τῆς ἐκφράσεως τοῦ ζητήματος, καὶ δὲν δύνανται νὰ ἀναλυθῶσι μεταξύ των, ὡς ὅταν ἐργαζώμεθα ἐπὶ μερικῶν ἀριθμῶν. *)

Μετὰ τὰς τοιαύτας γνώσεις ἐπιστρέφομεν εἰς τὸ προκείμενον, τουτέστι ἀναλαμβάνομεν ἓν τῶν ὑποκειμένων τῶν ἐξηγημένων εἰς τὸ πρῶτον τμῆμα διὰ νὰ τὸ σπουδάσωμεν περισσότερον. Οὕτως θέλομεν φθάσει εἰς νέας ἰδιότητας, καὶ εἰς μέσα τοῦ νὰ μεταποιῶμεν ἢ νὰ καταστaίνωμεν ἁπλουστέρους τοὺς τρόπους τῶν διαφόρων πράξεων τῆς ἀριθμητικῆς.

§. αος. Θεωρία τῶν διαφόρων συστημάτων τῆς ἀριθμήσεως.

§. 118. Εἴδομεν (ἀρ. 5) τίνι τρόπῳ διὰ μέσου δέκα ψηφίων ἐκφράζομεν ὅλους τοὺς ἀριθμοὺς κατὰ μόνην τὴν συνθήκην, ὅτι κάθε ψηφίον θεμένον εἰς τὰ ἀριστερὰ ἄλλου ἐκφράζει μονάδας δέκα φοραῖς μεγαλητέρας παρ' αὐτό. Πρόκειται δὲ ἤδη νὰ δείξωμεν, ὅτι δυνάμεθα παρομοίως νὰ γράφωμεν ὅλους τοὺς ἀριθμοὺς μὲ περισσοτέρους ἢ ὀλιγωτέρους τῶν δέκα χαρακτήρων, ἀρκεῖ νὰ ἦναι κἂν δύο, καὶ ἓν τούτων νὰ ἦναι τὸ μηδέν.

Καλεῖται ἐν γένει βάσις ἑνὸς συστήματος ἀριθμήσεως, ὁ ἀριθμὸς τῶν ψηφίων, τὰ ὁποῖα μεταχειρίζονται. Τὸ σύστημα, εἰς τὸ ὁποῖον μεταχειρίζονται μόνον δύο ψηφία, καλεῖται σύστημα δυαδικόν· ἐκεῖνο,

---

*) Ὁ Μεταφραστής· Π. χ. ἐὰν α πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ β, γράφομεν αβ, καὶ πάντοτε ἐννοοῦμεν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς α πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τοῦ β· ἐὰν ὅμως πολλαπλασιάσωμεν 2 ἐπὶ 8, τὸ γινόμενον 16 δὲν παῤῥησιάζει ὅ,τι παῤῥησιάζει τὸ αβ· ἐπειδὴ 16 ὄχι μόνον σχηματίζεται ἀπὸ 2×8, ἀλλὰ καὶ ἀπὸ 4×4.

κὸς τὸ ὁποῖον μεταχειρίζονται τρία, σύστημα τριαδικὸν κ. τ. λ.

Εἰς κάθε σύστημα ἀριθμήσεως ἀνάλογον μὲ τὸ δεκαδικὸν σύστημα πρέπει κάθε ψηφίον θεμένον εἰς τὰ ἀριστερὰ ἄλλου νὰ ἐκφράζῃ μονάδας τόσαις φοραῖς μεγαλητέρας σχετικῶς εἰς ἐκείνας αὐτοῦ τοῦ ἄλλου ψηφίου, ὅσας μονάδας ἔχει ἡ βάσις, τουτέστιν ὁ ἀριθμὸς τῶν ψηφίων τοῦ συστήματος· οὕτως εἰς τὸ δυαδικὸν σύστημα ἕκαστον ψηφίον ἀποκτᾷ τιμὴν ἀνὰ δύο φορὰς μεγαλητέραν, καθ' ὅσον προχωρεῖ μίαν, δύο, τρεῖς τάξεις κατὰ τὰ ἀριστερά· εἰς τὸ τριαδικὸν σύστημα, ἡ τιμὴ ἑνὸς ψηφίου εἶναι ἀνὰ τρεῖς φορὰς μεγαλητέρα· καὶ ἐν γένει εἰς ἓν σύστημα, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι β, ἕκαστον ψηφίον ἀποκτᾷ τιμὴν ἀπὸ β εἰς β φορὰς μεγαλητέραν. Ὅταν εἷς ἀριθμὸς ἦναι γραμμένος εἰς σύστημα, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι β, τὸ πρῶτον ψηφίον εἰς τὰ δεξιὰ ἐκφράζει τὰς μονάδας τῆς πρώτης τάξεως, τὸ ψηφίον τὸ ἀμέσως εἰς τὰ ἀριστερὰ κείμενον, τὰς μονάδας τῆς δευτέρας τάξεως, τὸ δὲ εἰς τὰ ἀριστερὰ τῶν δύο τούτων εὑρισκόμενον ψηφίον τὰς μονάδας τῆς τρίτης τάξεως, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Ἔχομεν δὲ χρείαν ἀπὸ β μονάδας τῆς πρώτης τάξεως διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὴν μονάδα τῆς δευτέρας τάξεως, β μονάδας τῆς δευτέρας τάξεως, διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὴν μονάδα τῆς τρίτης τάξεως, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

§. 119. Τούτου καλῶς ἐννοηθέντος, ἂς περάσωμεν εἰς τὸν τρόπον τοῦ ἐκφράζειν διὰ ψηφίων ὁλόκληρόν τινὰ ἀριθμὸν, ὁποιονδήποτε καὶ ἂν ἦναι τὸ σύστημα, τὸ ὁποῖον παρεδέχθημεν. Πρὸς ἀκριβῆ τούτου κατάληψιν, θέλομεν θεωρήσει τὸ ἑπταδικὸν σύστημα, ἢ τὸ σύστημα, εἰς τὸ ὁποῖον μεταχειρίζονται ἑπτὰ ψηφία· καὶ ἔπειτα τοὺς αὐτοὺς συλλογισμοὺς ἐφαρμόζομεν καὶ εἰς κάθε ἄλλο σύστημα.

Οἱ χαρακτῆρες τοῦ ἑπταδικοῦ συστήματος εἶναι 1, 2, 3, 4, 5, 6, 0, ἐκ τῶν ὁποίων οἱ ἓξ πρῶτοι ἐκφράζουσι τοὺς ἓξ πρώτους ἀριθμοὺς, προσθέτοντες τὴν μονάδα εἰς τὸ ἓξ σχηματίζομεν τὸν ἀριθμὸν ἑπτὰ, ἢ τὴν μονάδα τῆς δευτέρας τάξεως, ἥτις κατὰ τὴν προσυσταθεῖσαν ἀρχὴν δύναται νὰ ἐκφρασθῇ διὰ 10, ἐπειδὴ τὸ 0 μηδὲν μὴ ἔχον εἰς τὸν ἑαυτόν του καμμίαν τιμὴν, κάμνει νὰ ἐκφράζῃ τὸ ψηφίον 1, τὸ ὁποῖον εἶναι εἰς τὰ ἀριστερά του ἑπτὰ ἁπλᾶς μονάδας.

Θέτοντες δὲ διαδοχικῶς ὅλα τὰ ψηφία τοῦ συστήματος εἰς τὴν πρώτην καὶ δευτέραν θέσιν, θέλομεν σχηματίσει ὅλους τοὺς διαδοχικοὺς ἀριθμοὺς, τοὺς περιεχομένους μεταξὺ ἑπτὰ ἢ 10, ἕως εἰς τὸν ἀριθμὸν 66.

Οὗτος ὁ ἀριθμὸς γραφεὶς, μετὰ τὴν εἰς αὐτὸν πρόσθεσιν νέας μονάδος, θέλει ἀποτελέσει ἓξ μονάδας τῆς δευτέρας τάξεως, πλέον ἑπτὰ μονάδας τῆς πρώτης, τουτέστιν ἑπτὰ μονάδας τῆς δευτέρας τάξεως, ἢ μίαν μόνην μονάδα τῆς τρίτης τάξεως, ἥτις ἠμπορεῖ νὰ ἐκφρασθῇ μὲ 100.

Θέτοντες διαδοχικῶς εἰς τὴν πρώτην, δευτέραν, καὶ τρίτην τάξιν, τὰ διάφορα ψηφία τοῦ συστήματος, σχηματίζομεν ὅλους τοὺς διαδοχικοὺς ἀριθμοὺς τοὺς περιεχομένους μεταξὺ τοῦ 100 καὶ τοῦ 666.

Συλλογιζόμενοι ἐπὶ τούτου τοῦ τελευταίου ἀριθμοῦ ὡς ἐπὶ τοῦ 66, φθάνομεν κατὰ πρῶτον εἰς τὴν μονάδα τῆς τετάρτης τάξεως, ἥτις θέλει ἐκφρασθῇ μὲ 1000. Μετὰ ταῦτα συνάγομεν διαδοχικῶς ὅλους τοὺς διαδοχικοὺς ἀριθμοὺς τοὺς περιεχομένους ἀπὸ τὸ 1000 ἕως εἰς τὸν ἐκφραζόμενον ἀριθμὸν διὰ 6666, καὶ οὕτω ἕως εἰς τὸ ἄπειρον.

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι ὅλοι οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ δύνανται νὰ γραφθῶσιν εἰς τοῦτο τὸ σύστημα· καὶ ὁποῖον καὶ ἂν ἦναι ἀποδεκτὸν σύστημα, αἱ μονάδες τῶν διαφόρων τάξεων παρασταίνονται ἀμοιβαίως διὰ 1, 10, 100, 1000, 10000, ὡς εἰς τὸ δεκαδικὸν σύστημα.

§. 120. Σ. Κ. εἴπομεν εἰς τὸν ἀριθμὸν 118, ὅτι τὸ ψηφίον 0, ἦτον ψηφίον ἀπαραίτητον εἰς ὅλα τὰ συστήματα τὰ ἀνάλογα μὲ τὸ δεκαδικὸν σύστημα, τουτέστιν εἰς σύστημα, ὅπου ἡ σχετικὴ τιμὴ ἑνὸς ψηφίου ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸν βαθμὸν, τὸν ὁποῖον κρατεῖ εἰς τὰ ἀριστερὰ τῶν ἄλλων· ἀλλ' ἀκριβέστερου θεωροῦντες ἐδυνάμεθα νὰ τὸ παραιτήσωμεν, πλὴν τὸ σύστημα δὲν ἤθελεν εἶναι τόσον κανονικὸν, ὡς θέλομεν δείξει.

Προτεθείσθω π. χ. νὰ συστήσωμεν τὸ τριαδικὸν σύστημα, παραδεχόμενοι τὰ τρία μόνον σημαντικὰ ψηφία 1, 2, 3.

Οἱ τρεῖς πρῶτοι ἀριθμοὶ ἤθελαν ἐκφρασθῇ κατὰ τρόπον διὰ τούτων τῶν ψηφίων.

Διὰ νὰ γράψωμεν τέσσαρα, πέντε καὶ ἕξ, ἀρκεῖ νὰ γράψωμεν 11, 12, 13. Διὰ νὰ ἐκφράσωμεν δὲ ἑπτὰ, ὀκτὼ, ἐννέα, δέκα, ἕνδεκα, δώδεκα, γράφομεν 21, 22, 23, 31, 32, 33. Παρομοίως 111, 112, 113, 121, 122, 123 ἐκφράζουσι δεκατρία, δεκατέσσαρα, δεκαπέντε, δεκαὲξ, δεκαεπτὰ, δεκαοκτώ.

Δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ ἐκτανθῶμεν περισσότερον διὰ νὰ καταλάβωμεν τὴν δυσχέρειαν τούτου τοῦ συστήματος. Τὸ πρῶτόν του ἐλάττωμα συνίσταται εἰς τὸ ὅτι αἱ μονάδες τῆς ἰδίας τάξεως ἐκφράζονται μὲ τρόπον διαφορετικόν· οὕτως εἰς τὸ 13 καὶ 23 τὸ ψηφίον 3 ἐκφράζει μονάδα δευτέρας τάξεως, καθὼς τὰ ψηφία, 1, καὶ 2, τὰ ὁποῖα εἶναι εἰς τὰ ἀριστερά των· Εἰς τὸ 123 ἡ ἕνωσις τῶν ψηφίων 23 ἐκφράζει ἐννέα ἢ τὴν μονάδα τῆς τρίτης τάξεως, καθὼς καὶ τὸ ψηφίον 1, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται εἰς τὰ ἀριστερὰ τούτων.

Μεταχειριζόμενοι τὸ ψηφίον 0, ἀρκεῖ νὰ προσδιορίσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων τῶν διαφόρων τάξεων, αἵτινες περιέχονται εἰς τὸν δεδομένον ἀριθμόν, καὶ νὰ γράψωμεν τὰ ψηφία, τὰ ὁποῖα ἐκφράζουσι τοῦτον τὸν ἀριθμόν, τὸ ἓν εἰς τὰ ἀριστερὰ τοῦ ἄλλου.

§. 121. Ἡ ἀκριβὴς συμφωνία, ἥτις ὑπάρχει μεταξὺ τῆς ὀνοματολογίας τῶν ἀριθμῶν, καὶ τοῦ τρόπου τοῦ γράφειν αὐτοὺς διὰ ψηφίων εἰς τὸ δεκαδικὸν σύστημα, μᾶς κάμνει μὲ εὐκολίαν νὰ τοὺς ἐκφράζωμεν, καὶ διὰ νὰ εἴπω οὕτω, ὑπὸ τὴν ὑπαγόρευσιν εἰς τὴν κοινὴν γλῶσσαν. Ἀλλὰ δὲν ἀκολουθεῖ τὸ αὐτὸ εἰς τὰ ἄλλα συστήματα, τὰ ὁποῖα δὲν παῤῥησιάζουσι καμμίαν συνάφειαν μὲ τὴν παροῦσαν ὀνοματολογίαν.

Πρόκειται π. χ. νὰ γράψωμεν τὸν ἀριθμὸν τριακόσια ἑξῆντα ἐννέα, εἰς τὸ ἑπταδικὸν σύστημα. Εἶναι δύσκολον πρότερον νὰ γνωρίσωμεν, ποῖα εἶναι τὰ ἐπιτήδεια ψηφία εἰς τὸ νὰ ἐκφράσωσι τὰς μονάδας τῆς πρώτης, δευτέρας καὶ τρίτης κ. τ. λ. τάξεως, τὰς ὁποίας ὁ δεδομένος ἀριθμὸς περιέχει· ἀλλ' ἐπειδὴ οὗτος ὁ ἀριθμὸς γραφόμενος διὰ ψηφίων εἰς τὸ δεκαδικὸν σύστημα ἄγεται εἰς 369, ἕπεται, ὅτι τὸ ζήτημα τοῦτο ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ ἀκόλουθον, τὸ ὁποῖον εἶναι πολὺ πλέον γενικόν.

Ἀριθμοῦ ἐκφρασμένου εἰς γλῶσσαν κοινήν, ἢ γεγραμμένου εἰς τὸ δεκαδικὸν σύστημα, νὰ μεταφράσωμεν τὸν αὐτὸν τοῦτον ἀριθμὸν εἰς σύστημα, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι β.

Διὰ νὰ τὸ λύσωμεν, παρατηροῦμεν, ὅτι ἐπειδὴ χρειάζονται β μονάδες τῆς πρώτης τάξεως, διὰ νὰ σχηματισθῇ μία μονὰς τῆς δευτέρας, τοσάκις ὁ δεδομένος ἀριθμὸς περιέχει τὸν ἀριθμὸν β, ὅσας μονάδας περικλείει τῆς δευτέρας τάξεως τοῦ συστήματος β, τουτέστιν, ὅτι διαιροῦντες τοῦτον τὸν ἀριθμὸν διὰ τοῦ β, θέλομεν ἔχει πηλίκον ἐκφράζον μονάδας τῆς δευτέρας τάξεως, τὸ δὲ ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον ἀναγκαίως θέλει εἶναι μικρότερον τοῦ β, θέλει ἐκφράζει τὰς μονάδας τῆς πρώτης τάξεως τοῦ γεγραμμένου ἀριθμοῦ εἰς τὸ σύστημα, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι β. Παρομοίως, ἐπειδὴ β μονάδες τῆς δευτέρας τάξεως τοῦ συστήματος β, σχηματίζουσι μίαν μονάδα τῆς ταιαύτης τάξεως τοῦ ἰδίου συστήματος, ἐὰν διαιρέσωμεν τὸ πηλίκον, τὸ ὁποῖον ἐκφράζει τὰς μονάδας τῆς δευτέρας τάξεως διὰ τοῦ β, τὸ νέον πηλίκον, τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν, ἐκφράζει μονάδας τῆς τρίτης τάξεως, καὶ τὸ ὑπόλοιπον πάντοτε μικρότερον τοῦ β, θέλει περικλείει τὰς μονάδας τῆς δευτέρας τάξεως τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ γεγραμμένου εἰς τὸ σύστημα, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι β, καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι διὰ νὰ περάσωμεν ἐκ τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος εἰς τὸ σύστημα, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι β, πρέπει. 1ον Νὰ διαιρέσωμεν τὸν δεδομένον ἀριθμὸν διὰ τῆς βάσεως τοῦ νέου συστήματος γραμμένου εἰς τὸ δεκαδικὸν σύστημα, ἐκ τοῦ ὁποίου ἔχομεν ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον γράφομεν κατὰ μέρος, ὡς ἐκφράζον τὰς μονάδας τῆς πρώτης τάξεως εἰς τὸ νέον σύστημα. 2ον Νὰ διαιρέσωμεν τὸ συναγόμενον πηλίκον διὰ τῆς ἰδίας βάσεως, ἐκ τοῦ ὁποίου ἔχομεν ὑπόλοιπόν τι, τὸ ὁποῖον γράφομεν εἰς τὰ ἀριστερὰ τοῦ πρώτου ὡς ἐκφράζον μονάδας τῆς δευτέρας τάξεως. 3ον Νὰ διαιρέσωμεν τὸ δεύτερον πηλίκον διὰ τῆς ἰδίας βάσεως, καὶ νὰ γράψωμεν τὸ τρίτον λαμβανόμενον ὑπόλοιπον εἰς τὰ ἀριστερὰ τῶν δύο προτεθέντων, ἐπειδὴ ἐκφράζει μονάδας τῆς τρίτης τάξεως, καὶ νὰ ἐξακολουθῶμεν ταύτας τὰς πράξεις, ἕως οὗ νὰ φθάσωμεν εἰς πηλίκον ἔλασσον τῆς βάσεως τοῦ νέου συστήματος. Τὸ τελευταῖον δὲ τοῦτο πηλίκον ἐκφράζει τὰς μονάδας τῆς ἀνωτέρας τάξεως, καὶ γράφεται τότε εἰς τὰ ἀριστερὰ ὅλων τῶν διαδοχικῶν ληφθέντων ὑπολοίπων.

Ἂς ἐφαρμόσωμεν τοῦτον τὸν κανόνα εἰς τὸν ἀριθμὸν τριακόσια ἑξῆντα ἐννέα ἢ 369, τὸν ὁποῖον πρόκειται νὰ μεταφράσωμεν εἰς τὸ ἑπταδικὸν σύστημα.

```
369) 7
 19 )52) 7
  5 | 3 \7 ) 7
         0 ) 1        (1035)
```

Διαιροῦντες 369 διὰ 7 εὑρίσκομεν πηλίκον 52 καὶ ὑπόλοιπον 5, τὸ ὁποῖον γράφομεν κατὰ μέρος, καὶ τὸ ὁποῖον ἐκφράζει τὰς μονάδας τῆς πρώτης τάξεως εἰς τὸ νέον σύστημα.

Διαιροῦντες 52 διὰ 7, εὑρίσκομεν πηλίκον 7 καὶ ὑπόλοιπου 3, τὸ ὁποῖον ἐκφράζει τὰς μονάδας τῆς δευτέρας τάξεως, καὶ γράφομεν εἰς τὰ ἀριστερὰ τοῦ ψηφίου 5.

Διαιροῦντες 7 διὰ 7 εὑρίσκομεν πηλίκον 1, καὶ 0 ὑπόλοιπον· τοῦτο φανερόνει, ὅτι δὲν ὑπάρχουσι μονάδες τῆς τρίτης τάξεως, ἀλλὰ γράφομεν τὸ 0, διὰ νὰ ἐπέχῃ τὴν θέσιν αὐτῶν.

Τέλος πάντων ἐπειδὴ τὸ πηλίκον 1 εἶναι μικρότερον τοῦ 7, ἐκφράζει τὰς μονάδας τῆς τετάρτης τάξεως, ὁ δὲ ἀριθμὸς μεταφραζόμενος εἰς τὸ ἑπταδικὸν σύστημα ἄγεται εἰς (1035).

Εὑρίσκομεν παρομοίως, ὅτι ὁ ἀριθμὸς 5347 μεταφράζεται εἰς τὸ ὀκταδικὸν σύστημα, τουτέστι γραφόμενος μὲ τὰ ψηφία 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 0, δίδει εἰς τὸ νέον σύστημα (12343).

5347	8			
54	668	8		
67	28	83	8	
3	4	3	10	8
			2	1

(12343).

Παρατήρησις. Ἡ βάσις τοῦ νέου συστήματος εἶναι ἐνίοτε μεγαλητέρα τοῦ 10 ἢ τῆς τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος.

Εἰς ταύτην τὴν περίστασιν πρέπει νὰ κάμωμεν μίαν μικρὰν μεταβολὴν, διὰ νὰ ἄξωμεν τὴν πρᾶξιν εἰς τὸν κανόνα.

Ἂς ἐκφρασθῇ π. χ. ὁ ἀριθμὸς 8423 εἰς τὸ δωδεκαδικὸν σύστημα, ἢ εἰς τὸ σύστημα δώδεκα ψηφίων.

Τὰ ψηφία τούτου τοῦ συστήματος εἶναι 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, α', β', 0. (μεταχειριζόμεθα ἐκ συνθήκης τὰ δύο ταῦτα γράμματα α', β', διὰ νὰ σημειόνωμεν τοὺς ἀριθμοὺς δέκα καὶ ἕνδεκα).

8423	12		
023	701	12	
11	101	58	12
	5	10	4

(4α'5β')

Τῆς βάσεως δώδεκα ἐκφρασθείσης διὰ 12 εἰς τὸ δωδεκαδικὸν σύστημα, διαιροῦμεν 8423 διὰ 12, διὰ τῆς ὁποίας πράξεως εὑρίσκομεν πηλικὸν 701 καὶ ὑπόλοιπον 11, τὸ ὁποῖον ἐκφράζει τὰς μονάδας τῆς πρώτης τάξεως τοῦ νέου συστήματος, ἀλλὰ 11 γραμμένον εἰς τὸ δεκαδικὸν σύστημα σημαίνει ἕνδεκα, καὶ επομένως πρέπει νὰ ἐκφρασθῇ διὰ β′ εἰς τὸ δωδεκαδικὸν σύστημα. Γράφομεν λοιπὸν κατὰ μέρος ὄχι πλέον 11, ἀλλὰ β′, ὡς ἐκφράζον τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τῆς πρώτης τάξεως.

Παρομοίως εἰς τὴν τρίτην διαίρεσιν, συνάγομεν ὑπόλοιπον 10 ἢ δέκα, τὸ ὁποῖον εἰς τὸ νέον σύστημα ἐκφράζεται διὰ α′. Γράφομεν λοιπὸν α′ εἰς τὰ ἀριστερὰ τῶν δύο ἤδη εὑρεθέντων ψηφίων. Εὑρίσκομεν οὕτως (4α′5β′) τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν μεταφρασθέντα εἰς τὸ δωδεκαδικὸν σύστημα.

§. 122. Ἀντιστρόφως, ἀφ' οὗ γραφθῇ ὁποιοσδήποτε ἀριθμὸς εἰς σύστημα, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι β, δύναται νὰ προτεθῇ τὸ νὰ ἐκφράσωμεν αὐτὸν εἰς τὴν κοινὴν γλῶσσαν, ἤ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ αὐτὸ, νὰ μεταφράσωμεν αὐτὸν εἰς τὸ δεκαδικὸν σύστημα.

Ἔστω ἐν γένει . . . . θηζδγα εἷς ἀριθμὸς γραμμένος εἰς τὸ σύστημα ἀπὸ β ψηφία, α, γ, δ, ζ . . . . ἐκφράζουσι τὰς μονάδας τῆς πρώτης, δευτέρας, τρίτης καὶ ἐφεξῆς τάξεως. Ἕπεται ἐκ τῆς θεμελιώδους ἀρχῆς, συσταθείσης εἰς τὸν ἀριθμὸν 118, ὅτι τὸ ψηφίον τὸ σημειωμένον διὰ τοῦ γ ἐκφράζει μονάδας β φοραῖς μεγαλητέρας παρὰ ἐὰν ἦτον μόνον του· λοιπὸν ἡ σχετική του τιμὴ εἶναι ἴση μὲ τὸ γινόμενον τοῦ γ ἐπὶ β, καὶ δύναται νὰ παῤῥησιασθῇ (ἀρ. 111) διὰ $\gamma \times \beta$ ἢ ἁπλῶς γβ. Παρομοίως τὸ ψηφίον δ ἐκφράζει μονάδας β φοραῖς μεγαλητέρας ἀπὸ τὸ ψηφίον γ. οὕτως ἡ σχετική του τιμὴ εἶναι ἴση μὲ τὸ γινόμενον τοῦ δ ἐπὶ $\beta \times \beta$ ἢ β^2, καὶ δύναται νὰ ἐκφρασθῇ διὰ $\delta\beta^2$.

Εὑρίσκομεν παρομοίως, ὅτι $\zeta\beta^3$, $\eta\beta^4$, $\vartheta\beta^5$.... εἶναι αἱ σχετικαὶ τιμαὶ τῶν ἄλλων ψηφίων· λοιπὸν ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς ἔχει ἔκφρασιν

$$\alpha+\beta\gamma+\delta\beta^2+\zeta\beta^3+\eta\beta^4+\vartheta\beta^5+ \text{ κ. τ. λ. } \ldots$$

Καὶ δίδοντες εἰς τὴν βάσιν β, καὶ εἰς τὰ ψηφία α, γ, δ, ζ.... μερικὰς τιμάς, θέλομεν ἐκτελέσει εἰς τὸ δεκαδικὸν σύστημα ὅλας τὰς ἀριθμητικὰς ἐργασίας, τὰς ὁποίας παῤῥησιάζει ἡ τοιαύτη ἔκφρασις, καὶ οὕτω συνάγομεν τὸν εἰς ταῦτα τὰ μερικὰ δοθέντα ἀνταποκρινόμενον ἀριθμόν, καὶ μεταφρασμένον εἰς τὸ δεκαδικὸν σύστημα.

Προκείσθω π. χ. ὁ ἀριθμὸς (4367) γραμμένος εἰς τὸ σύστημα τὸ ὀκταδικόν, νὰ τραπῇ εἰς τὸ δεκαδικὸν σύστημα. Ὁ ἀριθμὸς οὗτος κατὰ τὴν προτέραν ἔκφρασιν δύναται νὰ λάβῃ τὴν ἀκόλουθον μορφήν.

$$7+6\times8+3\times8^2+4\times8^3.$$

Ἔχομεν κατὰ πρῶτον 7 . . . . $=7$

καὶ . . . . 6×8 . . . . $=48$

μετὰ ταῦτα 8^2, ἢ $8\times8=64$· λοιπὸν 3×8^2

$=3\times64$ . . . . $=192$

τέλος πάντων $8^3=64\times8=512$· λοιπὸν $4\times$

$8^3=4\times512$ . . . . $=2048$

προσθέτοντες τούτους τοὺς ἀριθμοὺς εὑρίσκομεν 2295.

Τὸ κεφάλαιον 2295 εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ (4367) μεταφρασμένου εἰς τὸ δεκαδικὸν σύστημα.

Δυνάμεθα νὰ βεβαιώσωμεν τὴν ἀκρίβειαν ταύτης τῆς πράξεως διὰ τοῦ κανόνος τοῦ ἀριθμοῦ 121.

$$\begin{array}{r|r|r|r}
2295 & 8 & & \\
69 & 286 & 8 & \\
55 & 46 & 35 & 8 \\
7 & 6 & 3 & 4
\end{array}
\qquad (4367).$$

Ἀντιστρόφως, τοῦτο ἐδῶ βεβαιοῦται διὰ τοῦ παρόντος κανόνος, τὸν ὁποῖον ἐκφράζομεν, ὡς ἀκολουθεῖ.

Σχημάτισε κατὰ πρῶτον τὰς διαφορετικὰς δυνάμεις τῆς βάσεως β, γραμμένας εἰς τὸ δεκαδικὸν σύστημα, πολλαπλασίασε μετὰ ταῦτα ὅλα τὰ ψηφία . . . . α, γ, δ, ζ, η, ϑ . . . . . γραμμένα παρομοίως εἰς τὸ δεκαδικὸν σύστημα, ἀμοιβαίως διὰ τῶν ἀριθμῶν 1, β, β^2, β^3, β^4, β^5 . . . . καὶ μετὰ ταῦτα πρόσθες ὅλα τὰ μερικὰ γινόμενα, καὶ οὕτως θέλεις ἔχει τὸν ζητούμενον ἀριθμόν.

Προκείσθω προσέτι ἀριθμὸς (4α′ 5β′) γραμμένος εἰς τὸ δωδεκαδικὸν σύστημα (ἰδὲ ἀρ. 121) νὰ ἐκφρασθῇ εἰς τὸ δεκαδικὸν σύστημα (τὰ γράμματα α′ καὶ β′ ἐκφράζουν τοὺς ἀριθμοὺς δέκα καὶ ἕνδεκα). Ὁ ἀριθμὸς οὗτος βάλλεται κατὰ πρῶτον ὑπὸ τὴν μορφήν.

$$11+5\times12+10\times12^2+4\times12^3$$

Ὅθεν ἔχιμεν.

$\overline{1}^{ον}$	$11 = .$	11
$\overline{2}^{ον}$	$5\times12 = .$	60
$\overline{3}^{ον}$ $12^2=144$· ὅθεν $10\times12^2=$.	$144\times10 = .$	1140
$\overline{4}^{ον}$ $12^3=144\times12=1728$· λοιπὸν	$4\times12^3 = .$	6912
		8423.

Λοιπὸν (4α′5β′) ἰσοδυναμεῖ μὲ 8423 γραμμένον εἰς τὸ δεκαδικὸν σύστημα.

Σ. Κ. Ἡ ἔκφρασις $\alpha+\gamma\beta+\delta\beta^2+\zeta\beta^3+\eta\beta^4+\vartheta\beta^5$ κ.τ.λ. . . . καλεῖται εἰς τὴν ἄλγεβραν τύπος, ἐπειδὴ οὗτος περικλείει ὑπὸ σύντομον μορφὴν τὸ σύστημα τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων, αἵτινες πρέπει νὰ ἐκτελεσθῶσιν ἐπὶ τῶν διαφόρων ἀριθμῶν, διὰ νὰ λύσωμεν γενικόν τι ζήτημα, καὶ νὰ δυνηθῶμεν νὰ ἐξάξωμεν ὅλους τοὺς ἀριθμοὺς, ὅταν ἔχωμεν ζητήματα τοῦ ἰδίου εἴδους, τῶν ὁποίων ἡ ἔκφρασις διαφέρει μόνον κατὰ τὰς ἀριθμητικὰς τιμὰς τῶν δοθέντων.

§. 123. Οἱ προηγούμενοι δύο κανόνες μᾶς ἄγουσιν εἰς τρίτον ἄλλον πλέον γενικὸν, ὅστις ἔχει σκοπὸν νὰ φέρῃ ἀριθμὸν τινὰ ὁποιουδήποτε συστήματος, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι β, εἰς ἄλλο σύστημα, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι γ.

Πέρασε τὸν δεδομένον ἀριθμὸν ἐκ τοῦ συστήματος β εἰς τὸ σύστημα τὸ δεκαδικὸν, κατὰ τὸν κανόνα τοῦ ἀριθμοῦ 122. Μετὰ ταῦτα ἀπὸ τὸ δεκαδικὸν σύστημα εἰς τὸ σύστημα γ, κατὰ τὸν κανόνα τοῦ ἀριθμοῦ 120· καὶ οὕτως ἔχεις τὸ ζητούμενον ἐξαγόμενον.

Προκείσθω π. χ. νὰ περάσωμεν τὸν ἀριθμὸν (23104) τοῦ πενταδικοῦ συστήματος (ἢ ἀπὸ πέντε ψηφία) εἰς τὸ δωδεκαδικὸν σύστημα.

Λαμβάνομεν κατὰ πρῶτον διὰ τοῦτον τὸν ἀριθμὸν μεταμορφωθέντα εἰς τὸ δεκαδικὸν σύστημα 1654, μετὰ ταῦτα διὰ τοῦτον μεταμορφωθέντα εἰς τὸ δωδεκαδικὸν σύστημα (β'5'α). Βεβαιόνομεν δὲ τὴν πρᾶξιν ἐκτελοῦντες τὰς μεταμορφώσεις εἰς τάξιν ἀντίστροφον *).

§. 124. Οἱ τρόποι, διὰ τῶν ὁποίων ἐκτελοῦνται αἱ τέσσαρες θεμελιώδεις πράξεις τῆς ἀριθμητικῆς ἐπὶ ἀριθμῶν γραμμένων εἰς ὁποιονδήποτε σύστημα, δὲν διαφέρουν ἀπὸ ἐκείνας, τὰς ὁποίας ἐσυστήσαμεν διὰ τὸ δεκαδικὸν σύστημα· μόνον πρέπει νὰ ἐνθυμώμεθα καλὰ τὸν νόμον, ὅστις ὑπάρχει μεταξὺ τῶν μονάδων τῶν διαφόρων τάξεων, διὰ νὰ ἠμπορῶμεν κατὰ τὴν

*) Τουτέστι πράττομεν εἰς τὸν ἀριθμὸν (β'5'α') τοῦ συστήματος γ κατὰ τὸν κανόνα 122 καὶ εὑρίσκομεν 1644. Μετὰ ταῦτα ἄγοντες τοῦτον εἰς τὸ σύστημα τῆς βάσεως β κατὰ τὸν κανόνα τοῦ ἀριθ. 120, εὑρίσκομεν (23104). Ὁ Μεταφραστής.

χρείαν νὰ τρέπωμεν τὰς μονάδας ὁποιασδήποτε τάξεως εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως μεγαλητέρας, ἢ κατωτέρας τάξεως.

Διὰ νὰ λάβουν γύμνασιν οἱ ἀρχάριοι εἰς τὰ διάφορα συστήματα τῆς ἀριθμήσεως, θέλομεν προτάξει ἓν παράδειγμα ἑκάστης τῶν τεσσάρων πράξεων, αἱ ὁποῖαι πρέπει νὰ ἐκτελεσθῶσιν εἰς τὸ δωδεκαδικὸν σύστημα.

Ἂς ἐνθυμηθῶμεν δὲ, ὅτι εἰς τοῦτο τὸ σύστημα τὰ ψηφία εἶναι

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, α′, β′, 0.

(α′ καὶ β′ ἐκφράζουν δέκα καὶ ἕνδεκα).

1ον Ἂς προστεθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ 3704α′, β′2956, 27β′α′5, 48α′β′.

Κατὰ πρῶτον εὑρίσκομεν διὰ τὸ ἄθροισμα τῶν ἁπλῶν μονάδων τριάκοντα δύο, τουτέστι δύο δωδεκάδας πλέον 8 μονάδας· γράφομεν λοιπὸν 8 εἰς τὸν βαθμὸν τῶν μονάδων, καὶ κρατοῦμεν τὰς δύο διὰ νὰ τὰς φέρωμεν εἰς τὴν στήλην τῶν μονάδων τῆς δευτέρας τάξεως.

3704α′
β′2956
27β′α′5
48α′β′
15α′678

Τὸ ἄθροισμα τῶν περιεχομένων μονάδων εἰς ταύτην τὴν δευτέραν στήλην εἶναι 31, ἢ 2 μονάδες τῆς τρίτης τάξεως, πλέον 7 μονάδες τῆς δευτέρας· γράφομεν λοιπὸν 7, καὶ κρατοῦμεν τὰς δύο, διὰ νὰ τὰς φέρωμεν εἰς τὴν ἀκόλουθον στήλην.

Καὶ πράττοντες κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἐπὶ τῶν ἄλλων στηλῶν, λαμβάνομεν ἐξαγόμενον 15α′678.

	β′ β′
2ον Ἔστω νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ .	5α′0046
ὁ ἀριθμός	47α′68β′
	121577

Ἐπειδὴ δὲν δυνάμεθα νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ β′ ἢ 11 ἀπὸ τὸ 6, δανειζόμεθα ἀπὸ τὸ ψηφίον 4 μίαν μονάδα, ἥτις ἰσοδυναμεῖ μὲ 12 τῆς ἀκολούθου τάξεως, ὥστε ἔχομεν 18, καὶ λέγομεν 11 ἀπὸ 18 μένει 7.

Περνῶντες εἰς τὴς ἀκόλουθον ἀφαίρεσιν, ἐπειδὴ δὲν δυνάμεθα νὰ ἀφαιρέσωμεν 8 ἀπὸ 3, δανειζόμεθα μίαν μονάδα ἀπὸ τὸ κατ' ἀριστερὰν σημαντικὸν ψηφίον, ὅταν εὑρίσκεται μηδενικόν. Αὕτη ἰσοδυναμεῖ μὲ 12 ἢ 11 πλέον 1 τῆς ἀκολούθου τάξεως· αὕτη ἰσοδυναμεῖ μὲ 11 πλέον 1 τῆς ἀκολούθου αὐτῆς τάξεως. Τέλος πάντων αὐτὴ ἡ τελευταία ἰσοδυναμεῖ μὲ δώδεκα ἀπὸ ἐκείνας ἐπὶ τῶν ὁποίων ἐργαζόμεθα, καὶ λέγομεν 12 καὶ 3 κάμνουν 15, 8 ἀπὸ 15 μένουν 7.

Εἰς τὰς ἀκολούθους δύο ἀφαιρέσεις, θεωροῦμεν ἀντὶ τῶν μηδενικῶν ἀντεισαγμένα τὰ 11 ἢ β′, καὶ ἐξακολουθοῦμεν τὴν πρᾶξιν οὕτως ἕως εἰς τὸ τέλος, εὑρίσκομεν δὲ ἐξαγόμενον 121577. Τοῦτο βεβαιοῦται προστιθεμένου τοῦ μικροτέρου ἀριθμοῦ εἰς τὸ ὑπόλοιπον.

Ἂς πολλαπλασιασθῇ 3407α′ ἐπὶ 5α′68.

Ὑποθέτομεν, ὅτι ἔχομεν ὑπὸ τὰ βλέμματα πίνακα πολλαπλασιασμοῦ ἐκτεινόμενον ἕως εἰς 11 ἢ β′, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ μεγαλήτερον ψηφίον τοῦ συστήματος.

Λοιπὸν πολλαπλασιάζομεν κατὰ πρῶτον 3407α′ ἐπὶ 8, καὶ λέγομεν 8 φοραῖς α′ ἢ δέκα δίδουσιν 80, ὀγδοῆντα, ἢ 6 δωδεκάδες καὶ 8 μονάδες τῆς πρώτης τάξεως, γράφομεν 8 καὶ κρατοῦμεν 6. Μετὰ ταῦτα 8 φοραῖς 7 δίδουσι πεντήκοντα ἕξ, καὶ 6 τὰ κρατηθέντα, κάμνουσιν ἑξήκοντα δύο, ἢ 5 μονάδες τῆς τρίτης τάξεως καὶ δύο τῆς δευτέρας, τὰς ὁποίας γράφομεν εἰς τὸν βαθμὸν τούτων τῶν μονάδων· κρατοῦμεν δὲ 5 διὰ νὰ τὰς φέρωμεν εἰς τὸ γινόμενον τῶν μο-

```
   3407α′
   5α′68
---------
  228528
 1803β0
294664
148332
---------
177608828
```

νάδων τῆς τρίτης τάξεως. Ἐξακολουθοῦντες οὕτω τὴν ἐργασίαν λαμβάνομεν μερικὸν γινόμενον 728528· ὅσον δὲ διὰ τὰ γινόμενα τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὰ ἄλλα ψηφία τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, ἀποδείχνομεν διὰ συλλογισμῶν ἀναλόγων, μὲ τοὺς ὁποίους ἐκφράσαμεν (ἀρ. 121) διὰ τὸ δεκαδικὸν σύστημα, ὅτι πρέπει καὶ ἐδῶ νὰ πολλαπλασιάσωμεν διαδοχικῶς τὸν πολλαπλασιαστιαστέον ἐφ' ἕκαστον τῶν ψηφίων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, θεωρουμένων ὡς ἁπλῶν μονάδων, καὶ νὰ γράφωμεν τὰ γινόμενα ὑπὸ τὸ προηγούμενον, προχωροῦντές τα μίαν τάξιν πρὸς τὰ ἀριστερά, καὶ τέλος πάντων προσθέτοντες ὅλα ταῦτα τὰ γινόμενα, εὑρίσκομεν τὸ ὁλκὸν γινόμενον 177608828.

4ον. Βεβαιόνομον δὲ ταύτην τὴν πρᾶξιν διὰ τῆς διαιρέσεως· πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὸ ληφθὲν γινόμενον δι' ἑνὸς τῶν παραγόντων. π. χ. τοῦ 5α'68.

```
177608828 | 5α'68
          |-------
1βα'08    | 3407α'
 3α'082
  4α'968
  0000
```

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ψηφίον τῶν ἀνωτέρων μονάδων τοῦ πηλίκου, πρέπει νὰ λάβωμεν τὰ πρῶτα πέντε ψηφία εἰς τὰ ἀριστερὰ τοῦ διαιρετέου, καὶ νὰ διαιρέσωμεν 17760 διὰ 5α'68, διὰ τοῦτο ζητοῦμεν εἰς τὸ 17 ἢ 19, ποσάκις εἰσέρχεται τὸ 5· εἰσέρχεται δὲ τρεῖς φοραῖς. Λοιπὸν γράφομεν 3 εἰς τὸ πηλίκον. Πολλαπλασιάζοντες τὸν διαιρέτην διὰ 3, καὶ ἀφαιροῦντες τὸ γινόμενον ἐκ τοῦ πρώτου μερικοῦ διαιρετέου, λαμβάνομεν ὑπόλοιπον 1β'α0, τὸ ὁποῖον ἀπολουθούμενον ἐκ τοῦ ψηφίου 8, δίδει 1β'α'08, δεύτερον μερικὸν διαιρετέον, ἐπὶ τοῦ ὁποίου πράττομεν, ὡς ἐπὶ τοῦ προηγουμένου.

Διαιροῦντες 1β'α'08 διὰ 5α'68 ἢ 1β' διὰ 5, τουτέστι 23 διὰ 5 ἔχομεν πηλίκον 4, τὸ ὁποῖον γράφομεν εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ προηγουμένου, καὶ ὑπόλοιπον 3α'0· καὶ ἐπειδὴ καταβιβασθέντος τοῦ ἀκολούθου ψηφίου, ὁ νέος μερικὸς διαιρετέος 3α'08 δὲν περιέχει τὸν διαιρέτην, θέτομεν 0 εἰς τὸ πηλίκον, καὶ κατεβάζομεν τὸ ψηφίον 2 τοῦ διαιρετέου, ὥστε συνάγομεν 3α'082 νέον μερικὸν διαιρετέον.

Καὶ ἐκτελοῦντες ἐπὶ τούτου, ὡς ἐπὶ τῶν προηγουμένων εὑρίσκομεν πηλίκον 7, καὶ ὑπόλοιπον 4α'96. Τέλος πάντων καταβιβάζοντες τὸ τελευταῖον ψηφίον τοῦ διαιρετέου, καὶ διαιροῦντες 4α'0968 διὰ 5α'68 εὑρίσκομεν α' πηλίκον, καὶ 0 ὑπόλοιπον.

Λοιπὸν 3407α' εἶναι τὸ ζητούμενον πηλίκον *).

Ὑποχρεόνομεν δὲ τοὺς ἀρχαρίους νὰ γυμνασθῶσι καὶ μὲ ἄλλα παραδείγματα λαμβανόμενα κατὰ τύχην, καὶ ἐπὶ διαφόρων συστημάτων, μάλιστα ἐπὶ τῶν δύο τελευταίων ἐργασιῶν. Ἡ τοιαύτη γύμνασις θέλει τοὺς γυμνάσει ἐξαίρετα εἰς τὸν ὑπολογισμόν.

§. 125. Τὸ ζήτημα τοῦ ἀριθμοῦ 123, τὸ ὁποῖον ἔχει σκοπὸν νὰ περάσῃ ἀριθμός τις ἀπὸ ὁποιονδήποτε σύστημα β εἰς ἓν ἄλλο σύστημα γ, δύναται νὰ λυθῇ

---

*) 17760 διαιρεῖται διὰ τοῦ 5α'68. Οὕτως 5 εἰς 17 δίδει 3, πολλαπλασιάζομεν 3 ἐπὶ 5α'68· πράττομεν δὲ οὕτως· 3 φοραῖς 8 δίδει 24 ἢ 2 δωδεκάδες· 3 φοραῖς 6 δίδει 18 καὶ 2 δίδει 20 δωδεκάδας, ἢ 1 μονάδα τῆς τρίτης τάξεως, καὶ 8 δωδεκάδας· 3 φοραῖς α' δίδει 30 τῆς τρίτης τάξεως καὶ 1 τὸ κρατηθὲν σχηματίζουν 31 ἢ 2 τῆς τετάρτης καὶ 7 τῆς τρίτης· πάλιν 3 φοραῖς 5 κάμνουν 15 τῆς τετάρτης, καὶ 2 τὰ κρατηθέντα κάμνουν 17 ἢ 1 τῆς πέμπτης, καὶ 5 τῆς τετάρτης, ὥστε τὸ γινόμενον εἶναι 15780. Ὁ Μεταφραστής.

κατ' εὐθεῖαν, τουτέστι χωρὶς νὰ ἔχωμεν ἀνάγκην νὰ περάσωμεν κατὰ πρῶτον ἐκ τοῦ συστήματος β εἰς τὸ δεκαδικὸν σύστημα, καὶ μετὰ ταῦτα ἀπὸ τοῦτο εἰς τὸ σύστημα γ. Ἀρκεῖ τῷ ὄντι νὰ μεταφράσωμεν τὴν βάσιν γ εἰς τὸ σύστημα β. καὶ νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸν κανόνα τοῦ ἀριθμοῦ 121 ἐκτελοῦντες τὰς πράξεις εἰς τὸ ἴδιον σύστημα.

Οὕτως διὰ νὰ ἀπεράσωμεν τὸν (23104) (ὅρα ἀρ. 123) τοῦ πενταδικοῦ συστήματος εἰς τὸ δωδεκαδικὸν, πρέπει (ἀρ. 121) νὰ διαιρέσωμεν 23104 διὰ 22 ἢ δώδεκα γραμμένον εἰς τὸ πενταδικὸν σύστημα, καὶ νὰ κάμωμεν τὴν διαίρεσιν εἰς τοῦτο τὸ σύστημα· ἐντεῦθεν λαμβάνομεν ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον θέλει ἐκφράζει τὰς μονάδας τῆς πρώτης τάξεως εἰς τὸ δωδεκαδικὸν σύστημα, καὶ πηλίκον, τὸ ὁποῖον διαιροῦμεν ἀκόμη διὰ τοῦ δώδεκα ἢ 22, διὰ νὰ ἐξάξωμεν τὰς μονάδας τῆς δευτέρας τάξεως, καὶ οὕτως ἐφεξῆς *).

*) Ἐπειδὴ θέλομεν νὰ τρέψωμεν τὸν ἀριθμὸν τοῦ συστήματος β εἰς ἀριθμὸν συστήματος γ, εἶναι φανερὸν, ὅτι ἐὰν θεωρήσωμεν τὸν ἀριθμὸν τοῦ συστήματος β ἠγμένον εἰς ἁπλᾶς μονάδας, καὶ διαιρέσωμεν αὐτὰς διὰ τῶν μονάδων, τὰς ὁποίας περιέχει ἡ βάσις γ, θέλομεν εὕρει πηλίκον ἐκφράζον μονάδας γ φοραῖς μεγαλητέρας ἀπὸ τὰς ἁπλᾶς μονάδας, τουτέστι μονάδας τῆς δευτέρας τάξεως τοῦ συστήματος γ, καὶ τὸ ὑπόλοιπον μὴ σχηματίζον γ μονάδας, θέλει ἐκφράζει τὰς μονάδας τῆς πρώτης τάξεως τοῦ συστήματος γ. Ἐὰν τώρα διαιρέσωμεν τὸ εὑρεθὲν πηλίκον, ἢ τὰς μονάδας τῆς δευτέρας τάξεως, διὰ τοῦ συστήματος γ, ἤγουν διὰ τοῦ ἰδίου διαιρέτου, θέλομεν εὕρει τὰς μονάδας τῆς τρίτης τάξεως τοῦ συστήματος γ, καὶ τὸ ὑπόλοιπον ἐκφράζει ἐκείνας τῆς δευτέρας, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Ἀλλ' ὁ ἀριθμὸς τοῦ συστήματος β ἠγμένος εἰς τὰς ἁπλᾶς του μονάδας, εἶναι ἴσος μὲ τὰς μονάδας τῆς πρώτης τάξεως, τῆς δευτέρας καὶ ἐφεξῆς. Διὰ τοῦτο ἀντὶ νὰ διαιρέσωμεν αὐτὸν οὕτως ἠγμένον, διαιροῦμεν ξεχωριστὰ τὰς μονάδας τῶν διαφόρων τάξεών του, διὰ τοῦ διαιρέτου, ὅστις ἔχει τόσας μονάδας, ὅσα ψηφία ἔχει τὸ σύστημα γ· ἐπειδὴ διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμὸν δι' ἄλλου εἶναι ἀνάγκη νὰ γράψωμεν τὸν διαιρετέον καὶ διαιρέ-

Δὲν προχωροῦμεν περαιτέρω εἰς ταύτας τὰς πράξεις, αἱ ὁποῖαι δὲν προσφέρουν κἀμμίαν δυσκολίαν.

§. 126. Γενικὴ παρατήρησις. Τὸ δωδεκαδικὸν σύστημα προσφέρει κἄποιαν ὠφέλειαν ἐπάνω εἰς τὸ δεκαδικὸν σύστημα, ἐπειδὴ ἡ βάσις τοῦ δώδεκα περιέχει μεγαλήτερον ἀριθμὸν παραγόντων ἀπὸ τὸ 10. Τῷ ὄντι δώδεκα διαιρεῖται διὰ 2, 3, 4, 6, ἐνῷ οἱ μόνοι παράγοντες τοῦ 10 εἶναι τὸ 2 καὶ 5.

Μ' ὅλον τοῦτο εἶναι ἀδύνατον νὰ ἀντεισάξωμεν τὸ δωδεκαδικὸν σύστημα, ἢ κάθε ἄλλο ἀντὶ τοῦ δεκαδικοῦ, χωρὶς νὰ ἀντικαταστήσωμεν ἀντὶ τῆς παλαιᾶς ὀνοματολογίας μίαν νέαν ἀναλογωτέραν εἰς τὸ παραδεχθησόμενον σύστημα, καὶ ἐκφράζουσαν εὐκολώτερον τοὺς διὰ ψηφίων γεγραμμένους ἀριθμούς.

Θέλομεν δὲ πολλάκις ἰδεῖ, ὅτι αἱ πλειότεραι ἰδιότητες ἀφ' ὅσας ἀνεκαλύψαμεν τῶν ἀριθμῶν, εἶναι πάντοτε ἀληθεῖς, ὁποιονδήποτε καὶ ἂν ἦναι τὸ σύστημα, τὸ ὁποῖον παραδεχόμεθα. Μερικαὶ θέλουν φανῇ, ὅτι ἀνήκουσι μόνον εἰς τὸ δεκαδικὸν σύστημα· ἀλλ' αἱ ἀνάλογοι τούτων ὑπάρχουσιν ἐπίσης καὶ εἰς τὰ ἄλλα συστήματα.

Ἡ χρῆσις τῶν γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου πρὸς παράστασιν τῶν ἀριθμῶν, εἶναι πολλὰ ἐπιτηδεία εἰς τὸ νὰ ἐξάξωμεν τὴν γενικότητα τούτων τῶν ἰδιοτήτων, ἐπειδὴ δύνανται νὰ παῤῥησιάζωσιν ἀριθμοὺς προφερο-

---

την διὰ ψηφίων, καὶ ὄντος τοῦ διαιρετέου γραμμένου εἰς τὸ σύστημα β, ἀνάγκη εἶναι νὰ γράψωμεν καὶ τὸν διαιρέτην μὲ τὰ ψηφία τοῦ ἰδίου συστήματος, τουτέστι τὸν ἀριθμὸν, ὅστις ἐκφράζει πόσα ψηφία ἔχει τὸ ἄλλο σύστημα, ἢ τὸν ὅστις ἔχει τόσας μονάδας, ὅσας ἐκφράζει ἡ βάσις γ. Οὕτως λοιπὸν, ἀριθμόν τινὰ τοῦ πενταδικοῦ συστήματος, θέλοντες νὰ τρέψωμεν εἰς τὸ δωδεκαδικὸν σύστημα, πρέπει νὰ γράψωμεν τὸ 12 διὰ τῶν ψηφίων τοῦ πενταδικοῦ συστήματος, ἢ εἰς τὸ πενταδικὸν σύστημα, ἤγουν διὰ 22. Ὁ Μεταφραστής.

μένους, ἢ ἐκφραζομένους εἰς ὁποιονδήποτε σύστημα ἀριθμήσεως.

§. β'. Ἀρχαὶ περὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς Διαιρέσεως.

Διαιρετότης τῶν ἀριθμῶν.

§. 127. Ἀπεδείξαμεν ἤδη εἰς τὸν ἀριθμὸν 25 καὶ 26 1ον ὅτι τὸ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμὸν ἐπὶ γινόμενον δύο ἢ περισσοτέρων παραγόντων, εἶναι τὸ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν τοῦτον ἐφ' ἕκαστον τῶν παραγόντων διαδοχικῶς.

2ον Ὅτι τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν εἶναι τὸ αὐτὸ, εἰς ὁποίαν τάξιν ἐκτελεσθῇ ὁ πολλαπλασιασμός.

Μ' ὅλον ὅτι οἱ συλλογισμοὶ ἐσαφηνίσθησαν διὰ μερικῶν ἀριθμῶν, εἶναι ὅμως ἐπίσης γενικοὶ, καὶ διὰ νὰ τοὺς βεβαιωθῶμεν, ἀρκεῖ νὰ τοὺς ἐπαναλάβωμεν, γράφοντές τους διὰ τῶν γραμμάτων α, β, γ, δ . . .

Πρόκειται λοιπὸν μόνον νὰ βεβαιώσωμεν τὴν ἀκρίβειαν τῆς δευτέρας προτάσεως, ὁποῖος καὶ ἂν ἦναι ὁ ἀριθμὸς τῶν παραγόντων, τοὺς ὁποίους μέλλομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν μεταξύ των.

Κατ' ἀρχὰς ἂς παρατηρήσωμεν, ὅτι ἐὰν εἴχαμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμόν τινὰ Ν ἐπὶ β, καὶ νὰ πολλαπλασιάσωμεν μετὰ ταῦτα τὸ ἐξαγόμενον γινόμενον ἐπὶ γ, ἔπρεπε παρομοίως νὰ πολλαπλασιάσωμεν κατὰ πρῶτον τὸ Ν ἐπὶ γ, καὶ μετὰ ταῦτα τὸ ἐξαγόμενον γινόμενον ἐπὶ β.

Ἢ κατ' ἄλλον τρόπον, εἰς ἕνα πολλαπλασιασμὸν περισσοτέρων ἀπὸ δύο παράγοντας, δυνάμεθα νὰ ἀλλάξωμεν τὴν τάξιν τῶν δύο τελευταίων πολλαπλασιασμῶν, χωρὶς νὰ ἀλλάξωμεν τὸ γινόμενον.