ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε'.

Γενικαὶ Ἰδιότητες τῶν ἀριθμῶν.

§. 111. Εἰσαγωγή. Πρὶν προχωρήσωμεν εἰς τὴν τῶν ἀριθμῶν ἐπιστήμην, διὰ νὰ ἀνακαλύψωμεν εὐκολώτερα νέας αὐτῶν ἰδιότητας, εἶναι ἀναπόφευκτον νὰ δανεισθῶμεν ἀπὸ τὴν Ἄλγεβραν μέρη τινὰ τῆς ὕλης της, καθὼς τὰ γράμματα καὶ τὰ σημεῖα, διὰ τῶν ὁποίων ἐκφράζομεν μὲ γενικὸν καὶ σύντομον τρόπον τὰς πράξεις καὶ τοὺς συλλογισμοὺς τοὺς εἰς τὴν λύσιν τινῶν ζητημάτων ἀπαιτουμένους.

Τὰ στοιχεῖα ταῦτα εἶναι δέκα τὸν ἀριθμὸν ἀρχικὰ, τὰ ὁποῖα κατὰ σειρὰν θέλομεν γνωστοποιήσει.

1^ον. Τὰ γράμματα, τὰ ὁποῖα μεταχειριζόμεθα ἀντὶ χαρακτήρων ἢ ψηφίων πρὸς παράστασιν τῶν ἀριθμῶν. Ἡ χρῆσις αὐτῶν παῤῥησιάζει ἐν ταυτῷ γενικωτέραν καὶ συντομωτέραν γραφὴν, παρὰ τὴν τῶν ψηφίων· καὶ ἐκ ταύτης ἐξάγεται καλήτερα ἡ ὕπαρξις τοιαύτης ἰδιότητος, ὡς πρὸς μίαν ἢ πολλὰς κλάσεις ἀριθμῶν.

2^ον. Τὸ σημεῖον $+$, μὲ τὸ ὁποῖον σημειόνομεν τὴν πρόσθεσιν δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν, καὶ τὸ ὁποῖον καλεῖται πλέον.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΤΟΜΕΑΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΕΡΕΥΝΩΝ ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ: ΕΠ. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ Θ. ΠΕΤΣΙΟΣ
Ε.Υ. Δ.... ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

Οὕτως 45+23 ἐκφράζεται 45 πλέον 23, ἢ 45 αὐξανόμενον ἀπὸ 23. Παρομοίως α+β+γ προφέρεται α πλέον β πλέον γ, ἢ ὁ ἀριθμὸς ὁ σημειωμένος ἀπὸ α αὐξανόμενος ἐκ τοῦ ἐκφραζομένου ἀριθμοῦ διὰ β, καὶ ἐκ τοῦ ἐκφραζομένου διὰ γ.

3ον. Τὸ σημεῖον —, τὸ ὁποῖον λέγεται μεῖον, καὶ τὸ ὁποῖον μεταχειριζόμεθα διὰ νὰ σημειόνωμεν τὴν ἀφαίρεσιν δύο ἀριθμῶν τοῦ ἑνὸς ἀπὸ τὸν ἄλλον.

Οὕτως 73 — 49 προφέρεται 73 μεῖον 49, ἢ 73 ἠλαττωμένον ἀπὸ 49, ἢ προσέτι ἡ διαφορὰ τοῦ 73 καὶ 49· α — β λέγεται α μεῖον β.

4ον. Τὸ σημεῖον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, τὸ ὁποῖον εἶναι ×, ἢ στιγμὴ βαλλομένη μεταξὺ δύο ἀριθμῶν, καὶ ἐκφραζομένη „πολλαπλασιασμένον ἐπί."

Οὕτως 29×35 ἢ 29 . 35 ἐκφράζεται οὕτως· 29 πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ 35, ἢ τὸ γινόμενον τοῦ 29 ἐπὶ 35· α×β, ἢ α . β προφέρεται α πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ β.

Σ. Κ. Ὅταν οἱ ἀριθμοὶ τῶν ὁποίων θέλομεν νὰ δείξωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν ἐκφέρωνται διὰ γραμμάτων, ἐσυμφωνήθη νὰ γράφωνται ὁ εἷς κατ' ἐξακολούθησιν τοῦ ἄλλου χωρὶς παρένθεσιν σημείου· οὕτως αβ σημαίνει ἀκόμη α πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ β· ἀλλ' ἐννοεῖται καλῶς, ὅτι ἡ σημείωσις αβ εἶναι εἰς χρῆσιν μόνον, ὅταν οἱ ἀριθμοὶ σημειόνωνται μὲ γράμματα· ἐπειδὴ ἂν θέλωμεν, φερ' εἰπεῖν, νὰ παραστήσωμεν τὸ γινόμενον τοῦ 5 ἐπὶ 6, καὶ γράψωμεν 56, ἠθέλαμεν συγχίσει ταύτην τὴν σημείωσιν μὲ τὸν ἀριθμὸν 56. Κατὰ ταύτην λοιπὸν τὴν περίστασιν ἀφεύκτως μεταχειριζόμεθα τὸ σημεῖον × ἢ μίαν στιγμὴν, καὶ γράφομεν 5×6, ἢ 5 . 6.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΤΟΜΕΑΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΕΡΕΥΝΩΝ ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ: ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ Θ. ΠΕΤΣΙΟΣ
Ε.Υ.Δ της Κ.Π. ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

$\overline{5}^{ον.}$ Τὸ σημεῖον τῆς διαιρέσεως, τὸ ὁποῖον σύγκειται ἀπὸ δύο στιγμὰς :, καὶ τὸ ὁποῖον θέτομεν μεταξὺ τοῦ διαιρετέου καὶ διαιρέτου· ἢ μίαν γραμμὴν — ἄνω τῆς ὁποίας θέτομεν τὸν διαιρετέον, καὶ ὑποκάτω τὸν διαιρέτην· οὕτως $24:6$ ἢ $\frac{24}{6}$ ἐκφράζεται 24 διαιρεθὲν διὰ 6, ἢ τὸ πηλίκον τοῦ 24 διὰ τοῦ 6· παρομοίως $\alpha:\beta$ ἢ $\frac{\alpha}{\beta}$ ἐκφράζεται α διαιρεθὲν διὰ τοῦ β. Ἡ σημείωσις $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι ἡ πλέον εὔχρηστος.

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΕΡΕΥΝΩΝ ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΤΟΜΕΑΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ: ΕΠ. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ Θ. ΠΕΤΣΙΟΣ

$\overline{6}^{ον.}$ Ὁ συντελεστὴς, σημεῖον τὸ ὁποῖον μεταχειριζόμεθα, ὅταν εἷς ἀριθμὸς ἐκφραζόμενος διὰ γράμματος πρέπει νὰ προστεθῇ εἰς τὸν ἴδιον ἑαυτόν του πολλαῖς φοραῖς· οὕτως ἀντὶ νὰ γράψωμεν $\alpha+\alpha+\alpha+\alpha+\alpha$, ὅστις παρασταίνει τὸν ἀριθμὸν α ἡνωμένον τετράκις εἰς τὸν ἑαυτόν του, γράφομεν 5α. Παρομοίως 11α παρασταίνει α νὰ προστεθῇ εἰς τὸν ἑαυτόν του 10 φοραῖς· $12\alpha\beta$ ἐκφράζει τὸ γινόμενον τοῦ α ἐπὶ β προσθεμένον 11 φοραῖς εἰς τὸν ἑαυτόν του.

Ὁ συντελεστὴς εἶναι ὁ μερικὸς ἀριθμὸς γραμμένος εἰς τὰ ἀριστερὰ ἄλλου σημειωμένου δι' ἑνὸς ἢ πολλῶν γραμμάτων, παριστῶν τὸν ἀριθμὸν τῶν φορῶν, πλέον μία, κατὰ τὰς ὁποίας ὁ ἀριθμὸς οὗτος ἐπροστέθη εἰς τὸν ἑαυτόν του.

$\overline{7}^{ον.}$ Ὁ ἐκθέτης, σημεῖον τὸ ὁποῖον μεταχειριζόμεθα, ὅταν εἷς ἀριθμὸς παῤῥησιαζόμενος διὰ γράμματος, πολλαπλασιάζεται πολλαῖς φοραῖς ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του.

Οὕτως ἀντὶ νὰ γραφωμεν $\alpha\times\alpha\times\alpha\times\alpha\times\alpha$ ἢ ααααα, γράφομεν ἁπλούστερον α^5, τὸ ὁποῖον δηλοῖ α πολλαπλασιασθὲν τετράκις ἐφ' ἑαυτό· β^6 ἐκφράζει β

Ε. Σ. τ.Π ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

πολλοπλασιασθὲν πεντάκις ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του. Ὁ ἐκθέτης εἶναι ἀριθμὸς, ὅστις γράφεται εἰς τὰ δεξιὰ, καὶ ὀλίγον τι ἄνω τοῦ γράμματος, ἐκφράζει δὲ πόσαις φοραῖς πλέον μίαν ὁ διὰ γράμματος ἐκτεθεὶς ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἐφ' ἑαυτὸν, ἢ πόσαις φοραῖς τὸ γράμμα τοῦτο εἶναι παράγων εἴς τι γινόμενον.

Καλεῖται δύναμις τὸ ἐξαγόμενον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἀριθμοῦ τινὸς πολλαῖς φοραῖς ἐφ' ἑαυτὸν, καὶ βαθμὸς τῆς δυνάμεως, ὁ ἐκθέτης· τουτέστιν ὁ ἀριθμὸς τῶν φορῶν, πλέον μίαν, κατὰ τὰς ὁποίας ὁ τοιοῦτος ἀριθμὸς πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐφ' ἑαυτόν. Οὕτως $α^5$ προφέρεται ἀκόμη α νὰ ὑψωθῇ εἰς $\overline{5}^{ην}$ δύναμιν, ἢ α $\overline{5}^{η}$ δύναμις· $β^6$ ἐκφράζεται, β $\overline{6}^{η}$ δύναμις.

$8^{ον}$ Τὸ σημεῖον $\sqrt{}$, τὸ ὁποῖον προτάττομεν εἰς ἀριθμόν τινα, ὅταν δεικνύωμεν, ὅτι ἐξάγομεν ἐκ τοῦ τοιούτου ἀριθμοῦ μίαν ῥίζαν ἑνὸς βαθμοῦ. Οὕτως, τὸ $\sqrt[3]{α}$ προφέρεται ῥίζα τρίτη τοῦ α, $\sqrt[4]{β}$ προφέρεται ῥίζα τετάρτη τοῦ β.

Καλεῖται ῥίζα $2^{+α}$, $3^{+η}$, $4^{+η}$, κτλ. ἑνὸς ἀριθμοῦ ἕνας ἄλλος ἀριθμὸς, ὅστις ὑψωμένος εἰς $2^{+αν}$, $3^{+ην}$, $4^{+ην}$ . . . δύναμιν, δύναται νὰ προάξῃ τὸν πρῶτον ἀριθμόν. Οὕτως 3 εἶναι ἡ $2^{+α}$ ῥίζα τοῦ 9, ἐπειδὴ 3 φοραῖς 3 σχηματίζουν τὸ 9· 7 εἶναι ἡ $2^{+α}$ ῥίζα τοῦ 49, ἐπειδὴ 7 φοραῖς 7 σχηματίζουν τὸ 49· 4 εἶναι ἡ $3^{+η}$ ῥίζα τοῦ 64, ἐπειδὴ 4 φοραῖς 4 κάμνουν 16, καὶ 4 φοραῖς 16 κάμνουν 64.

Ε.Υ.Δ της Κ.τ.Π
ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

Αἱ ῥίζαι $\overset{+\alpha}{2}$ καὶ $\overset{+\eta}{3}$ καλοῦνται ἀκόμη ῥίζα, ἡ μὲν τετραγωνικὴ, καὶ ἡ ἄλλη κυβική. Ὅταν θέλωμεν νὰ φανερώσωμεν ἁπλῆν ἐξαγωγὴν ῥίζης τετραγωνικῆς ἢ $\overline{2}^{\alpha\varsigma}$, γράφομεν μόνον ἔμπροσθεν τοῦ ἀριθμοῦ τὸ σημεῖον $\sqrt{}$, χωρὶς νὰ θέσωμεν κἀνὲν σημεῖον ἐντὸς αὐτοῦ. Οὕτως $\sqrt{\alpha}$ φανερόνει ῥίζαν τετραγωνικὴν ἢ $\overline{2}^{\alpha\nu}$ τοῦ α.

$\overline{9}^{o\nu}$ Τὸ σημεῖον, διὰ τοῦ ὁποίου φανερόνομεν, ὅτι δύο ποσότητες εἶναι ἴσαι, εἶναι τὸ $=$, καὶ ἐκφράζεται εἶναι ἴσον μὲ, ἢ ἁπλούστερα ἴσον· οὕτως $\alpha=\beta$ ἐκφράζει, ὅτι α εἶναι ἴσον μὲ τὸ β, ἢ α ἴσον β.

Διὰ νὰ ἐκφράσωμεν μὲ συντομίαν, ὅτι ἡ διαφορὰ τοῦ 36 καὶ 25 εἶναι ἴση μὲ 11 γράφομεν $36 - 25 = 11$· τουτέστι 36 μεῖον 25 ἴσον 11.

Αἱ ἐκφράσεις $\alpha=\beta$, $36-25=11$ καλοῦνται Ἰσότητες· τὸ μέρος εἰς τὰ ἀριστερὰ τοῦ σημείου $=$ καλεῖται πρῶτον μέλος, καὶ τὸ μέρος εἰς τὰ δεξιὰ, δεύτερον μέλος.

$\overline{10}^{o\nu}$ Τὸ σημεῖον τῆς ἀνισότητος $>$, τὸ ὁποῖον μεταχειριζόμεθα, διὰ νὰ ἐκφράσωμεν, ὅτι μία ποσότης εἶναι μεγαλητέρα ἢ μικροτέρα ἄλλης· οὕτως $\alpha>\beta$ σημαίνει, ὅτι α εἶναι μεγαλήτερον τοῦ β· $\alpha<\beta$ σημαίνει, ὅτι α εἶναι μικρότερον τοῦ β· τουτέστιν ὅτι τὸ ἄνοιγμα τοῦ σημείου πρέπει νὰ εἶναι γυρισμένον πρὸς τὸ μέρος τῆς μεγαλητέρας ποσότητος.

§. 112. Πρὸς κατάληψιν δὲ τῆς χρήσεως τούτων τῶν διαφόρων σημείων, καὶ τῆς ἁπλότητος τῆς ἀλγεβραϊκῆς γλώσσης, ἂς κάμωμεν μερικὰς ἐφαρμογάς.

Ἂν ὑποθέσωμεν κατὰ πρῶτον, ὅτι θέλομεν νὰ ἐκφράσωμεν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς α πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ 3 φοραῖς ἐφ' ἑαυτὸν, καὶ ὅτι τὸ ἐξαχθὲν γινόμενον πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ 3 φοραῖς διαδοχικῶς·

Ε.Τ.Δ. τμ. Κ.τ.Π. ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

ἐπὶ β, καὶ ὅτι τέλος πάντων τὸ νέον τοῦτο γινόμενον πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ 2 φοραῖς διαδοχικῶς διὰ τοῦ γ, γράφομεν μόνον $\alpha^4\beta^3\gamma^2$.

Ὅταν ἐκφράζωμεν, ὅτι τοῦτο τὸ τελευταῖον ἐξαγόμενον πρέπει νὰ προστεθῇ 6 φοραῖς εἰς ἑαυτὸ, ἤγουν ὅτι πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 7, γράφομεν $7\alpha^4\beta^3\gamma^2$.

Παρομοίως $6\alpha^5\beta^2$ εἶναι ἡ σύντομος ἔκφρασις τοῦ 6 φοραῖς τὸ γινόμενον τῆς $5^{ης}$ δυνάμεως τοῦ α ἐπὶ τὴν $2^{αν}$ δύναμιν τοῦ β.

$3\alpha - 5\beta$ εἶναι ἡ σύντομος ἔκφρασις τῆς διαφορᾶς μεταξὺ τοῦ τριπλοῦ τοῦ α καὶ τοῦ πενταπλοῦ τοῦ β.

$2\alpha^2 - 3\alpha\beta + 4\beta^2$ εἶναι ἡ σύντομος ἔκφρασις τοῦ διπλοῦ τοῦ τετραγώνου α, ἠλαττωμένου κατὰ τὸ τριπλοῦν τοῦ γινομένου α ἐπὶ β, καὶ αὐξανομένου ἐκ τοῦ τετραπλοῦ τοῦ τετραγώνου τοῦ β.

Καλεῖται Μονώνυμον ἡ ποσότης μ' ἕνα μόνον ὅρον, ἢ ἁπλούστερα ὅρος ἀλγεβραϊκή τις ποσότης, ἥτις δὲν ἑνόνεται μὲ καμμίαν ἄλλην διὰ τοῦ σημείου τῆς προσθέσεως ἢ τῆς ἀφαιρέσεως, καὶ Πολυώνυμον ἡ ποσότης μὲ πολλοὺς ὅρους, ἀλγεβραϊκή τις ἔκφρασις, σύνθετος ἀπὸ πολλὰ μέρη χωρισμένα διὰ τοῦ $+$ καὶ $-$· οὕτως 3α, $5\alpha^2$, $7\alpha^3\beta^2$ εἶναι μονώνυμα· $3\alpha - 5\beta$, $2\alpha^2 - 3\alpha\beta + 4\beta^2$ εἶναι πολυώνυμα. Ἡ πρώτη τῶν δύο τούτων ἐκφράσεων καλεῖται διώνυμον, ἐπειδὴ ἔχει δύο ὅρους· ἡ δευτέρα, τριώνυμον, ἐπειδὴ ἔχει τρεῖς ὅρους, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

§. 113. Ἂς ἴδωμεν τώρα πῶς δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν ἐπὶ τῶν ἀλγεβραϊκῶν ἐκφράσεων τὰς θεμελιώδεις ἐργασίας τῆς ἀριθμητικῆς, περιοριζόμενοι πάντοτε εἰς τὰς πλέον ἁπλουστέρας περιστάσεις, δηλαδὴ

Ε.Υ.Δ.Ε.Κ.Π. ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

εἰς ἐκείνας μόνον εἰς τὰς ὁποίας θέλομεν ἐπιστηριχθῆ εἰς τὴν σειρὰν τῆς πραγματείας ταύτης.

Πρόσθεσις. Διὰ νὰ συνάψωμεν τοὺς δύο ἀριθμοὺς α καὶ β, γράφομεν α+β, παρομοίως α+β+γ ἐκφράζει τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν α, β, γ. Τοῦτο συνάγομεν ἐκ τῶν κατὰ συνθήκην σημειώσεων. Παρομοίως α—β καὶ γ+δ—ζ συναθροιζόμενα σχηματίζουσι τὴν μόνην ποσότητα α—β+γ+δ—ζ.

Ἐὰν εἴχαμεν νὰ προσθέσωμεν α—β καὶ β—γ, ἐγράφαμεν α—β+β—γ· ἀλλ' ἐπειδὴ ἀπὸ ἓν μέρος τὸ β ἀφαιρεῖται, καὶ ἀπὸ τὸ ἄλλο προσθέτεται, ἕπεται ὅτι αὗται αἱ δύο πράξεις ἀνταμείβονται, καὶ ἡ ἔφρασις ἀνάγεται εἰς α—γ. Τοῦτο καλεῖται εἰς τὴν Ἄλγεβραν, πράττειν τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων.

§. 114. Ἀφαίρεσις. Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν β ἀπὸ α, γράφομεν α—β· παρομοίως ἐὰν θέλωμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν γ ἀπὸ α—β, γράφομεν α—β—γ. Ἐὰν ὅμως ἔχωμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν τὴν ἔκφρασιν γ—δ ἀπὸ τὴν ἔκφρασιν α—β, κατ' ἀρχὰς σημειόνομεν τὴν ἀφαίρεσιν οὕτως α—β—(γ—δ), γράφοντες μεταξὺ εἰς δύο παρενθέσεις τὴν δευτέραν ποσότησα γ—δ, καὶ προτάττοντες τὸ σημεῖον —. Ἐὰν ὅμως θέλωμεν νὰ ἀνάξωμεν τὸ ἐξαγόμενον εἰς ἓν μόνον πολυώνυμον, ἰδοὺ τίνι τρόπῳ πρέπει νὰ συλλογισθῶμεν. Ἐὰν εἴχαμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν ὅλον τὸ γ ἀπὸ τὸ α—β, ἠθέλαμεν εὕρει ἐξαγόμενον α—β—γ· πλὴν δὲν εἶναι τὸ γ, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ἀφαιρέσωμεν, ἀλλ' εἶναι τὸ γ ἠλαττωμένον κατὰ δ, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ἀφαιρέσωμεν, τὸ ἐξαγόμενον α—β—γ εἶναι μικρότερον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μονάδων τῶν εὑρισκομένων εἰς τὸ δ· οὕτως ἔχομεν τὸ ἐξαγόμενον εἰς τὴν ἀκριβῆ του τιμὴν, προσθέτοντες δ εἰς α—β—γ, καὶ συνάγομεν α—β—γ+δ.

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΔΙΕΘΝΕΣ ... ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
Ε.Υ.Δ της Ε.Π. ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

Τουτέστι διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν πολυώνυμον ἀπὸ πολυώνυμον, πρέπει νὰ γράψωμεν τὸ δεύτερον κατ' ἐξακολούθησιν τοῦ πρώτου μὲ σημεῖα ἐναντία τῶν ὅσα πρότερον εἶχε.

Εὑρίσκομεν κατὰ τὸν κανόνα τοῦτον δι' ἀναλόγων συλλογισμῶν

$3\alpha - (2\beta - 3\gamma) = 3\alpha - 2\beta + 3\gamma.$

$5\alpha - 4\beta - (6\delta - \zeta + \eta) = 5\alpha - 4\beta - 6\delta + \zeta - \eta.$

§. 115. Πολλαπλασιασμός. Ἂς πολλαπλασιασθῇ α^4 ἐπὶ β^3· γράφομεν $\alpha^4 \times \beta^3$ ἢ ἁπλῶς $\alpha^4\,\beta^3$.

Ἐὰν ὅμως ἔχωμεν α^5 νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ α^3, παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς α μὲ τὸ νὰ εἶναι 5 φοραῖς παράγων εἰς τὸν πολλαπλασιαστέον, καὶ 3 φοραῖς παράγων εἰς τὸν πολλαπλασιαστὴν, πρέπει νὰ εἶναι 5+3 ἢ 8 φοραῖς παράγων εἰς τὸ γινόμενον· οὕτως συνάγομεν $\alpha^5 \times \alpha^3 = \alpha^8$, τουτέστιν ὅταν τὸ γράμμα ἦναι τὸ αὐτὸ εἰς τοὺς δύο παράγοντας τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, τὸ γράφομεν μίαν μόνην φορὰν, δίδοντές του ἐκθέτην τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν τῶν δύο παραγόντων.

Εὑρίσκομεν παρομοίως $\alpha^4\beta^2 \times \alpha^2\beta^3 = \alpha^6\beta^5$.

Ἔστω ἤδη $\alpha - \beta$ νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ γ.

Δυνάμεθα κατὰ πρῶτον νὰ σημειώσωμεν τὸ γινόμενον τοιουτοτρόπως $(\alpha - \beta)\,\gamma$.

Ἐὰν ὅμως θέλωμεν νὰ εὕρωμεν ἓν μόνον πολυώνυμον, παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ νὰ πολλαπλασιάσωμεν $\alpha - \beta$ ἐπὶ γ εἶναι τὸ αὐτὸ (ἀριθμ. 27) ὡς καὶ νὰ πολλαπλασιάσωμεν γ ἐπὶ $\alpha - \beta$, τουτέστι νὰ λάβωμεν γ τόσαις φοραῖς, ὅσαι μονάδες εἶναι εἰς τὸ α ἠλαττωμένον κατὰ β. Ἐὰν λοιπὸν πολλαπλασιάσωμεν κατὰ πρῶτον τὸ γ ἐφ' ὅλον τὸ α, ἐκ τοῦ ὁποίου προκύπτει γα ἢ αγ, τὸ γινόμενον εἶναι μεγαλήτερον κατὰ τὸ γ ἐπὶ β

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΤΟΜΕΑΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΕΡΕΥΝΩΝ ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ: ΕΠ. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Κ. ΘΕΡΙΑΝΟΣ ΘΕΤΣΙΟΣ
Ε.Υ.Ε.Π.Ε.Κ. Τ.Ε. ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

ἢ τὸ $\beta\gamma$· οὕτως πρέπει νὰ ἀφαιρέσωμεν $\beta\gamma$ ἀπὸ $\alpha\gamma$· τὸ δὲ $\alpha\gamma - \beta\gamma$ εἶναι τὸ ζητούμενον γινόμενον, τουτέστι $(\alpha - \beta)\ \gamma = \alpha\gamma - \beta\gamma$.

Ἂς πολλαπλασιάσωμεν προσέτι $\alpha - \beta$ ἐπὶ $\gamma - \delta$. Τὸ γινόμενον δύναται κατὰ πρῶτον νὰ παρασταθῇ οὕτως $(\alpha - \beta)\ (\gamma - \delta)$· ἀλλὰ διὰ νὰ λάβωμεν ἓν μόνον πολυώνυμον, πολλαπλασιάζομεν πρῶτον $\alpha - \beta$ ἐπὶ γ, ὅθεν προκύπτει $\alpha\gamma - \beta\gamma$. Παρατηροῦμεν ἔπειτα, ὅτι δὲν ἔπρεπε νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐφ' ὅλον τὸ γ τὸ $\alpha - \beta$, ἀλλ' ἐπὶ γ ἠλαττωμένον κατὰ δ.

Οὕτως τὸ γινόμενον $\alpha\gamma - \beta\gamma$ εἶναι μεγαλήτερον τοῦ γινομένου τοῦ $\alpha - \beta$ ἐπὶ δ, τουτέστι τοῦ $\alpha\delta - \beta\delta$· λοιπὸν διὰ νὰ ἄξωμεν τὸ γινόμενον εἰς τὴν ἀκριβῆ του τιμὴν πρέπει νὰ ἀφαιρέσωμεν $\alpha\delta - \beta\delta$ ἀπὸ $\alpha\gamma - \beta\gamma$· ὅθεν προκύπτει κατὰ τὸν κανόνα τῆς ἀφαιρέσεως, $\alpha\gamma - \beta\gamma - \alpha\delta + \beta\delta$.

Διὰ νὰ ἐκτελέσωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν δύο δυωνύμων, πολλαπλασιάζομεν διαδοχικῶς ἕκαστον ὅρον τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐφ' ἕκαστον ὅρον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, παρατηροῦντες τὸν ἀκόλουθον κανόνα σχετικῶς πρὸς τὰ σημεῖα. Ἐὰν οἱ δύο ὅροι τοῦ πολλαπλασιαστέου καὶ πολλαπλασιαστοῦ ἔχωσι καὶ οἱ δύο τὸ αὐτὸ σημεῖον $+$ ἢ $-$, τὸ γινόμενον θέλει ἔχει πάντοτε τὸ σημεῖον $+$· ἀλλ' ἐὰν ἔχωσιν ἐναντία σημεῖα, τὸ γινόμενόν των θέλει ἔχει τὸ σημεῖον $-$.

Εὑρίσκομεν κατὰ τοῦτον τὸν κανόνα ὅτι $(\alpha+\beta)\ (\gamma+\delta) = \alpha\gamma+\beta\gamma+\alpha\delta+\beta\delta$, $(\alpha - \beta)\ (\gamma+\delta) = \alpha\gamma - \beta\gamma + \alpha\delta - \beta\delta$.

§. 116. Διαίρεσις. Θέλομεν θεωρήσει μίαν μόνην περίστασιν ταύτης τῆς πράξεως, ἐκείνην δύο μονωνύμων ποσοτήτων ἐκ τοῦ αὐτοῦ γράμματος συντιθεμένων.

Ἂς διαιρεθῇ α^7 διὰ α^3.

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΕΡΕΥΝΩΝ ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ ΕΠ. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ Θ. ΠΕΤΣΙΟΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΤΟΜΕΑΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ
Ε.Υ.Δ της Κ.τ.Π ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

Δυνάμεθα κατὰ πρῶτον νὰ σημειώσωμεν τὸ πηλίκον οὕτως $\frac{\alpha^7}{\alpha^3}$ ἢ $\alpha^7 : \alpha^3$· ἀλλὰ παρατηροῦμεν, ὅτι ἐπειδὴ α^7 εἶναι γινόμενον, τοῦ ὁποίου α^3 καὶ τὸ πηλίκον εἶναι οἱ δύο παράγοντες, ὁ ἐκθέτης 7 τοῦ διαιρετέου πρέπει νὰ ἦναι (ἀριθμ. 115) ἴσος μὲ τὸ ἄθροισμα τοῦ ἐκθέτου 3 τοῦ διαιρέτου, καὶ τοῦ ἀγνώστου ἐκθέτου τοῦ πηλίκου· λοιπὸν ἀντιστρόφως οὗτος εἶναι ἴσος μὲ τὴν διαφορὰν μεταξὺ τοῦ ἐκθέτου τοῦ διαιρετέου, καὶ τοῦ ἐκθέτου τοῦ διαιρέτου, τουτέστι μὲ $7-3$ ἢ 4.

Οὕτως $\frac{\alpha^7}{\alpha^3}=\alpha^4$· καὶ τῷ ὄντι $\alpha^4\times\alpha^3=\alpha^7$.

Εὑρίσκομεν παρομοίως $\frac{\beta^9}{\beta^4}=\beta^5$, $\frac{\gamma^4}{\gamma^3}=\gamma'$ ἢ γ, $\frac{\alpha^3\beta^2}{\alpha^2\beta}=\alpha'\,\beta'=\alpha\beta$.

Αἱ ἄλλαι περιστάσεις τῆς διαιρέσεως εἶναι ἀνωφελεῖς νὰ θεωρηθῶσι τώρα διὰ τὸν προτεινόμενόν μας σκοπόν. Μόνας δὲ ταύτας τὰς ἀλγεβραϊκὰς γνώσεις θέλομεν χρειασθῆ εἰς τὸ πέμπτον κεφάλαιον καὶ εἰς τὰ ἀκόλουθα.

§. 117. Διὰ νὰ παραστήσωμεν τὴν ὠφέλειαν, τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν ἐκ τῆς χρήσεως τῶν γραμμάτων πρὸς παράστασιν τῶν ἀριθμῶν, θέλομεν λύσει τὰ ἀκόλουθα δύο ζητήματα.

1ον Ποία τροπὴ προκύπτει εἰς ἓν κλάσμα, ὅταν προστεθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς εἰς τοὺς δύο ὅρους του; (τοῦτο ἤδη ἐξηγήθη εἰς τὸν ἀριθμ. 46).

Ἂς σημειώσωμεν διὰ $\frac{\alpha}{\beta}$ τὸ δεδομένον κλάσμα, καὶ διὰ μ τὸν ἀριθμὸν, τὸν ὁποῖον θέλομεν νὰ προσ-

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΕΡΕΥΝΑΝ ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΤΟΜΕΑΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ: ΕΠ. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ Θ. ΠΕΤΣΙΟΣ
Ε.Υ.Δ της Κ.τ.Π ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

θέσωμεν εἰς τοὺς δύο ὅρους α καὶ β τοῦ τοιούτου κλάσματος· ἡ πρᾶξις αὕτη δίδει τὸ νέον κλάσμα $\frac{\alpha+\mu}{\beta+\mu}$.

Διὰ νὰ συγκρίνωμεν τὰ δύο ταῦτα κλάσματα, τὰ ἄγομεν εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν, ἐκ τοῦ ὁποίου συνάγομεν διὰ τὸ πρῶτον κλάσμα $\frac{\alpha(\beta+\mu)}{\beta(\beta+\mu)}$, καὶ διὰ τὸ δεύτερον $\frac{(\alpha+\mu)\beta}{(\beta+\mu)\beta}$, ἢ ἐκτελοῦντες τοὺς ὑπολογισμοὺς κατὰ τὸν κανόνα τοῦ ἀριθμοῦ 115, $\frac{\alpha\beta+\alpha\mu}{\beta^2+\beta\mu}$ καὶ $\frac{\alpha\beta+\beta\mu}{\beta^2+\beta\mu}$.

Ἀλλ' οἱ δύο ἀριθμηταὶ $\alpha\beta+\alpha\mu$, καὶ $\alpha\beta+\beta\mu$ ἔχουσι κοινὸν μέρος τὸ $\alpha\beta$, τὸ δὲ μέρος $\beta\mu$ τοῦ δευτέρου ἀριθμητοῦ εἶναι μεγαλήτερον παρὰ τὸ μέρος $\alpha\mu$ τοῦ πρώτου, ἐπειδὴ ἔχομον $\beta>\alpha$· οὕτω λοιπὸν, τὸ δεύτερον κλάσμα εἶναι μεγαλήτερον τοῦ πρώτου· οὕτως, αὐξάνομεν τὴν τιμὴν τοῦ κλάσματος, προσθέτοντες τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν εἰς τοὺς δύο του ὅρους.

Βλέπομεν πρὸς τούτοις ἐκ τοῦ ἀνωτέρω συλλογισμοῦ ὅτι $\frac{\alpha}{\beta}$ πρέπει νὰ εἶναι κύριον κλάσμα, ἢ νὰ ἔχωμεν $\alpha<\beta$, διὰ νὰ ἀληθεύῃ ἡ πρότασις· ἐὰν ἐξ ἐναντίας εἴχαμεν $\alpha>\beta$, ἡ πρότασις ἤθελει ὑπάρχε εἰς ἀντίστροφον τάξιν· ἐπειδὴ τότε ἠθέλαμεν ἔχει $\alpha\beta+\beta\mu<\alpha\beta+\alpha\mu$.

Σ. Κ. Τοῦτο τὸ μέσον τῶν ἀκριβῶν καὶ γενικῶν ἀποδείξεων, ὅταν οἱ ἀριθμοὶ σημειόνωνται διὰ γραμμάτων, δὲν ἤθελε μένει, ἐὰν εἰργαζόμεθα ἐπὶ μερικῶν ἀριθμῶν. Π. χ. ἐὰν εἴχαμεν τὸ κλάσμα $\frac{12}{17}$, καὶ

Ε.Υ.Δ της Κ.τ.Π. ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

επροσθέταμεν 3 μονάδας εἰς τοὺς δύο του ὅρους, ἠθέλαμεν εὕρει $\frac{15}{20}$.

Ἀνάγοντες τὰ δύο κλάσματα εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν, συνάγομεν διὰ τὸ πρῶτον $\frac{240}{340}$, καὶ διὰ τὸ δεύτερον $\frac{255}{340}$.

Ἐντεῦθεν βλέπομεν, ὅτι τὸ δεύτερον κλάσμα εἶναι μεγαλήτερον τοῦ πρώτου· ἀλλὰ τίποτε δὲν μᾶς δείχνει, ὅτι ἡ ἀλήθεια τούτου τοῦ μερικοῦ παραδείγματος ἀναφέρεται καὶ πρὸς πᾶν ἄλλο.

Ἡ ἀπόδειξις, τὴν ὁποίαν ἐκθέσαμεν εἰς τὸν ἀριθμὸν 46, εἶναι κατὰ τὴν φύσιν τῶν συλλογισμῶν οὕτω γενικὴ, ὡς ἐκείνη, τὴν ὁποίαν ἀνωτέρω ἐδώκαμεν· ὅμως αὕτη, ἂν ὄχι τόσον πολὺ ἔξοχος, εἶναι ὅμως δεκτικὴ συντομίας. Ἰδοὺ λοιπὸν ἄγεται εἰς πλέον συντόμους ὅρους ὡς ἀκολούθως.

Ἔστωσαν $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\alpha+\mu}{\beta+\mu}$ τὰ δύο κλάσματα, τὰ ὁποῖα θέλομεν νὰ συγκρίνωμεν.

Ἂν τὰ ἀνάξωμεν εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν, προκύπτει $\frac{\alpha\beta+\alpha\mu}{\beta^2+\beta\mu}$ καὶ $\frac{\alpha\beta+\beta\mu}{\beta^2+\beta\mu}$· ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως ἔχομεν $\alpha<\beta$· λοιπὸν $\alpha\mu<\beta\mu$· ὅθεν $\alpha\beta+\alpha\mu<\alpha\beta+\beta\mu$· οὕτως τὸ δεύτερον κλάσμα εἶναι μεγαλήτερον τοῦ πρώτου.

2^ον Ζητεῖται τὸ γινόμενον τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν πολλαπλασιασμένου ἐπὶ τὴν διαφορὰν τῶν ἰδίων τούτων ἀριθμῶν.

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΤΟΜΕΑΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ ΕΡΕΥΝΩΝ ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΕΠΙΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ Θ. ΠΕΤΣΙΟΣ
Ε.Υ.Δ της Κ.τ.Π ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

Ἔστωσαν α καὶ β οἱ δύο προτεθέντες ἀριθμοὶ, τὸ ἄθροισμά των θέλει ἐκφρασθῆ διὰ $\alpha+\beta$, καὶ ἡ διαφορά των διὰ $\alpha-\beta$.

Ἤδη ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦ $\alpha+\beta$ ἐπὶ τοῦ $\alpha-\beta$, κατὰ τὸν κανόνα τοῦ ἀριθμοῦ 115, λαμβάνομεν γινόμενον $\alpha^2-\alpha\beta+\alpha\beta-\beta^2$, ἢ ἀποῤῥίπτοντες τοὺς δύο ὅρους $-\alpha\beta$ καὶ $+\alpha\beta$, οἵτινες ἀναμεταξύ των ἐξαλείφονται, ἔχομεν $\alpha^2-\beta^2$· Λοιπὸν $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2$.

Ταῦτο φανερόνει, ὅτι τὸ ἄθροισμα δύο ὁποιωνδήποτε ἀριθμῶν πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν, δίδει πάντοτε γινόμενον τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων των, ἢ τῶν δευτέρων δυνάμεών των.

Παράδειγμα. Ἔστωσαν οἱ δύο ἀριθμοὶ 25 καὶ 12, τὸ ἄθροισμά των εἶναι 37, καὶ ἡ διαφορά των 13· πολλαπλασιάζοντες 37 ἐπὶ 13 ἔχομεν γινόμενον 481· ἀπὸ ἄλλο μέρος 25×25 δίδει 625, 12×12 δίδει 144

Ὅθεν $625-144=481$· λοιπὸν $(25+12)(25-12)=625-144=(25)^2-(12)^2$.

Οἱ τελευταῖοι οὗτοι συλλογισμοὶ ἄλλο δὲν εἶναι εἰμὴ βεβαίωσίς τις τῆς ἰδιότητος ἐπάνω εἰς δύο μερικοὺς ἀριθμοὺς, ἐν ᾧ οἱ προηγούμενοι σχηματίζουν ἀκριβῆ καὶ γενικὴν ἀπόδειξιν, ὅταν οἱ ἀριθμοὶ σημειόνωνται διὰ γραμμάτων.

Τὰ ζητήματα ταῦτα ἀρκοῦσι διὰ νὰ κάμωσιν ἱκανοὺς τοὺς ἀρχαρίους νὰ ἐννοῶσι τὰς ἐκ τῆς χρήσεως τῶν γραμμάτων πρὸς παράστασιν τῶν ἀριθμῶν ὠφελείας. Διὰ ταύτης τῆς χρήσεώς των ὄχι μόνον καθισταίνομεν τοὺς συλλογισμοὺς πλέον γενικοὺς, καὶ πολλάκις πλέον συντόμους, ἀλλὰ προσέτι φυλάττουν τὸ ἴχνος τῶν πράξεων, αἱ ὁποῖαι πρέπει νὰ ἐκτελεσθῶσιν ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν, οἵτινες ἀποτελοῦν μέρος

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΤΟΜΕΑΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΕΡΕΥΝΩΝ ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ: Β. ΚΑΛΦΑΣ Κ.Π. ΠΕΤΣΙΟΣ Ε.Υ.Δ. Κ.Π. ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

τῆς ἐκφράσεως τοῦ ζητήματος, καὶ δὲν δύνανται νὰ ἀναλυθῶσι μεταξύ των, ὡς ὅταν ἐργαζώμεθα ἐπὶ μερικῶν ἀριθμῶν. *)

Μετὰ τὰς τοιαύτας γνώσεις ἐπιστρέφομεν εἰς τὸ προκείμενον, τουτέστι ἀναλαμβάνομεν ἓν τῶν ὑποκειμένων τῶν ἐξηγημένων εἰς τὸ πρῶτον τμῆμα διὰ νὰ τὸ σπουδάσωμεν περισσότερον. Οὕτως θέλομεν φθάσει εἰς νέας ἰδιότητας, καὶ εἰς μέσα τοῦ νὰ μεταποιῶμεν ἢ νὰ καταστaίνωμεν ἁπλουστέρους τοὺς τρόπους τῶν διαφόρων πράξεων τῆς ἀριθμητικῆς.

§. α^{ος} Θεωρία τῶν διαφόρων συστημάτων τῆς ἀριθμήσεως.

§. 118. Εἴδομεν (ἀρ. 5) τίνι τρόπῳ διὰ μέσου δέκα ψηφίων ἐκφράζομεν ὅλους τοὺς ἀριθμοὺς κατὰ μόνην τὴν συνθήκην, ὅτι κάθε ψηφίον θεμένον εἰς τὰ ἀριστερὰ ἄλλου ἐκφράζει μονάδας δέκα φοραῖς μεγαλητέρας παρ' αὐτό. Πρόκειται δὲ ἤδη νὰ δείξωμεν, ὅτι δυνάμεθα παρομοίως νὰ γράφωμεν ὅλους τοὺς ἀριθμοὺς μὲ περισσοτέρους ἢ ὀλιγωτέρους τῶν δέκα χαρακτήρων, ἀρκεῖ νὰ ἦναι κἂν δύο, καὶ ἓν τούτων νὰ ἦναι τὸ μηδέν.

Καλεῖται ἐν γένει βάσις ἑνὸς συστήματος ἀριθμήσεως, ὁ ἀριθμὸς τῶν ψηφίων, τὰ ὁποῖα μεταχειρίζονται. Τὸ σύστημα, εἰς τὸ ὁποῖον μεταχειρίζονται μόνον δύο ψηφία, καλεῖται σύστημα δυαδικόν· ἐκεῖνο,

---

*) Ὁ Μεταφραστής· Π. χ. ἐὰν α πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ β, γράφομεν αβ, καὶ πάντοτε ἐννοοῦμεν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς α πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τοῦ β· ἐὰν ὅμως πολλαπλασιάσωμεν 2 ἐπὶ 8, τὸ γινόμενον 16 δὲν παῤῥησιάζει ὅ,τι παῤῥησιάζει τὸ αβ· ἐπειδὴ 16 ὄχι μόνον σχηματίζεται ἀπὸ 2×8, ἀλλὰ καὶ ἀπὸ 4×4.

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ ΤΟΜΕΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Κ. ΠΕΤΣΙΟΣ
Ε.Υ.Δ. ΤΗΣ Κ.τ.Π. ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006