1ον Νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἓν κλάσμα ἐπὶ τὸ γινόμενον πολλῶν ἄλλων ἄγεται εἰς πολλαπλασιασμὸν τοῦ πρώτου κλάσματος ἐφ' ἕκαστον τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου διαδοχικῶς.

2ον Τὸ γινόμενον δύο ἢ περισσοτέρων κλασμάτων εἶναι πάντοτε τὸ αὐτὸ, καθ' ὁποίαν τάξιν ἐκτελέσωμεν τὸν πολλαπλασιασμόν.

Τέλος πάντων δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν ἐπὶ τῶν κλασμάτων ὅλας τὰς συσταθείσας ἀρχὰς εἰς τὸν ἀριθμὸν 40, ἐπὶ τῶν τροπῶν, τὰς ὁποίας δέχεται τὸ γινόμενον ἑνὸς πολλαπλασιασμοῦ, ἢ τὸ πηλίκον μιᾶς διαιρέσεως, ὅταν κάμωμεν μερικὰς μεταβολὰς εἰς ἕνα τῶν ὅρων τῆς ἐργασίας, τὴν ὁποίαν ἔχομεν σκοπὸν νὰ ἐκτελέσωμεν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

Περὶ Συμμιγῶν ἀριθμῶν.

§. 64. Τοῦτο τὸ κεφάλαιον καὶ τὸ ἀκόλουθον εἰς κάποιον τρόπον ἄλλο τι δὲν εἶναι, παρὰ ἔκτασις τοῦ δευτέρου· ἐπειδὴ ἄλλο δὲν περιέχουν, παρὰ ἐφαρμογὰς τῆς γενικῆς θεωρίας τῶν κλασμάτων, εἰς ζητήματα, εἰς τὰ ὁποῖα θεωροῦμεν κλάσματα ἑνὸς μερικοῦ εἴδους.

Ἡ θεωρία τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν, ἥτις κάμνει τὸ ὑποκείμενον τούτου τοῦ κεφαλαίου (πρέπει νὰ τὸ ὁμολογήσωμεν) ἐστερήθη μέρος τῆς ἀξιολογότητος ὕστερον ἀπὸ τὴν στερέωσιν τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος τῶν βαρέων καὶ μέτρων, μ' ὅλον τοῦτο ἡμεῖς ἐνομίσαμεν ἀναγκαῖον νὰ ἐκθέσωμεν αὐτὴν εἰς ὅλην της τὴν ἔκτασιν. ὡς εὑρίσκεται εἰς τὰ παλαιὰ συγγράμματα, ἐπειδὴ ἡμεῖς τὴν θεωροῦμεν ἱκανὴν νὰ γυμνάσῃ τὴν νεολαίαν εἰς τὰς θεωρίας τῶν κλασμάτων, καὶ νὰ τῇ δώσῃ τὴν ἕξιν τούτου τοῦ ὑπολογισμοῦ, ἡ ὁποία δὲν εἶναι τόσον εὔκολος νὰ ἀποκτηθῇ. Ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος ἡ συμπλοκὴ τῶν πράξεων, τὰς ὁποίας ἡ τοιαύτη θεωρία περιέχει μᾶς κάμνει νὰ γνωρίσωμεν καλλίτερα τὴν ὠφέλειαν τοῦ νέου συστήματος τῶν βαρέων καὶ τῶν μέτρων συγκρινομένων μὲ τὰ παλαιά.

Εἴδομεν (εἰς τὸν ἀριθμ. 8), ὅτι διὰ νὰ ἐκτιμήσωμεν τὰς ποσότητας, τὰς πλέον μικροτέρας τῆς ἀρχικῆς μονάδος, ἐννοοῦμεν ταύτην τὴν μονάδα διῃρημένην εἰς μέρη μικρότερα, τὰ ὁποῖα θεωροῦμεν, ὡς νὰ ἐσχημάτιζον αὐτὰ ταῦτα μονάδας· ἀλλὰ διὰ νὰ καταστήσωμεν τὸν ὑπολογισμὸν πλέον εὔκολον, ἀντὶ νὰ διαιρέσωμεν τὴν μονάδα εἰς τόσον μέγαν ἀριθμὸν ἴσων μερῶν, τὴν διαιροῦμεν κατὰ πρῶτον εἰς προσδιορισμένον τινὰ ἀριθμὸν ἀπὸ μέρη, καὶ μετὰ ταῦτα ὑποδιαιροῦμεν αὐτὰ εἰς ἕνα ἄλλον, καὶ ἐκ νέου αὐτὰ εἰς ἄλλα μέρη, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Διὰ τοῦτο εἰς τὰ νομίσματα ἐδιαιροῦσαν ἄλλοτε τὴν λίτραν εἰς εἴκοσι ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα τὰ ὠνόμαζον σολδία, τὸ δὲ σολδίον εἰς δώδεκα μέρη, τὰ ὁποῖα τὰ ὠνόμαζον δηνάρια. Παρομοίως τὴν μονάδα τοῦ μήκους, ἢ τὴν ὀργυιὰν, τὴν ἐδιαιροῦσαν εἰς 6 πόδας, τὸν πόδα εἰς 12 δακτύλους· κ. τ. λ.

Ἑκάστη τέχνη ὑποδιαιροῦσε τὴν ἀρχικὴν μονάδα κατ' ἀρέσκειάν της. Ἰδοὺ ὁ κατάλογος, ὅς τις περιέχει ἀρχικὰς μονάδας διαφορετικῆς φύσεως· καὶ τὰς ὑποδιαιρέσεις των.

Νομίσματα.

§. 65. Ἡ λίβρα ἀξίζει 20 σολδία, τὸ σολδίον 12 δηνάρια. Λοιπὸν ἡ λίβρα ἰσοδυναμεῖ μὲ 12 φοραῖς 20 ἢ 240 δηνάρια.

Λέγομεν ἀκόμη, ὅτι τὸ σολδίον εἶναι τὸ $\overline{20}^{\text{ον}}$ τῆς λίβρας, τὸ δηνάριον τὸ $\overline{12}^{\text{ον}}$ τοῦ σολδίου, ἢ $\overline{240}^{\text{ον}}$ τῆς λίβρας.

Περὶ τῶν μηκῶν.

Ἡ ὀργυιὰ δύναται 6 πόδας, ὁ ποῦς 12 δακτύλους, ὁ δάκτυλος 12 γραμμάς. Λοιπὸν ἡ ὀργυιὰ εἶναι ἴση μὲ 12 φοραῖς 6, ἢ 72 δακτύλους, ἢ 12 φοραῖς 72, εἴτε 864 γραμμάς.

Ἢ μᾶλλον, ὁ ποῦς εἶναι τὸ ἕκτον μέρος τῆς ὀργυιᾶς, ὁ δάκτυλος εἶναι τὸ $\overline{12}^{\text{ον}}$ τοῦ ποδός, ἢ $\overline{72}^{\text{ον}}$ τῆς ὀργυιᾶς, ἡ γραμμὴ τὸ $\overline{12}^{\text{ον}}$ τοῦ δακτύλου, ἢ $\overline{864}^{\text{ον}}$ τῆς ὀργυιᾶς.

Ὁδοιπορικὰ μέτρα.

Ἡ μέση λέγα εἶναι ἴση μὲ 2250 ὀργυιάς· αὕτη ὑποδιαιρεῖται εἰς ἡμίσεα, εἰς τέταρτα, εἰς ἡμιτέταρτα ἢ ὄγδοα τῆς λέγας.

Βάρη.

Ἡ λίτρα διαιρεῖται εἰς 2 ἡμίλιτρα, τὸ ἡμίλιτρον εἰς 8 οὐγγίας, ἡ οὐγγία εἰς 8 δραχμάς, ἡ δραχμὴ εἰς 72 κόκκους. Λοιπὸν ἡ λίτρα ἰσοδυναμεῖ μὲ 8 φοραῖς 2, ἢ 16 οὐγγίας, 8 φοραῖς 16, ἢ 128 δραχμὰς, 72 φοραῖς 128, ἢ 9216 κόκκους.

Ἡ προσέτι τὸ ἡμίλιτρον εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς λίτρας, ἡ οὐγγία εἶναι τὸ 8^{ον} τοῦ ἡμιλίτρου, ἢ τὸ 16^{ον} τῆς λίτρας· ἡ δραχμὴ εἶναι τὸ 8^{ον} τῆς οὐγγίας, ἢ τὸ 128^{ον} τῆς λίτρας· ὁ δὲ κόκκος εἶναι τὸ 72^{ον} τῆς δραχμῆς, ἢ τὸ 9216^{ον} μέρος τῆς λίτρας.

Περὶ τοῦ χρόνου.

Ἡ ἡμέρα διαιρεῖται εἰς 24 ὥρας, ἡ ὥρα εἰς 60 λεπτὰ, τὸ λεπτὸν εἰς 60 δεύτερα, τὸ δεύτερον εἰς 60 τρίτα· ὁ χρόνος εἰς 365 ἡμέρας, ἢ εἰς 366, ὄντος τοῦ χρόνου ἐμβολιμαίου.

Καλεῖται ἀριθμὸς συμμιγὴς πᾶς, ὅς τις σύγκειται ἀπὸ μέρη ἀναφερόμενα εἰς τὰς διαφόρους μονάδας, ἐκεῖνος δὲ, ὅς τις περικλείει ἓν εἶδος μόνον μονάδων, καλεῖται ἀμιγὴς ἀριθμός· οὕτως 13 $^{λίβρ.}$ 17 $^{σολδ.}$ 9 ^{δην}, 25 $^{ὀρ.}$ 4 $^{ποδ.}$ 7 $^{δακτ.}$ 6 $^{γραμ.}$ 41 $^{λιτρ.}$ 1 $^{ημιλ.}$ 7 $^{ούγ.}$ 5 $^{δραχ.}$ 17 $^{κόκ.}$ κ. τ. λ. εἶναι ἀριθμοὶ συμμιγεῖς, ἀλλὰ 8 $^{λίτρ.}$ 17 $^{ὀργ.}$ 24 $^{κόκ.}$ εἶναι ἀριθμοὶ ἀμιγεῖς.

§. 66. Ἀρχίζομεν δὲ τὴν θεωρίαν τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν ἀναπτύσσοντες δύο ἰδιαζούσας εἰς αὐτοὺς ἐργασίας, καὶ αἱ ὁποῖαι θεωροῦνται, ὡς βάσις, εἰς τὰς τέσσαρας ἀρχικὰς ἐργασίας. Ἡ πρώτη ἔχει σκοπὸν, δεδομένου ἑνὸς συμμιγοῦς νὰ τὸν ἀνάξωμεν εἰς ἕνα μόνον ἀριθμὸν κλασματικὸν τῆς ἀρχικῆς μονάδος. Ἡ δευτέρα εἶναι, δεδομένης ἀντιστρόφως ἐκφράσεως τινὸς κλασματικῆς νὰ ἐξάξωμεν τὸν ὁποῖον αὐτὴ παριστᾷ συμμιγῆ ἀριθμόν.

1ον Ἂς ἀνάξωμεν 17 ὀργ. 5 ποδ. 7 δακτ. 11 γραμ. εἰς κλασματικόν τινὰ ἀριθμὸν τῆς ὀργυιᾶς.

Εἶναι φανερὸν, ὅτι ἐὰν φθάσωμεν νὰ προσδιορίσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν γραμμῶν, τὰς ὁποίας περιέχει ὁ δεδομένος ἀριθμὸς, τότε ἀρκεῖ εἰς τὸ τοιοῦτον ἐξαγόμενον νὰ δώσωμεν παρονομαστὴν τὸ 864, ἐπειδὴ κατὰ τὸν πίνακα (ἀριθ. 63.) ἡ γραμμὴ εἶναι ἴση μὲ $\frac{1}{864}$ τῆς ὀργυιᾶς.

ὀργ.	ποδ.	δακ.	γρ.
17	5	7	11
6			
107			
12			
1291			
12			
15503			

Ἂς ἄξωμεν λοιπὸν τὸν δεδομένον ἀριθμὸν εἰς γραμμὰς κατὰ πρῶτον. Ἐπειδὴ ἡ ὀργυιὰ δύναται 6 πόδας, ἄγομεν εἰς πόδας 17 ὀργ. . . . . ., καὶ 5 ποδ. . . . . . πολλαπλασιάζοντες τὸ 17 ἐπὶ 6, καὶ εἰς τὸ γινόμενον προσθέτοντες 5 ποδ. τοὺς ὁποίους ἤδη ἔχομεν, καὶ οὕτως εὑρίσκομεν 107 διὰ ἐξαγόμενον.

Τώρα ἐπειδὴ ὁ ποῦς εἶναι ἴσος μὲ 12 δακτύλους, ἄγομεν εἰς δακτύλους τοὺς 107 ποδ. καὶ 7 δακτ. πολλαπλασιάζοντες 107 ἐπὶ 12, καὶ προσθέτοντες εἰς τὸ γινόμενον 7 δακτ., καὶ ἔχομεν 1291 δακτ.

Τέλος πάντων, ἐπειδὴ ὁ δάκτυλος ἰσοδυναμεῖ μὲ 12 γραμμὰς, ἀρκεῖ διὰ νὰ ἄξωμεν 1291 δακτ. εἰς γραμμὰς, νὰ πολλαπλασιάσωμεν 1291 ἐπὶ 12, καὶ νὰ προσθέσωμεν 11 εἰς τὸ γινόμενον, καὶ οὕτως θέλομεν ἔχει 15503 γραμ. διὰ τὸν ὅλον ἀριθμὸν τῶν γραμμῶν, τὸν ὁποῖον περιέχει ὁ ἀριθμὸς 17 ὀργ. 5 ποδ. 7 δακ. 11 γραμ.

Δίδοντες λοιπὸν εἰς 15503 τὸν παρανομαστὴν 864 εὑρίσκομεν $\frac{15503}{864}$ τῆς ὀργυιᾶς διὰ τὸν ζητούμενον ἀριθμόν.

Σ. Κ. Εἰς ταύτην τὴν ἐργασίαν ἡμεῖς ἐπολλαπλασιάσαμεν 2 φοραῖς ἐπὶ τὸν 12. Ἐν γένει ὁ πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ τὸν παράγοντα 12 εἶναι συχνοτάτης χρήσεως εἰς τὴν θεωρίαν τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν, καὶ πρέπει νὰ ἠξεύρωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμὸν τινὰ ἐπὶ 12, ὡς πολλαπλασιάζομεν ἕνα ἀριθμὸν μὲ ἓν μόνον ψηφίον, μ' ὅλον τοῦτο, ἕως νὰ γυμνασθῇ τὸ μνημονικὸν, ἠμποροῦμεν νὰ κάμωμεν χρῆσιν ἑνὸς πίνακος πολλαπλασιασμοῦ (ἀριθ. 18) ἐκτεινομένου ἕως εἰς 12.

Τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα μᾶς διδάσκει πῶς ἐκτελεῖται ἡ πρώτη ἐργασία. Καὶ ἰδοὺ εἰς τί συνίσταται. Πολλαπλασιάζομεν κατὰ πρῶτον τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀρχικῶν μονάδων, τὰς ὁποίας περιέχει ὁ συμμιγὴς ἀριθμὸς ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων τῆς ἀνωτέρας ὑποδιαιρέσεως, αἱ ὁποῖαι περιέχονται εἰς τὴν ἀρχικὴν μονάδα, καὶ προσθέτομεν εἰς τὸ γινόμενον τὰς μονάδας ταύτης τῆς ὑποδιαιρέσεως, τὰς ὁποίας ἔχομεν ἤδη. Πολλαπλασιάζομεν τὸ ἐξαγόμενον ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων τῆς δευτέρας ὑποδιαιρέσεως, τὰς ὁποίας περιέχει ἡ πρώτη, καὶ προσθέτομεν εἰς τὸ γινόμενον τὰς μονάδας τῆς δευτέρας ὑποδιαιρέσεως, τὰς ὁποίας ἔχομεν ἤδη.

Πολλαπλασιάζομεν τὸ νέον ἐξαγόμενον ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων τῆς τρίτης ὑποδιαιρέσεως, τὰς ὁποίας περιέχει ἡ δευτέρα, καὶ προσθέτομεν εἰς τὸ γινόμενον, καὶ ἐφεξῆς . . . ἀκολουθοῦντες οὕτως τὴν πρᾶξιν, ἕως νὰ φθάσωμεν εἰς τὴν τελευταίαν ὑποδιαίρεσιν.

Δίδομεν τέλος πάντων παρονομαστὴν εἰς τὸ τελευταῖον ἐξαγόμενον τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων τῆς μικροτέρας ὑποδιαιρέσεως, τὰς ὁποίας περιέχει ἡ ἀρχικὴ μονάς, ἀριθμὸν, ὅστις εὑρίσκεται εἰς τὸν πίνακα. (ἀριθμ. 65.)

§. 65. 2$^{\text{ον}}$ Ἂς ἀναχθῇ ὁ κλασματικὸς ἀριθμὸς $\frac{615}{23}$ τῆς ὀργυιᾶς εἰς ἀριθμόν τινα συμμιγῆ.

Ἀρχίζομεν νὰ διαιρῶμεν τὸ 615 διὰ τοῦ 23, τὸ ὁποῖον δίδει πηλίκον 26, καὶ κατάλοιπον 17. Λοιπὸν δυνάμεθα ἤδη νὰ εἴπωμεν, ὅτι ὁ προτεθεὶς ἀριθμὸς εἶναι ἴσος μὲ $26^{\text{ὀργ.}}$ πλέον $\frac{17}{23}$ τῆς ὀργυιᾶς· ἀλλ' ἐπειδὴ κάθε ὀργυιὰ ἰσοδυναμεῖ μὲ $6^{\text{ποδ.}}$ ἕπεται, ὅτι $\frac{17}{23}$ τῆς ὀργυιᾶς ἰσοδυναμεῖ μὲ $\frac{17}{23}$ τῶν

615	23		
155	ὀρ.	ποδ.	δακτ.
17	26	4	5
6			
102			
10			
12			
120			
5			
12			
60			
14			

$6^{\text{ποδ.}}$, τουτέστι (ἀριθμ. 62) μὲ $\frac{6 \text{ φοραῖς } 17}{23}$ ἢ $\frac{102}{23}$ τοῦ ποδός, καὶ ὅσαις φοραῖς τὸ 102 περιέχει τὸ 23, τόσους πόδας ἔχομεν εἰς τὸ πηλίκον. Λοιπὸν βλέπομεν, ὅτι φθάσαντες εἰς τὸ ὑπόλοιπον 17 διὰ νὰ συνάξωμεν τοὺς πόδας, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ 17 ἐπὶ 6 καὶ νὰ διαιρέσωμεν τὸ 102 διὰ τοῦ 23, καὶ οὕτω συνάγομεν πηλίκον $4^{\text{ποδ.}}$ καὶ ὑπόλοιπον 10. Ὁ δεδομένος ἀριθμὸς λοιπὸν εἶναι ἴσος μὲ $26^{\text{ὀργ.}}$ καὶ $4^{\text{ποδ.}}$ πλέον $\frac{10}{23}$ τοῦ ποδός.

Καὶ συλλογιζόμενοι περὶ τούτου τοῦ νέου κλάσματος, ὡς περὶ τοῦ ἄνω, βλέπομεν, ὅτι διὰ νὰ τὸ ἀνάξωμεν εἰς δακτύλους ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ ὑπόλοιπον 10 ἐπὶ 12, καὶ νὰ διαιρέσωμεν τὸ γινόμενον 120 ἐπὶ 23, καὶ οὕτω συνάγομεν πηλίκον 5 δακτύλους, καὶ ὑπόλοιπον 5.

Πολλαπλασιάζοντες τὸ νέον τοῦτο ὑπόλοιπον ἐπὶ 12, διὰ νὰ λάβωμεν τὰς γραμμὰς, ἔχομεν γινόμενον 60, τὸ ὁποῖον διαιρεθὲν ἐπὶ 23 δίδει πηλίκον $2^{\text{γραμ.}}$ μὲ ὑπόλοιπον 14.

Λοιπὸν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς εἶναι ἴσος μὲ $26^{\text{ὀργ.}}$, $4^{\text{ποδ.}}$, $5^{\text{δακτ.}}$, $2^{\text{γραμ.}}$, καὶ $\frac{14}{23}$ τῆς γραμμῆς. Ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον παραιτοῦμεν τὸ κλάσμα $\frac{14}{23}$ τῆς γραμμῆς, ἢ τοῦ δίδομεν μίαν ὡς ἔγγιστα τιμήν· ἐὰν π. χ. εἴχαμεν $\frac{14}{28}$ ἀντὶ $\frac{14}{23}$, τότε τὸ κλάσμα ἰσοδυναμεῖ μὲ $\frac{1}{2}$ γραμμῆς· ἀλλ' ἐπειδὴ ὁ παρονομαστὴς εἶναι μικρότερος ἀπὸ τὸ 28, διὰ τοῦτο $\frac{14}{23}$ εἶναι ὀλόγον τί μεγαλήτερον τῆς $\frac{1}{2}$ γραμμῆς.

Γενικὸς κανών. Διὰ νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν τελευταίαν ταύτην πρᾶξιν, διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ προτεθέντος κλασματικοῦ ἀριθμοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, καὶ οὕτως ἔχομεν πηλίκον ἐκφράζον τὰς ἀρχικὰς μονάδας, καὶ ἕν τι ὑπόλοιπον.

Πολλαπλασιάζομεν τὸ τοιοῦτον ὑπόλοιπον ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων τῆς πρώτης ὑποδιαιρέσεως, τὰς ὁποίας περιέχει ἡ ἀρχικὴ μονὰς, καὶ διαιροῦμεν τὸ γινόμενον διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, ὅθεν συνάγομεν νέον τί πηλίκον, τὸ ὁποῖον ἐκφράζει τὰς μονάδας τῆς πρώτης ὑποδιαιρέσεως, καὶ νέοντι ὑπόλοιπον.

Πολλαπλασιάζομεν τὸ τοιοῦτον ὑπόλοιπον ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων τῆς δευτέρας ὑποδιαιρέσεως, τὰς ὁποίας περιέχει ἡ πρώτη, καὶ διαιροῦμεν τὸ γινόμενον διὰ τοῦ παρονομαστοῦ· οὕτω συνάγομεν πηλίκον τὰς μονάδας τῆς δευτέρας ὑποδιαιρέσεως, καὶ ἓν νέον ὑπόλοιπον, ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἐργαζόμεθα, ὡς καὶ ἐπὶ τῶν προηγουμένων· καὶ οὕτως ἐξακολουθοῦμεν τὴν πρᾶξιν, ἕως οὗ νὰ φθάσωμεν εἰς τὴν τελευταίαν ὑποδιαίρεσιν.

§. 68. Αὗται αἱ δύο πράξεις βεβαιοῦνται ἀναμεταξύ των, τουτέστιν ἡ μία ἀπὸ τὴν ἄλλην, ὡς μὲ εὐκολίαν δυνάμεθα νὰ ἴδωμεν.

Π. χ. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν συμμιγῆ ἀριθμὸν, ὁ ὁποῖος εἰς τὴν πρώτην μᾶς ἔδωκε τὸν ἀριθμὸν $\frac{15503}{864}$, ἐφαρμόζομεν εἰς ταύτην τὸν ἀνωτέρω κανόνα. Εὐχαρίστως δὲ δεικνύομεν ἐδῶ τὸν ἄνευ τινὸς δυσκολίας ὑπολογισμὸν τοῦτον.

15503 | 864
6863 | 17 ὀργ, 5 πόδ, 7 δακτ, 11. γρ
815
6
4890
570
12
6840
792
12
9504
864
0

Ἡ βάσανος τῆς δευτέρας πράξεως ἔχει ἀνάγκην σαφηνείας.

Ἀφ' οὗ ἐφαρμόσωμεν εἰς τὸν ἀριθμὸν $26^{ὀργ}$, $4^{ποδ}$, $5^{δακ}$, $2^{γρ}$, τὸν τρόπον τῆς τρίτης ἐργασίας, εὑρίσκομεν ἐξαγόμενον $23102^{γρ}$ ἢ $\frac{23102}{864}$ τῆς ὀργυιᾶς· ἀλλ' ἐπειδὴ εἰς τὰς $23102^{γρ}$ εὑρίσκονται καὶ $\frac{14}{23}$ τῆς γραμμῆς, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰς 23102 ἐπὶ 23, διὰ νὰ ἄξωμεν αὐτὰ εἰς εἰκοστὰ τρίτα, καὶ μετὰ ταῦτα νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸ γινόμενον τὸ 14, ὅθεν λαμβάνομεν 531360 ἀριθμὸν, εἰς τὸν ὁποῖον πρέπει ἔπειτα νὰ δώσωμεν παρονομαστὴν 23 φοραῖς τὸ 864.

$$
\begin{array}{r}
\overset{ὀρ}{26}\,.\ \overset{ποδ}{4}\,.\ \overset{δακ}{5}\,.\ \overset{γρ}{2}\,.\ \frac{14}{23}. \\
6 \\
\hline
160 \\
12 \\
\hline
1925 \\
12 \\
\hline
23102^{γρ} \\
23 \\
\hline
69306 \\
46204 \\
14 \\
\hline
531360
\end{array}
$$

Ἀλλ' ἐπειδὴ $\frac{531360}{23 \text{ φορ. } 864}$ πρέπει νὰ ἦναι ἴσον μὲ $\frac{615}{23}$, ἔπεται ὅτι 531360 πρέπει νὰ διαιρῆται διὰ 864, τὸ ὁποῖον εὐκόλως γνωρίζομεν, καὶ τότε ἐξαλείφοντες τὸν κοινὸν παράγοντα 864 ἀνευρίσκομεν τῷ ὄντι $\frac{615}{23}$.

Ἰδοὺ ἄλλο παράδειγμα τῆς δευτέρας πράξεως μετὰ τῆς βασάνου.

Νὰ τρέψωμεν εἰς συμμιγῆ τινὰ ἀριθμὸν λιτρῶν, ἡμιλίτρων, οὐγγιῶν, δραχμῶν καὶ κόκκων τὸν κλασματικὸν ἀριθμὸν $\frac{12870}{365}$ τῆς λίτρας.

'Εργασία.

12870 | 365
λίτ. ημ. οὐγ. δρ. κόκ.
35, 0, 4, 1, 22, $\frac{250}{365}$

1920
95
2
190
8
1520
60
8
480
115
72
230
805
8280
980
250

Βάσανος.

λίτ. ημ. ουγ. δρ. κόκ
35, 0, 4, 1, 22, $\frac{150}{360}$

2
70
8
564
8
4513
72
9026
31591
22
324958
365
1624790
1949748
974874
250
118609920

118609920 | 9216
12870
26449
80179
64512
00000

$\frac{12870}{365}$

'Αφ' οὗ εὕρωμεν εἰς τὴν βάσανον τὸν ἀριθμὸν 118609920, ὅστις ἐκφράζει τὸ $\overline{365}^{ον}$ τοῦ κόκκου, διαιροῦμεν τοῦτον τὸν ἀριθμὸν διὰ 9216 ἀριθμοῦ κόκκων περιεχομένων εἰς τὴν λίτραν, καὶ συνάγομεν πηλίκον 12870· οὕτως εὑρίσκομεν τὸν δεδομένον ἀριθμὸν $\frac{12870}{365}$ τῆς λίτρας.

§. 69. Διὰ μέσου τῶν τοιούτων δύο προοιμιωδῶν κανόνων αἱ τέσσαρες πρῶται ἐργασίαι ἐπὶ τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν, ἀνάγονται εἰς τὰς ἐκτεθείσας εἰς τὸ ἀνωτέρω κεφάλαιον. Τῷ ὄντι ὁποιαδήποτε εἶναι ἡ δεδομένη πρᾶξις, δυνάμεθα κατὰ πρῶτον νὰ τρέψωμεν τοὺς συμμιγεῖς ἀριθμοὺς, ἐπὶ τῶν ὁποίων ἔχομεν νὰ πράξωμεν, ἕκαστον εἰς ἕνα μόνον ἀριθμὸν τῆς ἀρχικῆς μονάδος κατὰ τὸν κανόνα (τοῦ ἀριθμ. 66), μετὰ ταῦτα ἐκτελοῦμεν ἐπὶ τῶν οὕτω μεταμορφωθέντων ἀριθμῶν τὴν ζητουμένην πρᾶξιν, κατὰ τὸν κανόνα τῶν κλασμάτων. Ὅθεν ἔχομεν ἀριθμὸν τινὰ κλασματικὸν, τὸν ὁποῖον τρέπομεν εἰς ἀριθμὸν συμμιγῆ, κατὰ τὸν κανόνα τοῦ ἀριθμ. 67, ἡ ὁποία πρᾶξις θέλει μᾶς δώσει τὸ ζητούμενον ἐξαγόμενον· ἀλλ' αὕτη ἡ τελευταία πρᾶξις εἶναι ὀλιγώτερον ἁπλῆ διὰ τὰς τρεῖς πρώτας πράξεις, παρὰ τὴν ὁποίαν ἤδη θέλομεν ἀναπτύξει.

Πρόσθεσις τῶν Συμμιγῶν ἢ Συμπεπλεγμένων ἀριθμῶν.

§. 70. Ἡ πρᾶξις αὕτη ἐκτελεῖται, ὡς ἡ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν. Γράφομεν ὅλους τοὺς δεδομένους ἀριθμοὺς τὸν ἕνα ὑπὸ τὸν ἄλλον, εἰς τρόπον, ὥστε αἱ μονάδες τοῦ ἰδίου εἴδους, ἢ τῆς ἰδίας ὑποδιαιρέσεως νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν στήλην, καὶ ἀρχίζομεν νὰ προσθέτωμεν τὰς μονάδας τῆς μικροτέρας ὑποδιαιρέσεως. Ἐὰν τὸ ἄθροισμά των δὲν συγκροτῇ μίαν μονάδα τοῦ ἀμέσως ἀνωτέρου εἴδους, τὸ γράφομεν ὑποκάτω· ἐὰν ὅμως περιέχῃ πολλὰς μονάδας, ὥστε νὰ σχηματίζῃ μίαν ἢ πολλὰς μονάδας τῆς ὑποδιαιρέσεως τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας, γράφομεν ὑποκάτω τῆς στήλης τὴν ἐξαχθεῖσαν ὑπεροχὴν τοῦ ἀθροίσματος ἐπὶ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μονάδων τοῦ ἀνωτέρου εἴδους, καὶ κρατοῦμεν αὐτὰς, διὰ νὰ τὰς προσθέσωμεν μὲ τὰς ὁμοίας των, ὑπὸ τὰς ὁποίας ἐργαζόμεθα, ὡς ἀνωτέρω.

Πρῶτον παράδειγμα.

Προτείνεται νὰ προστεθῶσιν οἱ ἀριθμοί.

λίβρ.	σολ.	δην.	
765	19	7	
1279	17	6	
915	13	11	
2594	19	8	
589	8	6	
6145$^{λίβ.}$	19$^{σολ.}$	2$^{δην.}$	ἄθροισμα.
3333	33	0	. . . βάσανος.

Προσθέτοντες κατὰ πρῶτον τὰ δηνάρια εὑρίσκομεν κεφάλαιον 38, τὰ ὁποῖα περικλείουσι 3 φοραῖς 12 δηνάρια, ἢ 3 σολδία καὶ 2 δηνάρια, γράφομεν τὰ 2 δηνάρια, καὶ κρατοῦμεν 3 σολδία, διὰ νὰ τὰ προσθέσωμεν μὲ τὰς μονάδας τῶν σολδίων.

Εὑρίσκομεν δὲ νέον κεφάλαιον 39, γράφομεν 9 καὶ κρατοῦμεν τρεῖς δεκάδας, διὰ νὰ τὰς ἑνώσωμεν μὲ τὴν στήλην τῶν δεκάδων τῶν σολδίων, ὅθεν ἔχομεν 7 δεκάδας σολδίων· ἐπειδὴ δὲ δύο δεκάδες σολδίων κάμνουν μίαν λίβραν, πέρνομεν τὸ ἥμισυ τοῦ 7, τὸ ὁποῖον εἶναι 3 καὶ 1 ὑπόλοιπον· γράφομεν τὸ τοιοῦτον ὑπόλοιπον εἰς τὴν δεκάδα τοῦ σολδίου, καὶ κρατοῦμεν τὰς 3$^{λίβ.}$ διὰ νὰ τὰς ἑνώσωμεν μὲ τὰς λίβρας, καὶ ἀθροίζομεν αὐτὰς κατὰ τὴν συνήθειαν.

Ἡ βάσανος ἐκτελεῖται προσέτι, ὡς ἐκείνη τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν (ὅρα ἀριθμ. 15).

Δεύτερον Παράδειγμα.

Ἂς προστεθῶσιν οἱ ἀκόλουθοι ἀριθμοί· (ἡ ἀρχικὴ μονὰς εἶναι ἡ λίτρα.)

λίτ.	ἡμ.	ουγ.	δρ.	κόκ.
59	1	7	6	46
47	0	2	7	39
87	1	5	3	53
37	1	7	5	29
232	1	7	7	23
~~82~~	~~2~~	~~2~~	~~2~~	0

167	72
23	2

Ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τῶν κόκκων λαμβάνομεν 167, τὸ ὁποῖον γράφομεν εἰς τὸ πλάγιον, ὡς ἐδῶ ἀνωτέρω φαίνεται, καὶ διαιροῦμεν αὐτὸ διὰ τοῦ 72 ἀριθμοῦ τῶν κόκκων τῶν περιεχομένων εἰς τὴν δραχμὴν, καὶ συνάγομεν πηλίκον 2, καὶ ὑπόλοιπον 23, τὸ ὁποῖον γράφομεν ὑπὸ τὴν στήλην τῶν κόκκων, κρατοῦμεν δὲ τὰ 2 διὰ νὰ τὰ ἑνώσωμεν μὲ τὰς δραχμὰς, καὶ εὑρίσκομεν κεφάλαιον 23, τουτέστι 2 φοραῖς 8 δραχμὰς πλέον 7 ἢ δύο οὐγγίας, καὶ 7 δραχμὰς, τὰς ὁποίας γράφομεν ὑπὸ τὰς δραχμὰς, καὶ κρατοῦμεν τὰς δύο οὐγγίας, διὰ νὰ τὰς φέρωμεν εἰς τὴν στήλην τῶν οὐγγιῶν, ἐπὶ τῶν ὁποίων πράττομεν, ὡς καὶ ἐπὶ τῶν ἀκολούθων, ὡς ἐπράξαμεν εἰς τὰς προηγουμένας.

Ἀφαίρεσις τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν.

§. 71. Γράφομεν τὸν μικρότερον ἀριθμὸν ὑπὸ τὸν μεγαλήτερον οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες τοῦ ἰδίου εἴδους νὰ ἀνταποκρίνωνται, καὶ ἀρχίζομεν τὴν ἀφαίρεσιν ἀπὸ τὰς μονάδας τοῦ μικροτέρου εἴδους. Ἐὰν ὁ κάτω ἀριθμὸς τῶν μονάδων τούτων δύναται νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τὸν ἄνω, ὑπογράφομεν τὸ ὑπόλοιπον, ἐὰν δὲ τὸ ἐναντίον, δανειζόμεθα μίαν μονάδα ἀπὸ τὴν ἀμέσως ἀνωτέραν ὑποδιαίρεσιν, τὴν ὁποίαν ἀνάγοντες εἰς μονάδας τοῦ ἰδίου εἴδους, ἑνόνομεν αὐτὰς μὲ τὰς μονάδας, ἐκ τῶν ὁποίων πρότερον δὲν ἐδυνάμεθα νὰ ἀφαιρέσωμεν τὰς μονάδας τοῦ κάτω ἀριθμοῦ, προσέχοντες νὰ ἐλαττόνωμεν κατὰ μονάδα τὸν ἀπὸ τὸν ὁποῖον ἐδανείσθημεν ἀριθμόν.

Πρῶτον Παράδειγμα.

	λίβ.	σολ.	δη.
Ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ	327	11	7
νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν	189	15	11
Ὑπόλοιπον .	137	15	8
Βάσανος .	327	11	7

μὴ δυνάμενοι νὰ ἀφαιρέσωμεν 11 δηνάρια ἀπὸ 7, δανειζόμεθα ἓν σολδίον ἀπὸ τὰ 11, τὸ ὁποῖον δύναται 12 δηνάρια, τὰ ὁποῖα ἑνωμένα μὲ τὰ 7 δίδουν 19 δηνάρια, καὶ λέγομεν 11 ἀπὸ τὰ 19 μένουν 8, τὰ ὁποῖα γράφομεν ὑποκάτω τῶν δηναρίων.

Μετὰ ταῦτα ἀπὸ τὰ 11, ἢ μᾶλλον 10, διότι προεδανείσθημεν 1, μὴ δυνάμενοι νὰ ἀφαιρέσωμεν 15 σολδία, δανειζόμεθα μίαν λίβραν, ἥτις ἰσοδυναμεῖ μὲ 20 σολδία, τὰ ὁποῖα ἑνόνοντες μὲ τὰ 10 ἔχομεν 30 σολδία, καὶ ἀφαιροῦντες 15 ἀπὸ τὰ 30, λαμβάνομεν 15, τὰ ὁποῖα γράφομεν ὑπὸ τὴν στήλην τῶν σολδίων.

Τέλος πάντων ἀφαιροῦντες 189 ἀπὸ τὰ 326, εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 137. Οὕτως τὸ ὑπόλοιπον τῆς ἀφαιρέσεως εἶναι 137$^{\text{λίβ.}}$ 15$^{\text{σολ.}}$ 8$^{\text{δην.}}$, ὡς δυνάμεθα νὰ βεβαιωθῶμεν, συναθροίζοντες τὸ ὑπόλοιπον καὶ τὸν μικρότερον ἀπὸ τοὺς δύο ἀριθμούς.

Δεύτερον Παράδειγμα.

	ὀρ.	ποδ.	δακ.	γρ.	
Ἐκ τοῦ	39	4	7	5	
θέλομεν νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν	27	4	11	7	
	11	4	7	10	Ὑπόλοιπον.
	39	4	7	5	. Βάσανος.

Ἐπειδὴ δὲν ἠμποροῦμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν 7 γραμμὰς ἀπὸ 5, δανειζόμεθα ἕνα δάκτυλον, ὅστις δύναται 12 γραμμὰς, τὰς ὁποίας ἑνόνοντες μὲ τὰς 5 συνάγομεν 17, καὶ λέγομεν 7 ἀπὸ τὰ 17 μένουν 10.

Μετὰ ταῦτα, ἐπειδὴ 11 δὲν δύνανται νὰ ἀφαιρεθῶσιν ἀπὸ τὰ 6, δανειζόμεθα παρομοίως ἕνα πόδα, ὅστις κάμνει 12 δακτύλους καὶ 6, τὰ ὁποῖα ἔχομεν, 18, τὰ ὁποῖα ἀφαιρούμενα ἀπὸ τὰ 18 δίδουν 7. Περνῶντες δὲ εἰς τοὺς πόδας, καὶ μὴ δυνάμενοι νὰ ἀφαιρέσωμεν 5 ἀπὸ τοὺς 3, δανειζόμεθα μίαν ὀργυιὰν, ἥτις ἔχει 6 πόδας, οἱ ὁποῖοι ἑνωμένοι μὲ τοὺς 3 κάμνουν 9, καὶ ἀφαιροῦντες ἀπὸ τὸ 9 τὰ 5 ἔχομεν 4· καὶ ἀφαιροῦντες τέλος πάντων 27 ἀπὸ τὰς 38 ὀργυιὰς ἔχομεν διὰ ὑπόλοιπον 11. Λοιπὸν τὸ ζητούμενον ὑπόλοιπὸν τὸ εἶναι $11^{\text{ὀρ.}}\ 4^{\text{πδ.}}\ 7^{\text{δακ.}}\ 10^{\text{γραμ.}}$

Τρίτον Παράδειγμα.

	λίτ.	ουγ.	δρ.	κόχ.	
Ἓν ἀγγεῖον γεμάτον ὑγροῦ ζυγιάζει . .	17	5	4	17	
(*) Ἡ πλημμέλεια ἢ τὸ βάρος τοῦ κενοῦ ἀγγείου εἶναι	4	7	3	49	
Ζητεῖται τὸ βάρος τοῦ ὑγροῦ.	12	12	5	40	Ὑπόλοιπον.
	17	5	4	17	Δοκιμή.

Εἶναι φανερὸν, ὅτι ἀφαιροῦντες ἀπὸ τὸ ὅλον βάρος τοῦ ὑγροῦ καὶ τοῦ ἀγγείου τὸ βάρος τοῦ ἀγγείου μόνον, τὸ ὑπόλοιπον θέλει ἐκφράζει τὸ τοῦ ὑγροῦ βάρος.

Καὶ ἐπειδὴ δὲν δυνάμεθα νὰ ἀφαιρέσωμεν 49 ἀπὸ τὰ 17, δανειζόμεθα μίαν δραχμὴν, ἡ ὁποία ἰσο-

(*) Πλημμέλειαν ὠνόματα τὴν παρὰ τοῖς Γάλλοις (tare). (τὴν λαϊκῶς ξεπεσμός). Ὁ Μ.

δυναμεῖ μὲ 72 κόκκους, καὶ λέγομεν 49 ἀπὸ τὰ 72 πλέον 17. ἢ ἀπὸ τὸ 89 μένουν 40. Μετὰ ταῦτα 6 ἀπὸ τὰ 8 πλέον 3, ἢ ἀπὸ τὰ 11 μένουν 5. Περνῶντες εἰς τὰς οὐγγίας, 7 ἀπὸ τὰ 4 εἶναι ἀδύνατον νὰ ἀφαιρεθῶσιν· ἀλλ᾽ ἐπειδὴ ἡ λίτρα κάμνει 16 οὐγγίας, λέγομεν 7 ἀπὸ τὰς 16 πλέον 4, ἢ 20 μένουν 13. Τέλος πάντων 4 ἀπὸ τὰς 16 μένουν 12. Λοιπὸν τὸ ὁλικὸν βάρος τοῦ ὑγροῦ εἶναι $12^{\text{λιτ.}}$ $13^{\text{ουγ.}}$ $5^{\text{δρ.}}$ $40^{\text{κοκ.}}$

Πολλαπλασιασμὸς τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν.

Αὕτη ἡ πρᾶξις, πλέον συμπεπλεγμένη ἀπὸ τὰς δύο προτέρας, ἀπαιτεῖ μεγάλην προσοχὴν, καὶ διὰ παραδειγμάτων σαφηνίζεται καλλίτερα.

Διὰ πλειοτέραν σαφήνειαν διακρίνομεν δύο ἀρχικὰς περιστάσεις.

Ἡ πρώτη εἶναι, ὅταν τοῦ πολλαπλασιαστέου ὄντος συμπεπλεγμένου, ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι ἁπλοῦς, καὶ ἡ δευτέρα, ὅταν, ὄντος τοῦ πολλαπλασιαστέου συμπεπλεγμένου, ἢ μὴ, ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι συμπεπλεγμένος.

§. 72. Ἂς θεωρήσωμεν κατὰ πρῶτον τὴν πρώτην περίστασιν, καθ᾽ ἣν τοῦ πολλαπλασιαστέου ὄντος συμπεπλεγμένου, ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι ἁπλοῦς, ἢ ἀκέραιός τις ἀριθμός.

	λιβρ.	σολ.	δην.
Πολλαπλασιασθήτω.	247	17	11.
ἐπὶ	9		
	2231	1	3.

Εὑρίσκομεν αὐτὸ τὸ γινόμενον, πολλαπλασιάζοντες ὅλα τὰ μέρη τοῦ πολλαπλασιαστέου, ἀρξάμενοι ἀπὸ τὰ πλέον μικρότερα ἐπὶ τὸν πολλαπλαστὴν, προσ-