Πρῶτον Ζήτημα.

```
λίβ.   σολ.  δην.
3179   17    8
  20
------
63597
   12
------|
763172| 243
------|----------
 341  | 3140,625
 ----
  987
 ----
  1520
  ----
   620
  ----
   1340
  -----
    125
```

Δεύτερον Ζήτημα

```
  3140 ,      626
    39 ,  2571825
-------------------
3179^λίβ., 8828125
               20
-------------------
  17^σολ., 6562500
               12
-------------------
   7^δην., 8750000
```

Ἀπόκρισις. 3140, 63. (γρ. ἑκατοστ.) Ἀπόκρισις. 3170 17 8 (λίβ. σολ. δην.)

Σ. Κ. Εἰς τὸ πρῶτον ζήτημα, ἐπειδὴ τὸ ψηφίον τῶν χιλιοστημορίων τοῦ πηλίκου εἶναι 5, καὶ ἀκολουθεῖται ἀπὸ ἄλλα πολλὰ, ἐλάβομεν δι' ἀνταμοιβὴν $3140^{\text{γρ.}}$, $63^{\text{ἑκατ.}}$, ἐπειδὴ οὕτως τὸ πραττόμενον σφάλμα εἰς αὔξησιν εἶναι μικρότερον ἀπὸ ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἠθέλαμεν πράξει εἰς ὀλιγόστευσιν, ἐὰν ἠθέλαμεν ἀμελήσει τὸ ψηφίον 5 καὶ τὰ ἀκόλουθα αὐτοῦ.

Εἰς τὸ δεύτερον ζήτημα τὸ ἀκέραιον τῶν συναγομένων δηναρίων εἶναι 7 δηνάρια, καὶ ἡμεῖς ἐλάβαμεν 8 δηνάρια, ἐπειδὴ τὸ ψηφίον τῶν δεκατημορίων εἶναι 9 ἢ μεγαλήτερον τοῦ 5. Θέλομεν εὕρει παρομοίως, ὅτι $56275^{\text{γρ.}}$, 97 ἐκτιμῶνται μὲ $56979^{\text{λίβ.}}$ $8^{\text{σολ.}}$ $5^{\text{δην.}}$ καὶ ἀντιστρόφως.

Γραμμικὰ μέτρα.

§. 100. Πρὶν περάσωμεν εἰς τὴν λύσιν τῶν δύο ζητημάτων, εἶναι ἀνάγκη νὰ ἀναζητήσωμεν κατὰ πρῶτου τὴν τιμὴν τῆς ὀργυιᾶς εἰς μέτρον, καὶ τοῦ μέτρου εἰς ὀργυιάν· τουτέστι νὰ ἐκφράσωμεν τὴν παλαιὰν γραμμικὴν μονάδα εἰς νέα μέτρα, καὶ ἀντιστρόφως τὴν νέαν γραμμικὴν μονάδα εἰς παλαιὰ μέτρα.

Ἀλλ' ἠξεύρομεν, ὅτι ἡ ὀργυιὰ ἰσοδυναμεῖ μὲ 864 γραμμάς· προσέτι τὸ μέτρον ἰσοδυναμεῖ (ἀριθμ. 91) μὲ 3$^{π.}$, 0$^{δ.}$, 11$^{γρ.}$, 296, ἢ ἄγοντες τοῦτον τὸν ἀριθμὸν εἰς γραμμὰς, μὲ 443$^{γρ.}$, 296. Λοιπὸν, ἐὰν διαιρέσωμεν 864 διὰ 443,296, ἢ μᾶλλον 864000 διὰ 443296, τὸ πηλίκον ἠγμένον εἰς δεκαδικὰ ἐκφράζει τὴν τιμὴν τῆς ὀργυιᾶς εἰς μέτρα.

Εὑρίσκομεν, ἐκτελουμένου παντὸς ὑπολογισμοῦ, ὅτι ἡ ὀργυιὰ ἰσοδυναμεῖ εἰς μέτρα μὲ 1$^{ημίλ.}$, 949036, τουτέστι μὲ ἓν μέτρον καὶ 949 χιλιόμετρα, μεῖον ἑνὸς δεκαχιλιομέτρου.

Παρομοίως, ἐὰν διαιρέσωμεν 443,296 διὰ 864, κατὰ τὸν κανόνα τοῦ ἀριθμ. 89, θέλομεν εὕρει τὴν τιμὴν τοῦ μέτρου εἰς ὀργυιὰν καὶ κλάσμα δεκαδικὸν τῆς ὀργυιᾶς.

Ἐκτελεσθέντος τοῦ νέου τούτου ὑπολογισμοῦ, εὑρίσκεται, ὅτι τὸ μέτρον ἰσοδυναμεῖ εἰς ὀργυιὰς μὲ 0$^{ὀρ.}$, 5130740, μεῖον σχεδὸν 0,0000001 τῆς ὀργυιᾶς.

Συνέπεια. Τὸ μυριόμετρον ὂν ἴσον μὲ 10000 μέτρα ἰσοδυναμεῖ μὲ 10000 φοραῖς 0$^{ὀρ.}$, 5130740 ἢ 5130$^{ὀρ.}$, 740. Τοῦτο μᾶς δείχνει, ὅτι τὸ μυριόμετρον εἶναι ὀλίγον μεγαλήτερον τοῦ διπλασίου τῆς λέγας τῶν 2500$^{ὀρ.}$, καθὼς τὸ ἐφανερώσαμεν εἰς τὸν ἀριθμὸν 91.

Τούτου τεθέντος, 1$^{ον.}$ Ζητεῖται εἰς μέτρα, ὑποδεκάμετρα καὶ ὑφεκατοντάμετρα κ. τ. λ. ἡ τιμὴ τῶν 17$^{ὀρ.}$ 5$^{π.}$ 4$^{δ.}$ 8$^{γρ.}$

Κατ' ἀρχὰς ἀνάγομεν τὸν ἀριθμὸν τοῦτον εἰς γραμμὰς, καὶ εὑρίσκομεν 15464 γραμμὰς, μετὰ ταῦτα διαιροῦμεν 15464 διὰ 443, 296 (ἀριθμὸς γραμμῶν περικλειουσῶν τὸ μέτρον), ἢ 1546400 διὰ 443296, καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον, 34,88414 μεῖον τοῦ 0,00001. Λοιπὸν 17ὀρ. 5π. 4δ. 8γρ. ἰσοδυναμοῦν μὲ 34μετ.,88414, δηλαδὴ μὲ 34 μέτρα 884 χιλιόμετρα μεῖον ἑνὸς χιλιομέτρου.

2ον. Ζητεῖται ἡ τιμὴ 34μετ.,88414 εἰς ὀργυιὰς, πόδας, δακτύλους, καὶ γραμμάς.

Ἐπειδὴ ἓν μέτρον ἰσοδυναμεῖ εἰς ὀργυιὰς μὲ 0ὀρ.,513074, ἕπεται, ὅτι διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τῶν 34,88414, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν 0ὀρ.,513074 ἐπὶ 34,88414, καὶ τὸ προκύπτον γινόμενον ἐκφράζει εἰς ὀργυιὰς καὶ δεκαδικὸν κλάσμα τῆς ὀργυιᾶς τὴν ζητουμένην τιμήν. Μένει ἔπειτα νὰ τρέψωμεν τὸ δεκαδικὸν τοῦτο κλάσμα εἰς πόδας, δακτύλους, καὶ γραμμάς.

Ἰδοὺ ὁ πίναξ τοῦ ὑπολογισμοῦ.

Προτιμῶμεν διὰ πολλαπλασιαστέον τὸ 34,88414· ἐπειδὴ οὕτως ἡ πρᾶξις γίνεται ἁπλουστέρα· εὑρίσκομεν δὲ γινόμενον 17ὀρ.,898, ἀμελοῦντες τὰ ὀκτὼ τελευταῖα δεκαδικὰ ψηφία.

Διὰ νὰ τρέψωμεν 0ὀρ.,898 εἰς πόδας πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 6, καὶ εὑρίσκομεν 5π.,388.

Πολλαπλασιάζοντες 0ποδ.,388 ἐπὶ 12 διὰ νὰ σχηματίσωμεν τοὺς δακτύλος εὑρίσκομεν 4δ.,656.

```
    34,88414
    0,503074
 -----------
    13953656
   24418898
  10465242
  3488414
17442070
17ὀρ.,89814524636
-----------------
           6
-----------------
5π.,388
   12
--------
4δ.,656
   12
--------
7γρ.,872
```

Πολλαπλασιάζομεν τέλος πάντων 0,656 ἐπὶ 12, διὰ νὰ εὕρωμεν τὰς γραμμὰς, καὶ εὑρίσκομεν $7^{γρ.}$,82. ἢ μόνον 8 γραμμάς.

Λοιπὸν $34^{μέτ.}$,88414 εἶναι ἰσοδύναμα μὲ $17^{όρ.}$ $5^{π.}$, $4^{δ.}$, $8^{γρ.}$ τοῦτο βεβαιόνει τὴν πρώτην πρᾶξιν.

Σ. Κ. Εἰς ταύτην τὴν τελευταίαν πρᾶξιν ἠμελήσαμεν τὰ ὀκτὼ τελευταῖα δεκαδικὰ ψηφία τοῦ γινομένου, ὅταν ἠθελήσαμεν νὰ τὸ ἐκτιμήσωμεν εἰς πόδας, δακτύλους καὶ γραμμάς. Ἰδοὺ δὲ τούτου ὁ λόγος. Ἐπειδὴ πολλαπλασιάζοντες τὸ γινόμενον τοῦτο διαδοχικῶς ἐπὶ 6, 12 καὶ 12, τὸν πολλαπλασιάζομεν (ἀριθμ. 25) ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν τριῶν τούτων ἀριθμῶν, ἢ ἐπὶ 864, βλέπομεν ὅτι κρατοῦντες μόνον λογαριασμὸν τῶν χιλιοστημορίων τοῦ πρώτου ληφθέντος γινομένου, τὸ τελευταῖον ἐξαγόμενον θέλει εἶναι $\frac{864}{1000}$ τῆς γραμμῆς, μεῖον κἂν μιᾶς γραμμῆς. Αὕτη ἡ παρατήρησις συντέμνει πολὺ τοὺς ὑπολογισμούς. Θέλομεν δὲ ἐπανέλθει ἐκεῖ ἐπάνω, εἰς τὸ τέλος τούτου τοῦ κεφαλαίου.

Ἂς ἐκτιμήσωμεν προσέτι $5^{π.}$ $6^{δ.}$ $7^{γρ.}$ εἰς μέτρα καὶ εἰς δεκαδικὰ κλάσματα τοῦ μέτρου· (οὗτος ὁ συμμιγὴς ἀριθμὸς ἠμπορεῖ νὰ ληφθῇ εἰς τὸ ἀνάστημα ἑνὸς ἀνδρός).

Ἄγομεν τὸν ἀριθμὸν τοῦτον εἰς γραμμὰς καὶ εὑρίσκομεν 799 γραμμὰς, διαιροῦμεν 799 διὰ 443,296 ἢ 799000 διὰ 443296, καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον $1^{μέτ}$,802 χιλιόμετρα, μεῖον ἑνὸς χιλιομέτρου.

Περὶ τῶν ὑφασμάτων.

§. 101. Ἠξεύρομεν, ὅτι ἡ πήχη ἰσοδυναμεῖ μὲ $3^{\text{ποδ.}}$ $8^{\text{δακ.}}$ ἢ μὲ 44 δακτ. τουτέστι 528 γραμμάς. Λοιπὸν διαιροῦντες 528 διὰ 443,296, ἢ 528000 διὰ 443296 προσδιορίζομεν τὴν τιμὴν τῆς πήχης εἰς μέτρον. Καὶ ἐκτελοῦντες ταύτην τὴν διαίρεσιν εὑρίσκομεν, ὅτι ἡ πήχη ἔχει διὰ τιμὴν $1^{\text{μέτ.}}$,192 χιλιόμετρα, ἢ ἀκριβέστερον $1^{\text{μ.}}$,191077.

Καὶ ἀντιστρόφως 443,296 διαιρούμενον διὰ 528 δίδει πηλίκον 0,839576 μεῖον $\frac{1}{1000000}$. Λοιπὸν τὸ μέτρον ἰσοδυναμεῖ μὲ 0,839576 τῆς πήχης.

Ζητεῖται ἡ τιμὴ τῶν 29 πηχῶν καὶ $\frac{7}{12}$ εἰς μέτρα καὶ δεκαδικὸν κλάσμα τοῦ μέτρου.

Δυνάμεθα, καθὼς εἰς τὴν ὀργυιὰν καὶ τὰς ὑποδιαιρέσεις αὐτῆς, νὰ τρέψωμεν τὰς 29 πήχας καὶ $\frac{7}{12}$ εἰς δωδέκατα τῆς γραμμῆς, πολλαπλασιάζοντες 29 καὶ $\frac{7}{12}$ ἢ $\frac{355}{12}$ ἐπὶ 528, ἀριθμὸν γραμμῶν περιέχοντα τὴν πήχην, καὶ νὰ τρέψωμεν παρομοίως τὸ μέτρον ἢ $443^{\text{γρ.}}$,296 εἰς δωδέκατα τῆς γραμμῆς, τουτέστι πολλαπλασιάζοντες τὸν ἀριθμὸν τοῦτον ἐπὶ 12, καὶ μετὰ ταῦτα νὰ διαιρέσωμεν τὰ δύο ἐξαγόμενα τὸ ἓν διὰ τοῦ ἄλλου, καὶ νὰ ἐκτιμήσωμεν τὸ πηλίκον εἰς δεκαδικά· ἀλλὰ ἡ πρᾶξις γίνεται μὲ περισσοτέραν συντομίαν, ὡς ἐδῶ ἀκολουθεῖ.

Κατὰ πρῶτον ἐκτιμοῦμεν τὴν πήχην μεῖον 0,000001, καὶ εὑρίσκομεν αὐτὴν ἴσην μὲ 1,191077.

Τούτου τεθέντος σχηματίζομεν πρῶτον τὸ γινόμενον τοῦ ἀριθμοῦ τούτου ἐπὶ 29, καὶ εὑρίσκομεν 34,541233, ὡς ἐδῶ φαίνεται· μετὰ ταῦτα ἀναλύοντες $\frac{7}{12}$ εἰς $\frac{6}{12}$ ἢ $\frac{1}{2}$ καὶ $\frac{1}{12}$ ἢ τὸ $\frac{1}{6}$ τοῦ $\frac{1}{2}$, λαμβάνομεν κατὰ πρῶτον διὰ $\frac{6}{12}$ τὸ ἥμισυ τοῦ 1,191077, τὸ ὁποῖον εἶναι 0,595538, τὸ ὁποῖον γράφομεν ὑπὸ τὸ ἤδη ληφθὲν γινόμενον· μετὰ ταῦτα τὸ 6ον τοῦ 0,595538, τὸ ὁποῖον εἶναι 0,099256, γινόμενον, τὸ ὁποῖον γράφομεν ὑπὸ τῶν δύο προτέρων, καὶ ἐκτελοῦντες τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν τούτων γινομένων, εὑρίσκομεν ἐξαγόμενον 35,236027. Λοιπὸν 29 πῆχαι καὶ $\frac{7}{12}$ ἰσοδυναμοῦν μὲ 35μ., 236 χιλιόμετρα μεῖον ἑνὸς χιλιομέτρου.

	1,191077
	29 $\frac{7}{12}$
	10719693
	2382154
	34,541233
$\frac{6}{12}$	0,595558
$\frac{1}{2}$	0,099256
	35,236027

Αὕτη ἡ πρᾶξις δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ καὶ εἰς τὰς ὀργυιὰς, πόδας κ. τ. λ., ἀφ' οὗ ληφθῇ ἡ τιμὴ μιᾶς ὀργυιᾶς εἰς μέτρον· ἀλλ' ἠθέλαμεν παρασυρθῇ εἰς πολλαπλασιασμοὺς ἐπὶ ὅμοια μέρη πολὺ πλέον συμπεπλεγμένα ἢ συμμιγῆ.

§. 102. Βάρη. Ἠξεύρομεν, ὅτι ἡ λίτρα περιέχει 9216 κόκκους (ὅρ. ἀριθμ. 65). Εἴπομεν παρομοίως (ἀριθμ. 95) ὅτι τὸ χιλιόγραμμον ἰσοδυναμεῖ μὲ 18827,κο.,15. Λοιπὸν διαιροῦντες 9216 διὰ 1882715 ἢ 921600 διὰ 18827,15 εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τῆς λίτρας εἰς χιλιόγραμμα, καὶ τὰς δεκαδικὰς ὑποδιαιρέσεις τοῦ χιλιογράμμου. Καὶ ἀντιστρόφως, ἐὰν διαιρέσωμεν 18827,15 διὰ 9216, τὸ πηλίκον ἐκτιμώμενον εἰς δεκαδικὰ, ἐκφράζει τὴν τιμὴν τοῦ χιλιογράμμου εἰς λίτρας καὶ δεκαδικὰς ὑποδιαιρέσεις τῆς λίτρας. Ἐκτελοῦντες ταύτας τὰς δύο πράξεις, αἱ ὁποῖαι δὲν παῤῥησιάζουν κἀμμίαν δυσκολίαν, εὑρίσκομεν

1ον. ὅτι ἡ λίτρα ἰσοδυναμεῖ μὲ 1χιλ., 48950585.

2ον. ὅτι τὸ χιλιόγραμμον ἰσοδυναμεῖ μὲ 2λίτ., 04287652.

Σ. Κ. Τοῦτο τὸ τελευταῖον ἐξαγόμενον φανερόνει, ὅτι τὸ χιλιόγραμμον ὑπερβαίνει τὸ διπλοῦν τῆς λίτρας ὡς ἔγγιστα $\frac{4}{100}$ ἢ $\frac{1}{25}$ τῆς λίτρας· τουτέστι τὸ χιλιόγραμμον ἰσοδυναμεῖ μὲ 2 λίτρας καὶ $\frac{1}{25}$ ἢ μὲ $\frac{51}{25}$ τῆς λίτρας σχεδὸν, ἢ 25 χιλιόγραμμα σχηματίζουν 51 λίτρας, ἢ 100 χιλιόγραμμα ἰσοδυναμοῦν μὲ 204 λίτρας σχεδόν.

Ἤδη ζητεῖται ἡ τιμὴ τῶν 69λίτ. 0ἡμ. 7οὐγ. 4δρ. 29κ. εἰς χιλιόγραμμα, καὶ δεκαδικὰς ὑποδιαιρέσεις τοῦ χιλιογράμμου.

Ἀνάγομεν τὸν δεδομένον ἀριθμὸν εἰς κόκκους κατὰ τὴν γνωστὴν μέθοδον, καὶ εὑρίσκομεν 640253 κόκκους. Λοιπὸν, ἐὰν διαιρέσωμεν 640253 διὰ 18827, 15 ἢ 64025300 διὰ 1882715, τὸ πηλίκον 34,006899, τὸ ὁποῖον συνάγομεν διὰ ταύτης τῆς πράξεως, εἶναι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς, τουτέστι 69λίτ., 0ἡμ. 7οὐγ. 4δρ. 29κ. ἰσοδυναμοῦν μὲ 34χ.,006899, ἢ 34 χιλιόγραμμα, 6 γράμμα καὶ 899 χιλιόγραμμα.

Καὶ ἀντιστρόφως προβάλλεται νὰ ἐκτιμήσωμεν 34χιλ., 006899 εἰς λίτρας, ἡμίλιτρα, οὐγγίας κτλ.

Εἴδομεν ἤδη, ὅτι ἓν χιλιόγραμμον ἰσοδυναμεῖ μὲ 2 λίτρας, 04287652. Λοιπὸν 34.χλ., 006899 ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ γινόμενον τῶν δύο τούτων ἀριθμῶν.

$$\begin{array}{r} 69^{\text{λίτ.}},47189 \\ \hline 2 \\ \hline 0^{\text{ἡμ.}},94378 \\ 8 \\ \hline 7^{\text{ούγ}},55024 \\ 8 \\ \hline 4^{\text{δρ.}},40192 \\ 72 \\ \hline 80384 \\ 281344 \\ \hline 28^{\text{κ.}},93824. \end{array}$$

Τὸ γινόμενον τοῦτο περιέχει δεκατέσσαρα ψηφία δεκαδικά, ἀλλὰ μὴ λαμβάνοντες παρὰ τὰ πέντε πρῶτα κατὰ τὰ ἀριστερά, εὑρίσκομεν $69^{\text{λ.}}$,47189.

Πολλαπλασιάζοντες 0,47189 ἐπὶ 2, διὰ νὰ εὕρωμεν τὰ ἡμίλιτρα, εὑρίσκομεν $0^{\text{ἡμ.}}$,94378· πολλαπλασιάζοντες δὲ ἐκ νέου ἐπὶ 8 εὑρίσκομεν $7^{\text{ούγ.}}$,55024· πολλαπλασιάζοντες δὲ 0,55024 ἐπὶ 8, συνάγομεν $4^{\text{δρ.}}$,40192. Τέλος πάντων πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ 72 εὑρίσκομεν $28^{\text{κ.}}$,93824.

Λοιπὸν $34^{\text{χιλ.}}$,006899 ἰσοδυναμοῦν μὲ $69^{\text{λίτ.}}$, $0^{\text{ἡμ.}}$ $7^{\text{ούγ.}}$ $4^{\text{δρ.}}$ $29^{\text{κόκ.}}$, τὸ ὁποῖον βεβαιόνει τὴν πρώτην πρᾶξιν.

Σ. Κ. Ἐλογαριάσαμεν εἰς τὸ πρῶτον γινόμενον μόνον τὰ πέντε δεκαδικὰ ψηφία· διότι, ἐπειδὴ ὁ πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ 2, 8, 8 καὶ 72 ἄλλο δὲν εἶναι, εἰμὴ ὁ πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ 9216, τὸ πραχθὲν σφάλμα εἶναι μικρότερον ἀπὸ $\frac{9216}{100000}$ κόκκους, προσέγγισις ἱκανωτάτη.

§. 103. Ὑπάρχουσι πίνακες συγκρίσεως μεταξὺ τοῦ παλαιοῦ βάρους καὶ τῶν μέτρων, καὶ μεταξὺ τῶν νέων, καὶ ἀντιστρόφως, διὰ μέσου τῶν ὁποίων μὲ εὐκολίαν δύναταί τις νὰ ἐκτελέσῃ τὰς ἀναγωγάς, περὶ τῶν ὁποίων ὡμιλήσαμεν. Ἰδοὺ ὁ τρόπος, διὰ τοῦ ὁποίου κατασκευάζονται οἱ πίνακες οὗτοι.

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἐπρόκειτο νὰ κατασκευάσωμεν τὸν πίνακα τῆς συγκρίσεως τῶν παλαιῶν γραμμικῶν μέτρων μὲ τὰ νέα, καὶ ἀντιστρόφως.

Κατ' ἀρχὰς ἐπροσδιορίσθη ἡ τιμὴ τῆς ὀργυιᾶς εἰς μέτρα, τιμή, ἡ ὁποία εὑρεθεῖσα (ἀριθμ. 100) μὲ ὀκτὼ δεκαδικὰ ψηφία, εἶναι ἴση μὲ $1^{\mu},94903631$. Πολλαπλασιάζοντες ταύτην τὴν τιμὴν ἐπὶ 2, 3, 4 . . . 9 συνάγομεν τὰς τιμὰς τῶν 2, 3, 4 . . . 9 ὀργυιῶν.

Προχωροῦντες διαδοχικῶς εἰς ὅλα ταῦτα τὰ ἐξαγόμενα τὴν ὑποδιαστολὴν μίαν ἢ δύο ἢ τρεῖς κ. τ. λ. τάξεις κατὰ τὰ δεξιὰ, συνάγομεν τὰς τιμὰς τῶν 10, 20, 30 κ. τ. λ. . . . 100, 200, 300 . . . 1000, 2000, 3000 κ. τ. λ. ὀργυιῶν.

Ἐὰν πάλιν λάβωμεν τὸ $\overline{6}^{ον}$ τοῦ 1,94903631, συνάγομεν τὴν τιμὴν τοῦ ποδὸς, καὶ ἔπειτα ἐκείνας τῶν 2, 3, 4, 5 ποδῶν.

Λαμβάνοντες τὸ δωδέκατον τῆς τιμῆς τοῦ ποδὸς συνάγομεν τὴν τιμὴν τοῦ δακτύλου, καὶ μετὰ ταῦτα ἐκείνας τῶν 2, 3, 4 . . . 11 δακτύλων.

Ἡ αὐτὴ πρᾶξις γίνεται καὶ διὰ τὰς γραμμάς. Ὅσον δὲ διὰ τὸν ἀντίστροφον πίνακα ὁ σχηματισμός του εἶναι ἀπολύτως ὅμοιος· φθάνει νὰ λαμβάνωμεν πρῶτον τὴν τιμὴν τοῦ μέτρου εἰς ὀργυιὰς, τιμὴν, τὴν ὁποίαν εὑρήκαμεν ἴσην μὲ $0^{ορ},51307407$.

Ὅθεν ἐὰν ζητηθῇ νὰ ἐκτιμήσωμεν εἰς μέτρα, ὑποδεκάμετρα, ὑφεκατόμετρα κ. τ. λ. $254^{ορ.}$ $3^{π.}$ $7^{δ.}$ $11^{γρ.}$

Λαμβάνομεν ἀπὸ τὸν πίνακα διαδοχικῶς τὰς τιμὰς $4^{ορ.}$, $50^{ορ.}$, $200^{ορ.}$, μετὰ ταῦτα ἐκείνας τῶν $3^{π.}$, $7^{δ.}$ $11^{γρ.}$, καὶ ἑνόνομεν ὅλας αὐτὰς τὰς τιμὰς, καὶ οὕτως προσδιορίζομεν τὰς ζητουμένας τιμὰς δι' ἁπλῶν προσθέσεων.

Εἰς τὸ ἀντίστροφον ζήτημα, προσδιορίζομεν κατὰ πρῶτον τὴν τιμὴν ἑνὸς τινὸς ἀριθμοῦ μέτρων καὶ δεκαδικῶν ὑποδιαιρέσεων τοῦ μέτρου, ἐκφρασμένων εἰς ὀργυιὰς, καὶ δεκαδικὸν κλάσμα τῆς ὀργυιᾶς, κλάσμα, τὸ ὁποῖον τρέπομεν μετὰ ταῦτα εἰς πόδας πολλαπλασιάζοντές το ἐπὶ 6, μετὰ ταῦτα πολλαπλασιάζομεν τὸ συναγόμενον ἀπὸ 12 δεκαδικὸν κλάσμα, διὰ νὰ σχηματίσωμεν τοὺς δακτύλους, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Ἀλλ' ἐκτὸς τοῦ, ὅτι οἱ τοιοῦτοι πίνακες δύνανται πολλάκις νὰ ἦναι σφαλεροὶ, ἡ ἰδία χρῆσίς των ὄχι πάντοτε δίδει τὴν ὁποίαν ἐπιθυμοῦμεν προσέγγισιν· πρόσθες ἔτι, ὅτι ὄχι πάντοτε δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν αὐτοὺς, ὅταν τοὺς χρειαζώμεθα. Εἶναι ἀνάγκη λοιπὸν νὰ ἀναπτύξωμεν τοὺς τρόπους τοῦ νὰ ἐκτελῶμεν αὐτὰς τὰς τροπὰς, ἀποδεχόμενοι τοῦτα μόνον τὰ ἐξαγόμενα.

Τὸ φράγκον ἰσοδυναμεῖ μὲ $\frac{81}{80}$ τῆς λίβρας. Ἡ τιμὴ τοῦ μέτρου εἶναι $3^{\pi.}$, $0^{\delta.}$, $11^{\gamma\rho.}$, 296. Τέλος πάντων ἐκείνη τοῦ χιλιογράμμου εἶναι $18827^{\kappa o\kappa.}$, 15.

§. 104. Ἂς ἐπαναλάβωμεν τώρα τὸ πρόβλημα τοῦ ἀριθμοῦ 98, ὅπου ἐμείναμεν διὰ νὰ δώσωμεν περισσοτέραν σαφήνειαν.

Εἷς ἔμπορος ὑφασμάτων εἶχε πωλήσει μέχρι τινὸς τὴν πήχην ἑνὸς ὑφάσματος $36^{\lambda.}$ $17^{\sigma.}$ $6^{\delta.}$ Ζητεῖται ἀπὸ πόσα φράγκα κατ' ἀναλογίαν ἀξίζει τὸ μέτρον τοῦ ἰδίου ὑφάσματος.

Ἄγομεν κατὰ πρῶτον τὰς $36^{\lambda.}$ $17^{\sigma.}$ $6^{\delta.}$ εἰς φράγκα, δεκατημόρια, κ. τ. λ. ἢ διὰ μέσου τῶν πινάκων, ἢ κατὰ τὸν κανόνα τοῦ ἀριθμοῦ 99, καὶ εὑρίσκομεν $36^{\varphi\rho.}$, 4197 διὰ τὴν τιμὴν τῆς πήχης. Προσέτι τὸ μέτρον ἐκφραζόμενον εἰς πήχην (κατὰ τὸν ἀριθμ. 101) ἔχει τιμὴν $0^{\pi.}$, 839576. Λοιπὸν ἡ τιμὴ τοῦ μέτρου εἶναι ἴση μὲ ἓν μέρος τῶν $36^{\varphi\rho.}$, 4197, τὸ ὁποῖον ἐκφράζεται διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἀριθμῶν 36,4197 καὶ 0,839576· καὶ ἐκτελουμένου τοῦ τοιούτου πολλαπλασιασμοῦ, εὑρίσκομεν 30,5771060472.

Ἕπεται λοιπὸν, ὅτι ἡ τιμὴ ἑνὸς μέτρου θέλει εἶναι 30 φρ., 58 ἑκ. (ὅρα διὰ τὸν σύντομον τρόπον τοῦ ἐκτελεῖν τὸν πολλαπλασιασμὸν τὸν ἀκόλουθον ἀριθμόν.)

Προτεθείσθω ἔτι τὸ ἀκόλουθον ζήτημα. Ἡ λίτρα μιᾶς πραγματείας ἀξίζει 25 λ., 18 σ., 9 δην., καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ τῶν 375 χίλ. καὶ 175 γρ. τῆς αὐτῆς πραγματείας.

Κατὰ πρῶτον ὁ ἀριθμὸς 26 λίβ. 11 σολ. 9 δην. ἠγμένος εἰς φράγκα κ. τ. λ. δίδει 25 φρ., 271605· τουτέστι ἐφράζει τὴν τιμὴν τῆς λίτρας εἰς φράγκα κ. τ. λ.

Προσέτι 375 χίλ., 175 ἠγμένα εἰς λίτρας κατὰ τὸν πίνακα, ἢ κατὰ τὸν κανόνα τοῦ ἀριθμοῦ 102, ἀποτελοῦν 766 λιτ., 436198, χωρὶς νὰ θεωρῶμεν ἄλλο, παρὰ τὰ πρῶτα ἓξ δεκαδικὰ ψηφία, τὰ ὁποῖα ἀρκοῦσι. Λοιπὸν ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν 25 φρ., 271605 ἐπὶ 766, 426198, τὸ γινόμενον εἶναι ἡ ζητουμένη τιμή.

Καὶ εὑρίσκομεν ἐξαγόμενον μεῖον $\frac{1}{100}$, 19639,07.

Λοιπὸν 375 χίλ. καὶ 175 γρ. ἀξίζουν 19369 φρ.,07 δεκ.

Μέθοδοι σύντομοι διὰ τὸν Πολλαπλασιασμὸν καὶ διαίρεσιν τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων.

§. 105. Εἰς τὰ προηγούμενα ζητήματα ἐκτελέσαμεν πολλαπλασιασμοὺς ἀριθμῶν συνθέτων ἐκ πολλῶν δεκαδικῶν ψηφίων· ἐνῷ ἀρκοῦσε διὰ τὴν ὑπόθεσιν, τῆς ὁποίας ζητοῦμεν τὴν λύσιν, νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον μὲ πολὺ μικρότερον ἀριθμὸν δεκαδικῶν ψηφίων, παρὰ μ' ὅσα παριστάνουν ὁμοῦ οἱ δύο παράγοντες. Εἶναι λοιπὸν ὠφέλιμον νὰ γνωρίσωμεν μίαν μέθοδον, διὰ μέσον τῆς ὁποίας νὰ ἠμπορῶμεν, χωρὶς νὰ εἴμεθα ὑποχρεωμένοι νὰ ἐκτελῶμεν ὅλον τὸν πολλαπλασιασμὸν, νὰ προσδιορίζωμεν μόνον τὰ δεκαδικὰ ψηφία, τῶν ὁποίων ἔχομεν ἀνάγκην.

Διὰ νὰ δώσωμεν πρώτην τινὰ ἰδέαν ταύτης τῆς μεθόδου· ἂς λάβωμεν τοὺς δύο ἀριθμοὺς 34,253467, καὶ 5,4637, καὶ ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ζητοῦμεν νὰ προσδιορίσωμεν τὸ γινόμενόν των μεῖον $\frac{1}{1000}$.

Τὸ τέχνασμα τοῦ τρόπου τούτου εἶναι εἰς τὸ νὰ μεταχειρισθῶμεν εἰς τοὺς πολλαπλασιασμοὺς ἐπὶ τὰ διάφορα ψηφία τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, χιλιοστημόρια ἢ μονάδας μιᾶς τάξεως ἀνωτέρας, καθὼς τῶν ἑκατοστημορίων, δεκατημορίων, καὶ ἁπλῶν μονάδων κ. τ. λ. Ἤδη δὲ ἐπειδὴ ἀρκοῦσι 10 δεκαχιλιοστημόρια, διὰ νὰ σχηματίσουν 1 χιλιοστημόριον, διὰ τοῦτο εἶναι ἀκόμη ὠφέλιμον νὰ ἐκτανθῶμεν ἕως εἰς τὰ δεκαχιλιοστημόρια, τὰ ὁποῖα δύνανται νὰ δώσωσι τὰ μερικὰ γινόμενα.

Μετὰ ταύτας τὰς πρώτας παρατηρήσεις ἰδοὺ τίνι τρόπῳ πράττομεν.

Κατὰ πρῶτον ἀντιστρέφομεν τὴν τάξιν τῶν ψηφίων ἑνὸς τῶν παραγόντων π. χ. τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, καὶ ἔχομεν 7364, 5, καὶ μετὰ ταῦτα γράφομεν τοῦτο ὑπὸ τὸν πολλαπλασιαστέον οὕτως, ὥστε τὸ ψηφίον 5 τῶν μονάδων του νὰ εὑρίσκεται ὑπὸ τοῦ ψηφίου τῶν δεκαχιλιοστημορίων τοῦ πολλαπλασιαστέου· τότε τὸ ψηφίον τῶν δεκάτων του εὑρίσκεται ἀναγκαίως ὑπὸ τὸ ψηφίον τῶν χιλιοστημορίων τοῦ πολλαπλασιαστέου, τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοστημορίων του ὑπὸ τῶν ἑκατοστημορίων, καὶ οὕτως ἐφεξῆς· τὰ δὲ ψηφία τῶν δεκάδων, ἑκατοντάδων κ. τ. λ. ἐὰν εἴχαμεν, ἤθελαν εἶσθαι ἀναγκαίως θεμένα ὑπὸ τὰ ψηφία τῶν ἑκατοχιλιοστημορίων, μιλλιονιστημορίων τοῦ πολλαπλασιαστέου.

Ἐν ἑνὶ λόγῳ ἕκαστον ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ εἶναι διὰ ταύτης τῆς τάξεως θεμένον ὑπὸ τὸ ψηφίον, τοῦ ὁποίου τὸ γινόμενον ἐπὶ ἐκεῖνο τοῦ πολλαπλασιαστοῦ δίδει τὰ δεκαχιλιοστημόρια.

34,253467	
7364,5	
1712673	δεκαχιλιοστημόρια.
137013	
20552	
1027	
239	
187,1504	

Τούτου τεθέντος, πολλαπλασιάζομεν κατὰ πρῶτον ἐπὶ τὸ ψηφίον 5 τοῦ πολλαπλασιαστοῦ ὅλα τὰ ψηφία τοῦ πολλαπλασιαστέου, ἀρξάμενοι ἐκ τοῦ ψηφίου 4, τὸ ὁποῖον ἀνταποκρίνεται μὲ τὸ ψηφίον 5, καὶ ἀμελοῦντες τὸ γινόμενον τοῦ 67 ἐπὶ 5, ἐκτὸς τῶν τριῶν μονάδων, τὰς ὁποίας κρατοῦμεν ἀπὸ τὸ γινόμενον τοῦ 6 ἐπὶ 5, αἱ ὁποῖαι ἐκφράζουσι δεκαχιλιοστημόρια, ἐπειδὴ τὸ γινόμενον τοῦτο εἶναι 30 ἑκατοχιλιοστημόρια. Συνάγομεν οὕτως 1712673 δεκαχιλιοστημόρια, τὰ ὁποῖα γράφομεν ὑπὸ τοὺς δύο παράγοντας, ἀφ' οὗ ὑπογραμμίσωμεν αὐτούς.

Περνῶντες εἰς τὸ ψηφίον 4 τῶν δεκατημορίων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸ ψηφίον τοῦτο ὅλον τὸν πολλαπλασιαστέον ἀρξάμενοι ἀπὸ τὸ ψηφίον 3, καὶ ἀμελοῦντες τὸ γινόμενον τοῦ 467 ἐπὶ 4, ἐκτὸς τῆς κρατηθείσης μονάδος, ἡ ὁποία δίδει 4 φοραῖς 4, ἐπειδὴ αὐτη ἡ μονὰς ἐκφράζει ἀκόμη δεκαχιλιοστημόριον· καὶ οὕτως ἔχομεν 137013 δεκαχιλιοστημόρια, τὸ ὁποῖον γράφομεν ὑπὸ τὸ πρῶτον γινόμενον, εἰς τρόπον ὥστε τὰ τελευταῖα ψηφία νὰ ἀνταποκρίνωνται, ἐπειδὴ καὶ τὰ δύο ἐκφράζουν δεκαχιλιοστημόρια.

Πράττομεν παρομοίως εἰς ἕκαστον ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, προσέχοντες νὰ ἀρχίζωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν ἀπὸ τὸ ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστέου, τὸ ὁποῖον εἶναι θεμένον ἄνω τοῦ ψηφίου τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, τὸ ὁποῖον θεωροῦμεν, καὶ προσθέτοντες μόνον εἰς τὸ γινόμενον ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον κρατοῦμεν ἐκ τοῦ γινομένου τοῦ ψηφίου, τὸ ὁποῖον ἀκολουθεῖ ἐκεῖνο τοῦ πολλαπλασιαστέου, ἐκ τοῦ ὁποίου ἀρχίζομεν τὸν πολλαπλασιασμόν.

Εἰς τὸν πολλαπλασιοσμὸν ἐπὶ τὸ ψηφίον 6, προσθέτομεν 2 εἰς τὸ γινόμενον τοῦ 34, 25 ἐπὶ 6, ἐπειδὴ 6 φοραῖς 3 δίδουν 18 ἑκατοστημόρια, τὰ ὁποῖα ἰσοδυναμοῦν σχεδὸν μὲ 2 δεκαχιλιοστημόρια· ἐπειδὴ ἕως τοῦ νῦν ἐξαλείψαμεν πολλὰ ἑκατοχιλιοστημόρια.

Παρομοίως προσδιορίζομεν τὰ τρία ἄλλα γινόμενα 20552, 1027 καὶ 239, τὰ ὁποῖα γράφομεν ὑπὸ τῶν ἀνωτέρων, ὥστε τὰ ἄλλα ψηφία νὰ ἀνταποκρίνωνται.

Μετὰ ταῦτα κάμνομεν τὸ ἄθροισμα ὅλων τούτων τῶν γινομένων, καὶ συνάγομεν 1871504, ἀριθμὸν, τοῦ ὁποίου πρέπει νὰ χωρίσωμεν διὰ μιᾶς ὑποδιαστολῆς τέσσαρα δεκαδικὰ ψηφία· ἐπειδὴ ἐκφράζει δεκαχιλιοστημόρια.

Τέλος πάντων ἐξαλείφομεν τὸ τελευταῖον ψηφίον, καὶ εὑρίσκομεν 187,150 διὰ τὸ ζητούμενον μεῖον 0,001.

Δυνάμεθα νὰ βεβαιώσωμεν εὐκόλως τὸ ἐξαγόμενον ἐκτελοῦντες ὁλόκληρον τὸν πολλαπλασιασμόν.

Σ. Κ. Δυναταίτις εὐκόλως νὰ νομίσῃ, ὅτι μὲ τὸ νὰ ἐβαστάξαμεν τὰ δεκαχιλιοστημόρια τῶν μερικῶν γινομένων, τὸ ψηφίον τῶν δεκαχιλιοστημορίων καθ' ἑαυτὸ εἶναι ἀκριβές· ἀλλὰ εἰς τοῦτο λανθανόμεθα, ἐπειδὴ πολλάκις εἶναι μικρότερον πολλῶν μονάδων· συνίσταται δὲ εἰς τοῦτο, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν μονάδων τῆς στήλης τῶν ἑκατοχιλιοστημορίων δύναται νὰ δώσῃ πολλὰς μονάδας διὰ νὰ κρατήσωμεν. Μ' ὅλον τοῦτο εἶναι βέβαιον, ὅτι τὸ σφάλμα δὲν ἠμπορεῖ νὰ προξενήσῃ ἐπὶ τοῦ ψηφίου τῶν χιλιοστημορίων μεγαλωτάτην διαφορὰν, ἐπειδὴ διὰ νὰ γένῃ τοῦτο, πρέπει τὸ ἄθροισμα νὰ δώσῃ 10 δεκαχιλιοστημόρια διὰ νὰ βαστάξωμεν, τὸ ὁποῖον δὲν δύναται νὰ ἀκολουθήσῃ, ἐκτὸς ὅταν ἔχωμεν πλέον τῶν 10 μερικῶν γινομένων, τουτέστι περισσότερον ἀπὸ δέκα ψηφία εἰς τὸν πολλαπλασιαστήν. Διὰ νὰ ἀποφύγωμεν κάθε σφάλμα αὐξάνομεν ἀπὸ μίαν μονάδα τὸ ὅ,τι κρατοῦμεν ἀπὸ κάθε μερικὸν πολλαπλασιασμὸν, ὅταν τὸ δεύτερον ψηφίον εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ γινομένου, τὸ ὁποῖον δίδει τὸ ὅ,τι κρατοῦμεν, εἶναι μεγαλήτερον τοῦ 5.

Ἓν ἄλλο παράδειγμα θέλει σαφηνίσει ταύτην τὴν πρᾶξιν.

Προβάλλεται νὰ προσδιορίσωμεν τὸ γινόμενον τῶν δύο ἀριθμῶν 763,05403678956 καὶ 254,4630578 μεῖον 0,00001.

Ἐπειδὴ θέλομεν νὰ ἦναι εἰς τὸ γινόμενον τὰ πέντε πρῶτα δεκαδικὰ ψηφία ἀκριβῆ, πρέπει νὰ κρατήσωμεν ὅλα τὰ μιλιονιστημόρια, τὰ ὁποῖα δύνανται νὰ δώσωσι τὰ μερικὰ γινόμενα *).

Οὕτως, ἀφ' οὗ ἀντιστρέψωμεν τὴν τάξιν τῶν ψηφίων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, τὸ θέτομεν ὑπὸ τὸν πολλαπλασιαστέον οὕτως, ὥστε τὸ ψηφίον 4 τῶν μονάδων του νὰ εὑρίσκεται ὑπὸ τὰ μιλλιονιστημόρια τοῦ πολλαπλασιαστέου· τὰ ἄλλα ψηφία θέτονται ἀφ'

---

*) Ὁ Μεταφραστής. Ἐπειδὴ, ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν μιλλιονιστημορίων ὑπερβαίνῃ τὰ ἐννέα μιλλιονιστημόρια, τότε πρέπει νὰ κρατήσωμεν τὰ σχηματιζόμενα ἐξ αὐτῶν χιλιοστημόρια, διὰ νὰ τὰ ἑνώσωμεν μὲ τὰ ἑκατοχιλιοστημόρια τῶν μερικῶν γινομένων· ἀλλέως τὸ σφάλμα ἤθελεν εἶναι μεγαλήτερον ἀπὸ ἓν χιλιοστημόριον, ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως.

ἑαυτῶν εἰς τὰς τάξεις, τὰς ὁποίας ἀνωτέρω ἐπροσδιορίσαμεν, καὶ ἐκτελοῦμεν τὸν πολλαπλασιασμόν.

Εἰς τὸν πρῶτον	763,05403678956	
πολλαπλασια-	8750364,452	
σμὸν, ἐπειδὴ τὸ	152610807358	χιλιοστημόρια
ψηφίον 9, τὸ	38152701839	
ὁποῖον ἀκολου-	3052216147	
θεῖ τὸ 8 (τοῦ	305221614	
ὁποίου μέλλο-	4578324 2	
μεν νὰ ἀρχίσω-	2289162	
μεν τὴν πρᾶξιν)	38152	
λόγου χάριν πολ-	5341	
λαπλασιαζόμε-	610	
νον ἐπὶ 2 δίδει	194169,063468	

18 δεκαμιλλιονιστημόρια, διὰ τοῦτο κρατοῦμεν τὰ 2 μιλλιονιστημόρια, διὰ νὰ τὰ ἐνώσωμεν μὲ τὸ γινόμενον.

Παρομοίαν παρατήρησιν κάμνομεν σχετικῶς πρὸς τὸν τρίτον καὶ πέμπτον πολλαπλασιασμόν· εἰς ὅλους δὲ τοὺς ἄλλους κρατοῦμεν τὰ μιλλιονιστημόρια τὰ σχηματιζόμενα ἀμέσως ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Ἐκτελοῦντες τὴν ἄθροισιν, καὶ χωρίζοντες ἓξ ψηφία δεκαδικὰ πρὸς τὰ δεξιὰ, μετὰ ταῦτα ἐξαλείφοντες μὲ ἓν σημεῖον τὸ τελευταῖον ψηφίον, συνάγομεν 194169,06346 διὰ τὸ γινόμενον μεῖον 0,00001.

Σ. Κ. Προκύπτει ἐκ τῆς αὐξήσεως τῆς γινομένης εἰς τὰς μονάδας, τὰς ὁποίας ἐκρατήσαμεν, ἓν εἶδος ἀνταμοιβῆς ἐκείνων τὰς ὁποίας ἐπαρατήσαμεν καὶ τὸ ψηφίον τὸ ἐξαλειφθὲν δὲν εἶναι συνήθως διάφορον τοῦ ἀληθοῦς παρὰ μίαν ἢ δύο μονάδας. *)

---

*) Ὁ Μεταφραστής. Καὶ ἐπειδὴ ἡ διαφορὰ τῆς μιᾶς ἢ δύο μονάδων συνίσταται εἰς τὸ ψηφίον, τὸ ὁποῖον ἀποφράσσομεν,