὶ γ, (ὅρα. Σ. Κ. τοῦ ἀρ. 111). ἀλλὰ κατὰ τὴν δευτέραν ἀρχὴν, ἔχομεν $\beta\gamma=\gamma\beta$, λοιπὸν $N\times\beta\times\gamma = N\times\gamma\beta$, ἢ κατὰ τὴν πρώτην ἀρχὴν $N\times\beta\times\gamma = N\times\gamma\times\beta$, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἐκ τῆς παρεμπεσούσης ταύτης προτάσεως, καὶ ἐκ τῆς προτάσεως, ὅτι τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν εἶναι τὸ αὐτὸ εἰς ὁποιανδήποτε τάξιν, καὶ ἐφεξῆς . . . . . μὲ εὐκολίαν ἐξάγομεν τὴν ἰδίαν πρότασιν καὶ διὰ τρεῖς.

Ἔστωσαν α, β, γ οἱ προβαλλόμενοι ἀριθμοί.

Λέγω, ὅτι ἔχομεν $\alpha\beta\gamma = \beta\alpha\gamma = \beta\gamma\alpha = \gamma\beta\alpha = \gamma\alpha\beta$ $\alpha\gamma\beta$.

Τῷ ὄντι τὸ δεύτερον γινόμενον εἶναι ἴσον μὲ τὸ πρῶτον, κατὰ τὴν διὰ δύο παράγοντας πρότασιν· τὸ τρίτον εἶναι ἴσον μὲ τὸ δεύτερον, κατὰ τὴν παρεμπεσοῦσαν πρότασιν· τὸ τέταρτον ἴσον μὲ τὸ τρίτον κατὰ τὴν διὰ δύο παράγοντας πρότασιν· τὸ πέμπτον εἶναι ἴσον μὲ τὸ τέταρτον, κατὰ τὴν παρεμπεσοῦσαν πρότασιν. Τέλος πάντων τὸ ἕκτον εἶναι ἴσον μὲ τὸ πέμπτον· κατὰ τὴν πρότασιν δύο παραγόντων. Λοιπὸν ὅλα ταῦτα τὰ γινόμενα εἶναι ἴσα.

Ἐκ τῆς παρεμπεσούσης προτάσεως, καὶ ἐκ τῆς προτάσεως διὰ τρεῖς παράγοντας, ἐξάγομεν μὲ τὴν ἰδίαν εὐκολίαν τὴν πρότασιν διὰ τέσσαρας.

Ἔστωσαν α, β, γ, δ οἱ προβαλλόμενοι ἀριθμοί,

Λέγω, ὅτι ἔχομεν $\alpha\beta\gamma\delta = \beta\alpha\delta\gamma = \beta\gamma\alpha\delta = \gamma\beta\alpha\delta = \gamma\alpha\beta\delta = \alpha\gamma\beta\delta$

$$= \alpha\beta\delta\gamma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$= \beta\gamma\delta\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$= \gamma\alpha\delta\beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Κατὰ πρῶτον τὰ ἓξ γινόμενα τῆς πρώτης ὁριζοντίου γραμμῆς εἶναι ἴσα μεταξύ των, κατὰ τὴν πρότασιν διὰ τρεῖς παράγοντας, διότι προκύπτουν ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν γινομένων αβγ, βαγ . . . . . διὰ τοῦ ἰδίου παράγοντος δ.

Τὸ πρῶτον γινόμενον τῆς δευτέρας γραμμῆς εἶναι ἴσον μὲ τὸ πρῶτον γινόμενον τῆς πρώτης, κατὰ τὴν παρεμπεσοῦσαν πρότασιν· τὰ δὲ ἄλλα γινόμενα ταύτης τῆς γραμμῆς, τὰ ὁποῖα δὲν ἐγράψαμεν, σχηματίζονται, φυλαττομένου πάντοτε τοῦ γράμματος γ, εἰς τὴν τελευταίαν θέσιν, καὶ εἶναι ὅλα ἴσα, κατὰ τὴν διὰ τρεῖς παράγοντας πρότασιν.

Τὸ πρῶτον γινόμενον τῆς τρίτης γραμμῆς εἶναι ἴσον μὲ τὸ τρίτον γινόμενον τῆς πρώτης, κατὰ τὴν παρεμπεσοῦσαν πρότασιν, καὶ τὰ ἄλλα γινόμενα ταύτης τῆς γραμμῆς εἶναι ἴσα μ' ἐκεῖνα, κατὰ τὴν διὰ τρεῖς παράγοντας πρότασιν.

Τέλος πάντων τὸ πρῶτον γινόμενον τῆς τετάρτης γραμμῆς εἶναι ἴσον μὲ τὸ πέμπτον γινόμενον τῆς πρώτης, κατὰ τὴν παρεμπεσοῦσαν πρότασιν, καὶ ὅλα τὰ γινόμενα ταύτης τῆς γραμμῆς εἶναι ἴσα, κατὰ τὴν διὰ τρεῖς παράγοντας πρότασιν. Οὕτως συνάγομεν ὅλα τὰ γινόμνα τῶν τεσσάρων παραγόντων α, β, γ, δ, ἐπειδὴ δὲν δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν ἄλλα, παρὰ ἓξ γινόμενα τελευτῶντα εἰς τὸ αὐτὸ γράμμα. Ὁ ἀριθμὸς τῶν γινομένων ἀνὰ τέσσαρα εἶναι ἴσος μὲ 4 φοραῖς 6 ἢ 24 *).

Σ. Κ. Μὲ εὐκολίαν γνωρίζομεν, ὅτι τὰ δύο πρῶτα γινόμενα ἑκάστης τῶν τριῶν τελευταίων γραμ-

---

*) Σχηματίζονται μὲ τέσσαρα ψηφία μόνον ἓξ γινόμενα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι τελευταῖον παράγοντα τὸ τέταρτον ψηφίον, ἐπειδὴ ἀμελουμένου τοῦ τετάρτου παράγοντος, οἱ τρεῖς πρῶτοι παράγοντες δίδουν ἓξ γινόμενα, καὶ προσθέτοντες τὸν τέταρτον παράγοντα εἰς τὸ τέλος ἑκάστου γινομένου, συνάγομεν πάλιν ἓξ γινόμενα ἀπὸ τέσσαρας παράγοντας ἕκαστον. Ὁ Μεταφραστής.

μῶν λαμβάνονται, ἀφ' οὗ θεωρηθῶσι τὰ γινόμενα τῆς πρώτης γραμμῆς, εἰς τὰ ὁποῖα τὸ παραλῆγον γινόμενον εἶναι διαφορετικὸν, ἐπειδὴ τότε ἀπερνοῦμεν τὸν παράγοντα εἰς τὴν τελευταίαν θέσιν, κατὰ τὴν παρεμπεσοῦσαν πρότασιν.

Μ' ὅλον ὅτι ἡ τοιαύτη ἀπόδειξις δύναται νὰ ἐκτανθῇ εἰς ὁποιονδήποτε ἀριθμὸν παραγόντων· εἶναι ὅμως ὠφέλιμον νὰ ἐξάξωμεν τὴν γενικότητάτης.

Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι τὸ γινόμενον ἑνὸς ὁποιουδήποτε ἀριθμοῦ παραγόντων μένει τὸ αὐτὸ, εἰς ὁποιανδήποτε τάξιν ἐκτελεσθῇ ὁ πολλαπλασιασμός· θέλομεν δείξει, ὅτι ἐὰν ἡ ἀρχὴ ἦναι ἀληθὴς δι' ἕνα ἀριθμὸν μ παραγόντων, θέλει εἶναι παρομοίως ἀληθὴς διὰ τὸν ἀριθμὸν $\mu+1$. Ἡ ἀρχὴ θέλει ἀποδειχθῇ παρομοίως, ἐπειδὴ μετὰ τὴν ἀλήθευσίν της διὰ δύο παράγοντας, θέλει ἀληθεύσει καὶ διὰ τρεῖς, καὶ ἐὰν ἀληθεύσῃ διὰ τρεῖς, θέλει ἀληθεύσει καὶ διὰ τέσσαρας κ. τ. λ.

Ἔστω λοιπὸν ἀριθμός τις $\mu+1$ παραγόντων α, β, γ, δ . . . . $\varkappa$, ρ, σ· καὶ ἐπειδὴ ἡ ἀρχὴ ὑπετέθη ἀληθὴς διὰ ἕνα ἀριθμὸν μ παραγόντων, δυνάμεθα νὰ ἀλλάξωμεν καθ' ὅλους τοὺς τρόπους τὴν τάξιν τῶν μ πρώτων παραγόντων α, β, γ, δ . . . $\varkappa$, ρ, πολλαπλασιάζοντες ὅλα τὰ οὕτω ληφθέντα ἴσα γινόμενα ἐπὶ τοῦ σ, καὶ οὕτως σχηματίζομεν ὅλα τὰ γινόμενα τῶν $\mu+1$ παραγόντων, τελευτώντων, εἰς τὸν παράγοντα σ. Ταῦτα δὲ τὰ τελευταῖα γινόμενα θέλουν εἶναι ἐπίσης ἴσα· ἀλλ' ἔχομεν ἐκ τῆς παρεμπεσούσης προτάσεως,

$$\alpha\beta\gamma\delta \ldots\ldots \varkappa\rho\sigma = \alpha\beta\gamma\delta \ldots\ldots \varkappa\sigma\rho\cdot$$

καὶ ἀλλάττοντες κατὰ πάντα τρόπον τοὺς μ πρώτους παράγοντας τοῦ δευτέρου ἀριθμοῦ ταύτης τῆς ἰσότητος, ἔπειτα πολλαπλασιάζοντες τὸ γινόμενον ἐπὶ ρ, λαμβάνομεν νέαν σειρὰν γινομένων ὅλων ἴσων μεταξύ των καὶ μὲ τὰ προηγούμενα, εἰς τὰ ὁποῖα ὁ παράγων ρ, ἐπέχει τὴν τελευταίαν θέσιν, θέλομεν ἔχει ἀκόμη,

αβγδ . . . κρσ = αβγδ . . . ρκσ = αβγδ . . . ρσκ· καὶ δυνάμεθα ἐκ τούτου τοῦ τελευταίου γινομένου νὰ ἐξάξωμεν ὅλα τὰ ἴσα γινόμενα, εἰς τὰ ὁποῖα ὁ παράγων κ ἐπέχει τὴν τελευταίαν θέσιν.

Ἐν ἑνὶ λόγῳ, ἐπειδὴ δυνάμεθα νὰ περάσωμεν οὕτως ἕκαστον τῶν μ+1 παραγόντων κατὰ διαδοχὴν εἰς τὴν προτελευταίαν θέσιν, καὶ μετὰ ταῦτα εἰς τὴν τελευταίαν, καὶ νὰ μεταλλάξωμεν καθ' ὅλους τοὺς τρόπους τοὺς μ+1 πρώτους παράγοντας, ἕπεται, ὅτι τὰ γινόμενα τῶν μ+1 παραγόντων πολλαπλασιαζομένων μεταξύ των εἰς ὁποιανδήποτε τάξιν, εἶναι ὅλα ἴσα μεταξύ των, λοιπὸν κ. τ. λ.

§. 128. Σ. Κ. Οὗτος ὁ τρόπος τοῦ ἀποδεικνύειν μίαν πρότασιν, βεβαιωθεῖσαν πρότερον εἰς μερικὰς περιστάσεις, εἶναι πολὺ εὔχρηστος εἰς τὰ διάφορα μέρη τῆς μαθηματικῆς. Μ' ὅλον τοῦτο πρέπει νὰ τὸν μεταχειριζώμεθα, ἀφ' οὗ οἱ προηγούμενοι συλλογισμοὶ μᾶς ἔπεισαν σχεδὸν διὰ τὴν γενικότητα τῆς προτάσεως.

Τὸ ἄθροισμα τῶν συλλογισμῶν, οἱ ὁποῖοι γίνονται εἰς μερικὰς περιστάσεις καλεῖται μέθοδος δείξεως ἐξ ἀναλογίας, ἢ ἐξ ἐπαγωγῆς· εἶναι δὲ πλήρης, ὅταν ἀκολουθῆται ἀπὸ ὁμοίαν τῇ προτεθείσῃ ἀπόδειξιν. Πρέπει προσέτι οἱ συλλογισμοὶ ταύτης νὰ πλησιάζωσι κατὰ τὴν μορφὴν τοὺς εἰς μερικὰς περιστάσεις ἀναπτυχθέντας συλλογισμούς.

§. 129. Ἡ ἀπόδειξις τῆς προειρημένης ἀρχῆς ὑποθέτει, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ, ἐπὶ τῶν ὁποίων συλλογιζόμεθα, εἶναι ἀκέραιοι (ἀρ. 21 καὶ 26)· ἀλλ' ἐὰν σκεφθῶμεν ὀλίγον ἐπάνω εἰς τοὺς συσταθέντας κανόνας διὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν κλασμάτων, θέλομεν καταλάβει, ὅτι ἡ ἰδιότης αὕτη ἐφαρμόζεται ἐπίσης καὶ εἰς κλασματικοὺς ἀριθμούς.

Προσέτι αὕτη ἡ πρότασις πληροῖ τὴν ἀπόδειξιν συσταθείσης ἀρχῆς (ἀρ. 43) περὶ τῆς ἀναγωγῆς τῶν κλασμάτων εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν.

Διαιρετότης τῶν ἀριθμῶν.

§. 130. Ἡ ἰδιότης τινῶν ἀριθμῶν νὰ διαιρῶνται ἐντελῶς δι' ἄλλων καὶ ἡ ἀναζήτησις τῶν διαιρετῶν ἑνὸς ἀριθμοῦ, σχηματίζουσι μίαν ἀπὸ τὰς πλέον ἀξιολόγους θεωρίας τῆς ἀριθμητικῆς.

Αὕτη δὲ ἐπιστηρίζεται ἐπὶ μιᾶς σειρᾶς ἀρχῶν, τῶν ὁποίων ἡ ἔκθεσις ἀπαιτεῖ μεγάλην τάξιν, θέλομεν δὲ τὰς ἀναπτύξει διαδοχικῶς.

Προοιμιώδεις ὁρισμοί. Λέγομεν, ὅτι ἀκέραιός τις ἀριθμὸς εἶναι ἀκριβῶς δι' ἄλλου διαιρετὸς, ὅταν ὑπάρχῃ τρίτος ἄλλος ἀκέραιος ἀριθμὸς, ὅς τις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν δεύτερον δίδει τὸν πρῶτον.

Πᾶς ἀκέραιος ἀριθμὸς, ὅς τις διαιρεῖ ἀκριβῶς ἄλλον, καλεῖται παράγων, ἢ διαιρέτης, ἢ ὑποπολλαπλάσιος τοῦ ἀριθμοῦ τούτου, καὶ οὗτος καλεῖται πολλαπλάσιος τοῦ πρώτου.

Πᾶς ἀκέραιος ἀριθμὸς, ὅς τις δὲν ἔχει ἄλλον διαιρέτην παρὰ τὸν ἑαυτόν του, ἢ τὴν μονάδα καλεῖται πρῶτος ἀπόλυτος ἀριθμὸς, ἢ πρῶτος.

Δύο ἀκέραιοι ἀριθμοὶ καλοῦνται πρῶτοι μεταξύ των, ὅταν δὲν ἔχωσιν ἄλλον κοινὸν διαιρέτην, παρὰ τὴν μονάδα, ἥτις εἶναι διαιρέτης ὅλων τῶν ἀριθμῶν.

Ἐντεῦθεν προκύπτει, ὅτι εἷς πρῶτος ἀριθμὸς, ὅς τις δὲν διαιρεῖ ἀκριβῶς ἄλλον ἀκέραιον ἀριθμὸν, εἶναι πρῶτος μὲ τοῦτον, τὸν ἄλλον, ἐπειδὴ τότε δὲν δύνανται νὰ ἔχωσιν ἄλλον κοινὸν διαιρέτην παρὰ τὴν μονάδα. *)

Οἱ ὁρισμοὶ οὗτοι ἐσυστήθησαν ἤδη (ἀρ. 48).

§. 131. Πρώτη ἀρχή. Πᾶς ἀριθμὸς Π, ὅς τις διαιρεῖ ἀκριβῶς τὸν ἕνα ἐκ τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου Α×Β, διαιρεῖ ἐξ ἀνάγκης καὶ τὸ γινόμενόν των, ἢ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ αὐτὸ, πᾶς ἀκέραιος ἀριθμὸς, ὅς τις διαιρεῖ ἀκριβῶς ἄλλον, διαιρεῖ ἐξ ἀνάγκης τὰ πολλαπλάσια τοῦ ἄλλου ἀριθμοῦ (ὅρα ἀρ. 48).

Τῷ ὄντι, ἔστω Κ τὸ ἐξ ὑποθέσεως ἀκριβὲς πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ Α διὰ Π, ἔχομεν $Α=Π\times Κ$· ὅθεν πολλαπλασιάζοντες τὰ δύο μέλη ταύτης τῆς ἰσότητος διὰ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ Β

$$Α\times Β=Π\times Κ\times Β=Π\times ΚΒ$$

βλέπομεν, ὅτι τὸ Π εἶναι παράγων τοῦ γινομένου ΑΒ.

§. 132. Δευτέρα ἀρχή. Πᾶς ἀριθμὸς Π, ὅς τις διαιρεῖ ἀκριβῶς γινόμενόν τι ΑΒ, καὶ ὅς τις εἶναι πρῶτος μὲ ἕνα ἀπὸ τοὺς δύο παράγοντας, διαιρεῖ ἐξ ἀνάγκης τὸν ἄλλον παράγοντα.

Ἂς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι Π εἶναι πρῶτος μὲ τὸ Α· λοιπὸν λέγω, ὅτι Π διαιρεῖ τὸ Β.

Τῷ ὄντι, ἐπειδὴ Α καὶ Π εἶναι δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι μεταξύ των, ἕπεται ὅτι, ἐὰν εἰς αὐτοὺς ἐφαρμόσωμεν τὴν μέθοδον τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου (ἀρ. 49), τουτέστιν, ἐὰν διαιρέσωμεν Α διὰ Π (ὑποθέτοντες κατὰ πρῶτον $Α>Π$)· μετὰ ταῦτα Π διὰ τοῦ πρώτου ὑπολοίπου, καὶ τὸ πρῶτον ὑπόλοιπον διὰ

*) Ὅταν ἀριθμός τις διαιρῇ μὲν τὸν διαιρετέον, δὲν δύναται δὲ νὰ διαιρέσῃ τὸν διαιρέτην, ὅς τις εἶναι πρῶτος, ὁ διαιρέτης καὶ ὁ διαιρετέος δὲν ἔχουσι μεταξύ των κοινὸν μέτρον. Ὁ Μεταφραστής.

τοῦ δευτέρου, καὶ οὕτω καθεξῆς, θέλομεν φθάσει ἐξ ἀνάγκης ὕστερον ἀπό τινας πράξεις εἰς τελευταῖον ὑπόλοιπον ἴσον μὲ τὴν μονάδα.

Τούτου τεθέντος, ἂς σημειώσωμεν διὰ Κ, Κ′ Κ″, Κ‴ κ. τ. λ. καὶ διὰ Ρ, Ρ′, Ρ″, Ρ‴ . . . . . τὰ διαδοχικὰ πηλίκα, καὶ τὰ διαδοχικὰ ὑπόλοιπα. Ἐντεῦθεν θέλομεν λάβει τὰς ἀκολούθους ἰδιότητας.

$$A=\Pi K+P$$
$$\Pi=PK+P'$$
$$P=P'K''+P''$$
$$P'=P''K'''+P'''.$$

Καὶ πολλαπλασιάζοντες τὰ δύο μέλη ἑκάστης τούτων τῶν ἰσοτήτων ἐπὶ Β, καὶ διαιροῦντες μετὰ ταῦτα τὸ γινόμενον διὰ Π, ἐξάγομεν.

$$\frac{AB}{\Pi}=BK+\frac{BP}{\Pi}\; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$
$$B=\frac{BPK'}{\Pi}+\frac{BP'}{\Pi}\; . \; . \; . \; . \quad (2)$$
$$\frac{BP}{\Pi}=\frac{BP'K''}{\Pi}+\frac{BP''}{\Pi}\; . \; . \; . \quad (3)$$
$$\frac{BP'}{\Pi}=\frac{BP''K'''}{\Pi}+\frac{BP'''}{\Pi}\; . \; . \quad (4)$$

. . . .

Ἤδη ἐὰν θεωρήσωμεν τὴν ἰσότητα (1), βλέπομεν, ὅτι τὸ πρῶτον μέλος εἶναι ἀκέραιος ἀριθμὸς, ἐπειδὴ ΑΒ εἶναι ἐξ ὑποθέσεως διαιρετὸς διὰ Π. Ὁ πρῶτος ὅρος ΒΚ τοῦ δευτέρου μέλους εἶναι παρομοίως ἀκέραιος ἀριθμός. Λοιπὸν πρέπει καὶ ὁ δεύτερος ὅρος $\frac{BP}{\Pi}$ νὰ ἦναι καὶ αὐτὸς ἀκέραιος, ἀλλέως ἠθέλαμεν ἔχει ἀκέραιον ἀριθμὸν ἴσον μὲ ἀριθμὸν κλασματικὸν, τὸ ὁποῖον εἶναι ἄτοπον. Λοιπὸν ἐπειδὴ ΑΒ εἶναι διαιρετὸς διὰ Π, ἔπεται, ὅτι καὶ τὸ γινόμενον τοῦ Β ἐπὶ τὸ πρῶτον ὑπόλοιπον Ρ εἶναι παρομοίως διαιρετὸν διὰ Π.

῞Ας θεωρήσωμεν ἤδη τὴν ἰσότητα (2). Τὸ πρῶτον μέλος εἶναι ἀκέραιος ἀριθμὸς, ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ δευτέρου μέλους εἶναι παρομοίως ἀκέραιος, ἐπειδὴ ΒΡ ὄντος διαιρετοῦ διὰ Π, πρέπει προσέτι νὰ διαιρῆται καὶ τὸ πολλαπλάσιόν του ΒΡΚ′ (ὅρα ἀρ. 131), λοιπὸν πρέπει καὶ ὁ δεύτερος ὅρος $\frac{BP'}{\Pi}$ νὰ ἦναι καὶ αὐτὸς ἀκέραιος ἀριθμὸς. Οὕτω τὸ γινόμενον τοῦ Β ἐπὶ τὸ δεύτερον ὑπόλοιπον Ρ′, εἶναι ἀκόμη διαιρετὸν διὰ Π.

Τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἰσότητος (3) εἶναι ἀριθμὸς ἀκέραιος, ἐπειδὴ ΒΡ εἶναι διαιρετὸν διὰ Π· ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ δευτέρου μέλους εἶναι παρομοίως ἀκέραιος ἀριθμὸς, διότι εἶναι καὶ ΒΡ′, καὶ ἐπομένως ΒΡ′Κ″ εἶναι διαιρετὸν διὰ Π. Λοιπὸν ὁ δεύτερος ὅρος $\frac{BP''}{\Pi}$ πρέπει νὰ ἦναι καὶ αὐτὸς ἀκέραιος ἀριθμός.

Ἐν ἑνὶ λόγῳ βλέπομεν, ὅτι ἡ διαιρετότης τοῦ ΑΒ διὰ Π ἐπισύρει ἐξ ἀνάγκης τὴν τῶν γινομένον ΒΡ, ΒΡ′, ΒΡ″, ΒΡ‴ . . . . . καὶ ἐπειδὴ μετὰ τινὰ ἀριθμὸν πράξεων μέλλομεν νὰ φθάσωμεν εἰς ὑπόλοιπον ἴσον μὲ 1, ἕπεται, ὅτι τὸ γινόμενον $B \times 1$ ἢ ἁπλῶς Β, πρέπει καὶ αὐτὸ νὰ διαιρῆται διὰ Π . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ὑπεθέσαμεν κατ' ἀρχὰς $A > \Pi$, ἐὰν ὅμως εἴχαμεν $A < \Pi$, ἠθέλαμεν διαιρέσει Π διὰ Α, Α διὰ Ρ, Ρ διὰ Ρ′ . . . . . ἡ δὲ ἀπόδειξις ἤθελ' εἶναι ἀπολύτως ἡ αὐτή.

Σ. Κ. Πρέπει πάντοτε τὸ Π νὰ ἦναι πρῶτος μὲ ἕνα τῶν δύο παραγόντων, ἐπειδὴ π. χ. 56×15, ἢ 840 εἶναι διαιρετὸν διὰ 40, καὶ δίδει πηλίκον 21, μ' ὅλον ὅτι ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν 56 καὶ 15 δὲν διαιρεῖται διὰ τοῦ 40. Τοῦτο ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ, ὅτι, ὄντος 40 ἴσου μὲ 8×5, ὁ πρῶτος παράγων εὑρίσκεται εἰς τὸ 56 ἢ 7×8, καὶ ὁ δεύτερος παράγων 5, εὑρίσκεται εἰς τὸ 15 ἢ 3×5. Λοιπὸν 56×15 εἶναι ἴσον μὲ $7\times8\times5\times3$, ἢ $7\times3\times8\times5$, ἢ τέλος μὲ 21×40. *)

§. 133. Τρίτη ἀρχή. Πᾶς ἀριθμὸς Π, ἀπολύτως πρῶτος, ὅς τις διαιρεῖ ἀκριβῶς ἓν γινόμενον $A\times B$, πρέπει νὰ διαιρῇ ἀκριβῶς ἕνα τῶν δύο παραγόντων.

Τῷ ὄντι, ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι Π δὲν διαιρεῖ A, λοιπὸν εἶναι πρῶτος μὲ τὸ A (ἀρ. 130), ὅθεν πρέπει νὰ διαιρῇ τὸ B (ἀρ. 132).

Ἐκ τούτου προκύπτουν αἱ ἀκόλουθοι συνέπειαι.

§. 134. 1$^{\alpha}$ Πᾶς ἀριθμὸς ἀπολύτως πρῶτος, ὅς τις διαιρεῖ A^2, καὶ ἐν γένει ὁποιανδήποτε δύναμιν A^{μ} τοῦ A, πρέπει νὰ διαιρῇ καὶ τὸ A.

Τῷ ὄντι A^2 εἶναι τὸ αὐτὸ ὡς $A\times A$. Ἠξεύρομεν, ὅτι πᾶς πρῶτος ἀριθμὸς, ὅς τις διαιρεῖ τὸ γινόμενον τοῦτο, πρέπει (ἀρ. 133) νὰ διαιρῇ ἕνα τῶν παραγόντων. Παρομοίως A^3 ὄντος ἴσου μὲ $A\times A^2$, πᾶς ἀριθμὸς πρῶτος, ὅς τις διαιρεῖ A^3, πρέπει νὰ διαιρῇ τὸ A ἢ τὸ A^2· ἀλλὰ διὰ νὰ διαιρῇ τὸν τελευταῖον παράγοντα, πρέπει νὰ διαιρῇ τὸ A, καὶ οὕτω διαδοχικῶς.

§. 135. 2$^{\alpha}$ Πᾶς ἀριθμὸς Π, πρῶτος μὲ ἕκαστον τῶν δύο παραγόντων τοῦ γινομένου $A\times B$, εἶναι παρομοίως πρῶτος μὲ τοῦτο τὸ γινόμενον.

---

*) Ἐπειδὴ 56 καὶ 40 ἔχουσι κοινὸν διαιρέτην τὸ 8, οὗτοι οἱ δύο ἀριθμοὶ δὲν εἶναι πρῶτοι μεταξύ των, καὶ τὸ 40 καὶ 15 ἔχοντες κοινὸν διαιρέτην τὸ 5, δὲν εἶναι πρῶτοι μεταξύ των. Ἡ δὲ ἄνω εἰρημένη πρότασις ἀπεδείχθη, ὅταν μόνον εἷς τῶν παραγόντων ἦναι πρῶτος μὲ τὸν ἀριθμὸν, ὅς τις διαιρεῖ τὸ γινόμενον. Ὁ Μεταφραστής.

Τῷ ὄντι εἷς ἀριθμὸς ἀπολύτως πρῶτος, ὅς τις διαιρεῖ Π καὶ ΑΒ, πρέπει νὰ διαιρῇ Α ἢ Β· οὕτως Π καὶ Α ἢ Π καὶ Β δὲν πρέπει νὰ ἦναι πρῶτοι ἀναμεταξύ των, τὸ ὁποῖον ἤθελεν εἶναι ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως.

§. 136. 3η. Ὅταν εἷς ἀριθμὸς Ν ἦναι σχηματισμένος διὰ τοῦ γινομένου πολλῶν ἄλλων Α, Β, Γ . . . . . ὁ ἀριθμὸς οὗτος δὲν δύναται νὰ ἔχῃ ἄλλους πρώτους παράγοντας, παρὰ ἐκείνους, οἵτινες ἐμβαίνουν ἤδη εἰς Α, Β, Γ, Δ . . . . . .

Τῷ ὄντι πᾶς ἀριθμὸς πρῶτος, ὅς τις διαιρεῖ τὸ γινόμενον ΑΒΓΔ, καὶ δὲν διαιρεῖ τὸ Δ, πρέπει νὰ διαιρῇ τὸ ΑΒΓ (ἀρ. 133). Παρομοίως πᾶς πρῶτος ἀριθμὸς, ὅς τις διαιρεῖ τὸ ΑΒΓ, καὶ δὲν διαιρεῖ τὸ Γ, πρέπει νὰ διαιρῇ τὸ ΑΒ, καὶ διὰ τοῦτο τὸ Α ἢ τὸ Β.

Οὕτω μὲ ἄλλας λέξεις· εἷς ἀριθμὸς σχηματιζόμενος διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ πολλῶν ἄλλων, δὲν δύναται νὰ ποριςθῇ ἐκ νέου, διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἀριθμῶν, οἵτινες περιέχουσι παράγοντας πρώτους, διαφορετικοὺς ἐκείνων, οἵτινες εὑρίσκονται εἰς τοὺς ἀριθμοὺς, τοὺς ὁποίους πρότερον ἐπολλαπλασιάσαμεν.

§. 137. Τετάρτη καὶ τελευταία ἀρχή. Κάθε ἀριθμὸς Ν, ὅς τις διαιρεῖται διὰ δύο, ἢ πολλῶν ἀριθμῶν δ, δ′, δ″ . . . . πρώτων ἀναμεταξύ των, διαιρεῖται καὶ διὰ τοῦ γινομένου των.

Τῷ ὄντι, ἐπειδὴ δ, διαιρεῖ τὸ Ν, ἔχομεν Ν= δκ, ὄντος κ. ἀριθμοῦ ἀκεραίου· ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως δ′ διαιρεῖ παρομοίως τὸ Ν, λοιπὸν δ′ διαιρεῖ τὸ δκ, καὶ ἐπειδὴ δ καὶ δ′ τοὺς ὑποθέσαμεν πρώτους ἀναμεταξύ των, πρέπει (ἀρ. 132) τὸ δ′ νὰ διαιρῇ ἐντελῶς τὸ x, καὶ οὕτως ἔχομεν $x=\delta' x'$, ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι $N=\delta\times\delta' x'=\delta\delta'\times x'$, οὕτως N διαιρεῖται διὰ $\delta\delta'$.

Παρομοίως ἐπειδὴ δ'' διαιρεῖ τὸ N, πρέπει νὰ διαιρῇ καὶ τὸ $\delta\delta'\times x$, ἀλλὰ δ'' εἶναι πρῶτος μὲ τὸ δ καὶ δ', καὶ διὰ τοῦτο καὶ μὲ τὸ $\delta\delta'$ (ἀρ. 135), λοιπὸν δ'' πρέπει νὰ διαιρῇ ἐντελῶς τὸ x', καὶ διὰ τοῦτο $x'=\delta'' x''$, ἐκ τοῦ ὁποίου συνάγομεν $N=\delta\delta'\times\delta'' x''=\delta\delta'\delta''\times x''$, τὸ ὁποῖον ἀποδεικνύει, ὅτι τὸ N διαιρεῖται διὰ τοῦ $\delta\delta'\delta''$, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

§. 138. Συνέπεια. Ἐὰν δ, δ', δ'' .... ὄντες ἀριθμοὶ πρῶτοι μεταξύ των, ἕκαστος εἰσέρχεται, ὡς παράγων εἰς ἕνα ἀριθμὸν φορῶν εἰς τὸ N, π. χ. ν, ν', ν'' .... ὁ ἀριθμὸς N διαιρεῖται ἐντελῶς διὰ δ^{ν}, $\delta'^{\nu'}$, $\delta''^{\nu''}$ .... καὶ δι' ὅλων τῶν ἀριθμῶν, τοὺς ὁποίους ἠμποροῦμεν νὰ συνάξωμεν, πολλαπλασιάζοντες ἀνὰ δύο, ἀνὰ τρεῖς, τὰς διαφόρους δυνάμεις τοῦ δ, δ', δ'' .... αἵτινες περιέχονται μεταξὺ τῆς πρώτης, ἕως εἰς ἐκείνην, τῆς ὁποίας ὁ βαθμὸς σημειοῦται διὰ τοῦ ν, σχετικῶς πρὸς τὸ δ, διὰ τοῦ ν', σχετικῶς πρὸς τὸ δ', διὰ τοῦ ν'', σχετικῶς πρὸς τὸ δ'' ...... Τῷ ὄντι δ, δ', δ'' .... μὲ τὸ νὰ ἦναι πρῶτοι ἀριθμοὶ ἀναμεταξύ των, ἀκολουθεῖ τὸ αὐτὸ καὶ εἰς δ^{ν}, $\delta'^{\nu'}$, $\delta''^{\nu''}$ .... λοιπὸν (ἀρ. 137) τὰ γινόμενά των ἀνὰ δύο, ἀνὰ τρία ... πρέπει νὰ ἦναι ἀκριβεῖς διαιρέται τοῦ N.

Αὕτη ἡ ἀρχὴ χρησιμεύει ὡς βάσις εἰς τὸ ζήτημα τῶν διαιρετῶν τόσον ἁπλῶν, ὅσον καὶ συνθέτων ἑνὸς ἀριθμοῦ· ζήτημα, τὸ ὁποῖον θέλομεν θεωρήσει εὐθύς.

Εἶναι ἀνωφελὲς νὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι ὅλαι αἱ μέχρι τοῦδε συσταθεῖσαι προτάσεις εἶναι ἀληθεῖς εἰς ὅλα τὰ συστήματα τῆς ἀριθμήσεως. Ἰδοὺ καὶ ἄλλαι, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἰδιαιτέραν σχέσιν μὲ τὸ δεκαδικὸν σύστημα.

§. 139. Χαρακτηριστικὰ τῆς διαιρετότητος ἑνὸς ἀριθμοῦ δι' ἄλλου. Ὑπάρχουσι μερικὰ σημεῖα, διὰ τῶν ὁποίων συχνάκις δυνάμεθα νὰ γνωρίσωμεν, ὅτι εἷς ἀριθμὸς εἶναι, ἢ δὲν εἶναι διαιρετὸς δι' ἄλλων ἀριθμῶν. Τοῦτο εἶναι ὠφέλιμον εἰς τὰς πράξεις. Οἱ συλλογισμοὶ οἱ ἐπιτήδειοι εἰς τὴν σύστασιν ταύτης τῆς ἀρχῆς ἐπιστηρίζονται εἰς τὴν ἀκόλουθον ἀρχήν.

Ἂς ἀναλυθῇ εἷς ἀριθμὸς Α εἰς δύο μέρη Β καὶ Γ, ὥστε νὰ ἔχωμεν $A=B+\Gamma$ . . (1).

1ον. Ἐὰν τέταρτός τις ἀριθμὸς Δ διαιρῇ ἐντελῶς τὰ δύο μέρη Β καὶ Γ, πρέπει νὰ διαιρῇ παρομοίως καὶ τὸ ἀθροισμάτων Α (ὅρα ἀρ. 48).

2ον. Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς Δ διαιρῇ ἓν τῶν μερῶν Β, χωρὶς νὰ διαιρῇ τὸ ἄλλο Γ, δὲν θέλει διαιρῇ πλέον τὸ Α, καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ Α διὰ τοῦ Δ εἶναι ἴσον μὲ ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον δίδει ἡ διαίρεσις τοῦ Γ διὰ τοῦ Δ.

Τὸ πρῶτον μέρος ταύτης τῆς ἀρχῆς εὐκόλως ἀποδεικνύεται. Τῷ ὄντι διαιροῦντες τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος (1) διὰ Δ, συνάγομεν

$$\frac{A}{\Delta}=\frac{B}{\Delta}+\frac{\Gamma}{\Delta}\ (2).$$

Τώρα οἱ δύο ὅροι τοῦ δευτέρου μέλους εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοὶ, ἐπειδὴ Β καὶ Γ εἶναι ἐξ ὑποθέσεως διαιρετοὶ διὰ τοῦ Δ· λοιπὸν τὸ πρῶτον μέλος πρέπει νὰ ἦναι ἀκέραιος ἀριθμὸς, ἀλλέως ἠθέλαμεν ἔχει κλασματικὸν ἀριθμὸν ἴσον μὲ ἀκέραιον, τὸ ὁποῖον εἶναι ἄτοπον. Οὕτως Α εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ Δ.

Ὅσον δὲ διὰ τὸ δεύτερον μέλος, εἶναι φανερὸν, ὅτι κατὰ τὴν ἰσότητα (2), ἐὰν, Β ὄντος διαιρετοῦ διὰ τοῦ Δ, τὸ Γ δὲν ἦναι διαιρετὸν, μήτε τὸ Α δὲν εἶναι· ἐπειδὴ ἄλλως ἠθέλαμεν ἔχει ἀριθμὸν ἀκέραιον ἴσον μὲ κλασματικόν. Πρόκειται ἤδη νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ Α διὰ τοῦ Δ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ Γ διὰ Δ.

Διὰ τοῦτο παρατηροῦμεν, ὅτι Β μὲ τὸ νὰ ἦναι διαιρετὸν διὰ Δ, ἔχομεν $B=\Delta K$ (Κ εἶναι ἀκέραιος ἀριθμὸς), καὶ ἐπειδὴ Γ δὲν εἶναι διαιρετὸν διὰ Δ, συνάγομεν $\Gamma=\Delta K'+P$.

Λοιπὸν $B+\Gamma$ ἢ $A=\Delta K+\Delta K'+P=\Delta\ (K+K')+P$ (ἀρ. 115). Λοιπὸν βλέπομεν, ὅτι Α διαιρούμενον διὰ Δ δίδει πηλίκον $K+K'$, καὶ ὑπόλοιπον Ρ, τὸ ὁποῖον ἄλλο δὲν εἶναι, παρὰ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ Γ διὰ τοῦ Δ· τοῦτο, τὸ ὁποῖον ἔπρεπε νὰ ἀποδείξωμεν.

Ἄς περάσωμεν τώρα εἰς τὴν ἀνάπτυξιν τῶν διαφόρων χαρακτηριστικῶν τῆς διαιρετότητος.

§. 140. Ἰδιότητες τῶν ἀριθμῶν 2, 5, 4, 25, 8, 125.

1ον Πᾶς ἀριθμὸς, ὅστις τελειόνει εἰς ἓν τῶν ψηφίων 0, 2, 4, 6, 8 εἶναι διαιρετὸς διὰ 2.

Τῷ ὄντι, ὁ τοιοῦτος ἀριθμὸς δύναται νὰ ἀναλυθῇ εἰς δύο μέρη, τουτέστιν εἰς τὸ μέρος πρὸς τὰ ἀριστερὰ τῶν ἁπλῶν μονάδων, θεωρούμενον μὲ τὴν σχετικήν του τιμὴν, καὶ εἰς τὰς ἁπλᾶς μονάδας (π. χ. 38576 ἀνάγεται εἰς $38570+6$)· ἀλλὰ τὸ πρῶτον μέρος μὲ τὸ νὰ τελειόνῃ εἰς μηδὲν, εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 10, ἀλλὰ 10 εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ 2, ἐπειδὴ ἔχομεν $10=2\cdot 5$· λοιπὸν τὸ πρῶτον μέρος εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ 2· ἀλλ' ἓν ὁποιονδήποτε τῶν ψηφίων 0, 2, 4, 6, 8 εἶναι διαιρετὸν διὰ 2· οὕτως (ἀρ. 139) ὅλος ὁ ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς διὰ 2.

Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς τελειόνῃ εἰς ἓν τῶν ψηφίων 1, 3, 5, 7, 9 δὲν εἶναι διαιρετὸς διὰ 2· ἐπειδὴ ἓν τῶν μερῶν του διαιρεῖται διὰ τοῦ 2, καὶ τὸ ἄλλο ὄχι.

Σ. Κ. Πᾶς ἀριθμὸς, ὅς τις διαιρεῖται διὰ τοῦ 2, ἢ τελειόνῃ εἰς ἓν τῶν ψηφίων 0, 2, 4, 6, 8, καλεῖται ἀριθμὸς ἄρτιος· οἱ ἄλλοι καλοῦνται ἀριθμοὶ περιττοί. Ὅλοι οἱ ἄρτιοι ἀριθμοὶ λαμβάνονται ἐκ τοῦ τύπου 2ν, ὄντος ν ἀκεραίου ἀριθμοῦ· οἱ περιττοὶ ἐκ τοῦ τύπου $2\nu+1$.

2ον Πᾶς ἀριθμὸς, ὅς τις τελειόνει εἰς 0 ἢ εἰς 5, εἶναι διαιρετὸς διὰ 5· ἀλλ' εἶναι ἡ αὐτὴ ἀπόδειξις μὲ τὴν τοῦ ἀριθμοῦ 2.

Ἐὰν τὸ τελευταῖον ψηφίον διαφέρῃ τοῦ 0, ἢ τοῦ 5, ὁ ἀριθμὸς δὲν διαιρεῖται διὰ τοῦ 5, καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ τοιούτου ἀριθμοῦ, διὰ τοῦ 5, εἶναι ἴσον μὲ τὸ ὑπόλοιπον τοῦ τελευταίου ψηφίου διὰ τοῦ 5 (ἀρ. 139)· οὕτως 1327 διαιρούμενον διὰ 5 δίδει ὑπόλοιπον 2, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον μὲ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ 7 διὰ 5.

Παρομοίως 34789 καὶ 71436 δίδουσιν ὑπόλοιπον 4 καὶ 1.

3ον Πᾶς ἀριθμὸς, τοῦ ὁποίου τὰ δύο τελευταῖα ψηφία θεωρούμενα μὲ τὰς σχετικάς των τιμὰς, σχηματίζουσιν ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ 4 ἢ διὰ 25, ὁ ἀριθμὸς οὗτος διαιρεῖται διὰ τοῦ 4 καὶ 25.

Τῷ ὄντι οὗτος ὁ ἀριθμὸς δύναται νὰ ἀναλυθῇ εἰς δύο μέρη, εἰς τὸ μέρος πρὸς τὰ ἀριστερὰ τῶν δεκάδων, θεωρούμενον μὲ τὴν σχετικήν του τιμὴν, καὶ εἰς τὴν ἕνωσιν τῶν δεκάδων καὶ μονάδων (π. χ. 3548 καὶ 27875 ἄγονται εἰς $3500+48$ καὶ $27800+75$) ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ πρῶτον μέρος τελειόνει εἰς δύο μηδενικὰ, διὰ τοῦτο πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τοῦ 100, τὸ

100 διαιρεῖται διὰ 4, καὶ δίδει πηλίκον 25, ἐπειδὴ $100=25\times4$· λοιπὸν τὸ πρῶτον μέρος διαιρεῖται διὰ τοῦ 4 ἢ διὰ τοῦ 25· ἀλλὰ καὶ τὸ δεύτερον μέρος διαιρεῖται καὶ αὐτὸ ἐξ ὑποθέσεως διὰ τοῦ 4 ἢ 25· οὕτως ὅλος ὁ ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ τοῦ 4 ἢ διὰ τοῦ 25· Π. χ. 3548 διαιρεῖται διὰ τοῦ 4, ἐπειδὴ 48 εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 4· 27875 διαιρεῖται διὰ τοῦ 25, ἐπειδὴ 75 εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 25· τὸ δὲ 13758 δὲν εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ 4, ἀλλὰ δίδει ὑπόλοιπον 2, τουτέστιν ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν διαιροῦντες τὸ 58 διὰ τοῦ 4· 25659 δὲν διαιρεῖται διὰ τοῦ 25 ἀλλὰ δίδει ὑπόλοιπον 9, ἢ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ 59 διὰ τοῦ 25.

Σ. Κ. Διὰ τὸν ἀριθμὸν 25, μόνον οἱ ἀριθμοὶ, οἵτινες τελειόνουν εἰς 00, 25, 50, καὶ 76 διαιροῦντας διὰ τοῦ 25.

$\overline{4}^{ον}$ Πᾶς ἀριθμὸς, τοῦ ὁποίου τρία τελευταῖα ψηφία, θεωρούμενα μὲ τὰς σχετικάς των τιμὰς, σχηματίζουσιν ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ 8, ἢ διὰ 125, εἶναι παρομοίως διαιρετὸς διὰ τοῦ 8 ἢ 125.

Δὲν ἀναπτύσσομεν τὴν δεῖξιν, ἐπειδὴ εἶναι ἀνάλογος μὲ τὰς ἀνωτέρω. Ἀρκεῖ μόνον νὰ σημειώσωμεν, ὅτι αὕτη ἐπιστηρίζεται εἰς τοῦτο, ὅτι $1000=125\times8$· ἀλλ' αὕτη ἡ ἰδιότης δὲν εἶναι εἰς χρῆσιν.

§. 141. Ἰδιότητες τῶν ἀριθμῶν 3 καὶ 9. Πᾶς ἀριθμὸς, τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων θεωρουμένων εἰς τὴν ἀπόλυτον τιμήν των εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 3 ἢ διὰ τοῦ 9, εἶναι καὶ αὐτὸς ὁ ἴδιος διαιρετὸς διὰ τοῦ 3 ἢ διὰ τοῦ 9.

Παρατηροῦμεν κατὰ πρῶτον, ὅτι ἐὰν ἐξ ὁποιασδήποτε δυνάμεως τοῦ 10 ἢ τῆς μονάδος, ἥτις ἔχει εἰς τὰ δεξιά της ἀριθμόν τινα μηδενικῶν, ἀφαιρέσωμεν 1, τὸ ἐξαγόμενον εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ 9. Ἐπειδὴ