συνήθη τρόπον, καὶ τότε ἔχομεν 28 καὶ $\frac{10}{12}$ διὰ τὸ κεφάλαιον τῶν τριῶν ἀριθμῶν τ῀ν πηχῶν, τὰς ὁποίας ἐπώλησε.

Γράφομεν αὐτὸ τὸ ἄθροισμα ὑπὸ τὸν 30 καὶ $\frac{7}{8}$, καὶ ἐκτελοῦμεν τὴν ἀφαίρεσιν, ὡς ἀνωτέρω δέδεικται, παρατηροῦντες, ὅτι τὰ δύο κλάσματα δύνανται νὰ φερθῶσιν εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν διὰ 2 φοραῖς 12 ἢ 24.

Εὑρίσκομεν τέλος πάντων 2 καὶ $\frac{1}{24}$ ὑπόλοιπον τοῦ ὑφάσματος, τὸ ὁποῖον μὲ εὐκολίαν ὁ ἔμπορος δύναται νὰ βεβαιωθῇ, μετρῶν τὸ τμῆμα τὸ ἀποτελούμενον ἀπὸ τὰς τρεῖς πωλήσεις.

Περὶ Πολλαπλασιασμοῦ τῶν κλασμάτων.

§. 56. Ὁ πολλαπλασιασμὸς ἔχει ἐν γένει σκοπὸν (ἀρ. 9), δεδομένων δύο ἀριθμῶν, νὰ συνθέσῃ ἕνα τρίτον ἀριθμὸν μὲ τὸν πρῶτον, κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, καθ᾽ ὃν ὁ δεύτερος σύγκειται ἐκ τῆς μονάδος.

Τούτου τεθέντος, παρατηροῦμεν πολλὰς περιστάσεις εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν κλασμάτων. Δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν

α^{ον} Ἓν κλάσμα νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ ἕνα ἀκέραιον ἀριθμόν. Ἔστω π. χ. $\frac{7}{12}$ νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 5.

Κατὰ τὸν προειρημένον ὁρισμὸν, ἐπειδὴ ὁ πολλαπλασιαστὴς 5 περιέχει 5 φοραῖς τὴν μονάδα, ἐπεται ὅτι τὸ γινόμενον πρέπει νὰ εἶναι μὲ 5 φοραῖς τὰ $\frac{7}{12}$, ἢ πρέπει νὰ εἶναι 5 φοραῖς μεγαλήτερον τῶν $\frac{7}{12}$. Ἀλλ' εἴδομεν (εἰς τὸν ἀριθμ. 42) ὅτι κατασταίνομεν ἓν κλάσμα 5 φοραῖς μεγαλήτερον, πολλαπλασιάζοντες τὸν ἀριθμητὴν ἐπὶ 5, καὶ οὕτως γίνεται $\frac{5 \text{ φοραῖς } 7}{12}$ ἢ $\frac{35}{12}$ τὸ ζητούμενον γινόμενον.

Λοιπὸν διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἓν κλάσμα ἐπὶ ἀκέραιον τινὰ ἀριθμὸν, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμητὴν ἐπὶ τὸν ἀκέραιον, καὶ νὰ δώσωμεν εἰς τὸ γινόμενον τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος.

Τὸ γινόμενον $\frac{35}{12}$ τρέπεται εἰς 2 καὶ $\frac{11}{12}$, ὅταν ἐξάξωμεν τὰ ἀκέραια, τὰ ὁποῖα περιέχει τὸ κλάσμα (ἀριθμ. 53).

Εὑρίσκομεν παρομοίως, ὅτι τὸ γινόμενον τοῦ $\frac{13}{24}$ ἐπὶ 29 εἶναι ἴσον μὲ $\frac{377}{24}$ ἢ $15\frac{17}{24}$.

Ἔστω προσέτι νὰ πολλαπλασιασθῇ $\frac{11}{18}$ ἐπὶ 9, κατὰ πρῶτον προκύπτει, κατὰ τὸν κανόνα $\frac{99}{18}$ διὰ τὸ γινόμενον, ἢ ἐὰν ἐξάξωμεν τὰ ἀκέραια, $5\frac{9}{18}$, δηλαδὴ $5\frac{1}{2}$.

Τὸ ἀποτέλεσμα τοῦτο ἐσυνάγετο πλέον ἁπλούστερα· ἐπειδὴ νὰ πολλαπλασιάσωμεν $\frac{11}{18}$ ἐπὶ 9, δυνάμεθα (ἀριθμ. 24) ἀντὶ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμητὴν διὰ 9, νὰ διαιρέσωμεν τὸν παρονομαστὴν διὰ τοῦ 9, ἡ ὁποία πρᾶξις ἤθελε μᾶς δώσει $\frac{11}{2}$, ἢ 5 καὶ $\frac{1}{2}$.

Ἡ τελευταία αὕτη πρᾶξις ἐφαρμόζεται εἰς τὸ προτεθὲν παράδειγμα· ἐπειδὴ ὁ παρονομαστὴς διαιρεῖται ἐντελῶς διὰ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, τὸ ὁποῖον δὲν ἀκολουθεῖ πάντοτε, ἐν ᾧ ὁ συσταθεὶς κανὼν πάντοτε ἐφαρμόζεται εἰς πράξεις· τοῦτο εἶναι μία συντομία, τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν ἀπὸ τὴν μεγάλην γύμνασιν.

β^ον Εἷς ἀκέραιος ἀριθμὸς νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ ἓν κλάσμα. Ἔστω νὰ πολλαπλασιασθῇ 12 ἐπὶ $\frac{4}{7}$.

Ἐπειδὴ εἰς ταύτην τὴν περίστασιν ὁ πολλαπλασιαστὴς $\frac{4}{7}$ εἶναι ἴσος μὲ 4 φοραῖς $\frac{1}{7}$ τῆς μονάδος, τὸ γινόμενον πρέπει νὰ εἶναι καὶ αὐτὸ 4 φοραῖς $\frac{1}{7}$ τοῦ 12· τώρα τὸ ἕβδομον τοῦ 12 καταντᾷ (ἀριθμ. 41) εἰς $\frac{12}{7}$, καὶ διὰ νὰ λάβωμεν αὐτὸν τὸν ἀριθμὸν 4 φοραῖς, ἢ διὰ νὰ λάβωμεν ἕνα ἀριθμὸν 4 φοραῖς μεγαλήτερον ἀπὸ $\frac{12}{7}$, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμητὴν ἐπὶ 4· ὅθεν συνάγομεν $\frac{48}{7}$ ἢ 6 $\frac{6}{7}$ διὰ τὸ ζητούμενον γινόμενον.

Λοιπὸν διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕνα ἀκέραιον ἀριθμὸν ἐπὶ ἓν κλάσμα, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀκέραιον ἀριθμὸν διὰ τοῦ ἀριθμητοῦ, καὶ νὰ δώσωμεν εἰς τὸ γινόμενον τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος, καὶ μετὰ ταῦτα νὰ ἐξάξωμεν τὰς ἀκεραίας μονάδας, ἐὰν τὸ τοιοῦτον γινόμενον περιέχῃ.

Οὕτως τὸ γινόμενον τοῦ 29 ἐπὶ $\frac{7}{8}$ εἶναι ἴσον μὲ $\frac{203}{8}$, ἢ 25 $\frac{3}{8}$. Παρομοίως τὸ γινόμενον τοῦ 24 ἐπὶ $\frac{5}{6}$, εἶναι ἴσον μὲ $\frac{120}{6}$, ἢ 20, ἐξαγόμενον, τὸ ὁποῖον δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν διαιροῦντες κατὰ πρῶτον τὸ 24 διὰ 6, τὸ ὁποῖον ἤθελε προκύψει 4, καὶ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο ἐπὶ 5, ἀλλὰ λέγομεν πάλιν, ὅτι αἱ ἁπλότητας αὗται δὲν εἶναι πάντοτε δυναταί.

$\overline{\gamma}^{ον}$. Ἓν κλάσμα νὰ πολλαπλασθῇ ἐπὶ ἄλλο τι κλάσμα.

Ἔστω νὰ πολλαπλασιασθῇ $\frac{3}{4}$ ἐπὶ $\frac{5}{8}$.

Ὁ συλλογισμὸς εἶναι ἀνάλογος μὲ ἐκεῖνον τῆς ἄνω περιστάσεως. Ἐπειδὴ ὁ πολλαπλασιαστὴς $\frac{5}{8}$ εἶναι ἴσος μὲ 5 φοραῖς $\frac{1}{8}$ τῆς μονάδος, τὸ γινομενον πρέπει λοιπὸν νὰ εἶναι καὶ αὐτὸ 5 φοραῖς $\frac{1}{8}$ τοῦ πολλαπλασιαστέου $\frac{3}{4}$· τώρα διὰ νὰ λάβωμεν τὸ ὄγδοον μέρος τῶν $\frac{3}{4}$ πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν παρονομαστὴν ἐπὶ 8 (ἀριθμ. 42), τὸ ὁποῖον δίδει $\frac{3}{32}$, καὶ διὰ νὰ λάβωμεν ἓν κλάσμα 5 φοραῖς μεγαλήτερον τοῦ $\frac{3}{32}$, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμητὴν ἐπὶ 5, τὸ ὁποῖον θέλει μᾶς προκύψει $\frac{15}{32}$, διὰ τὸ . . . . ζητούμενον γινόμενον.

Λοιπὸν διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἓν κλάσμα ἐπὶ ἄλλο τι κλάσμα, πολλαπλασιάζομεν ἀριθμητὴν ἐπὶ ἀριθμητὴν, καὶ παρονομαστὴν ἐπὶ παρονομαστὴν, μετὰ ταῦτα εἰς τὸ πρῶτον γινόμενον δίδομεν παρονομαστὴν τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν.

Οὕτως τὸ γινόμενον τοῦ $\frac{7}{12}$ ἐπὶ $\frac{5}{6}$ εἶναι ἴσον μὲ $\frac{35}{72}$. Παρομοίως τὸ γινόμενον τῶν $\frac{8}{15}$ ἐπὶ $\frac{3}{4}$ εἶναι ἴσον μὲ $\frac{24}{60}$, ἢ μετὰ τὴν ἀναγωγὴν $\frac{2}{5}$.

§. 57. Σ. Κ. Εἰς τὰ δύο ἀνωτέρω παραδείγματα, τὸ γινόμενον εἶναι πάντοτε μικρότερον τοῦ πολλαπλασιαστέου, καὶ οὕτως πρέπει νὰ εἶναι, ἐπειδὴ ἡ πρᾶξις ἄλλο δὲν εἶναι, παρὰ τὸ νὰ λάβωμεν ἀπὸ τὸν πολλαπλασιαστέον ἓν μέρος σημειωμένον ἀπὸ τὸν παράγοντα πολλαπλασιαστήν,

§. 58. Τέλος πάντων εἷς τῶν δύο παραγόντων τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ἢ καὶ οἱ δύο δύνανται νὰ εἶναι ἀκέραιοι, ἑνωμένοι μὲ κλάσματα, ἀλλ' ἄγομεν αὐτὴν τὴν περίστασιν εἰς τὴν ἀνωτέρω.

Ἔστω π. χ. νὰ πολλαπλασιάσωμεν $7\frac{2}{3}$ ἐπὶ $5\frac{7}{38}$.

Οἱ τοιοῦτοι ἀριθμοὶ (ἀριθμ. 53) ἀνάγονται εἰς $\frac{23}{3}$ καὶ $\frac{47}{8}$, καὶ ἐκτελοῦντες τὸν πολλαπλασιασμὸν, κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα, συνάγομεν διὰ γινόμενον $\frac{1081}{24}$, ἢ ἐξαγομένων τῶν ἀκεραίων 45 καὶ $\frac{1}{24}$.

Ἠδυνάμεθα ἀκόμη νὰ ἐκτελέσωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν κατὰ μέρος, τουτέστι νὰ πολλαπλασιάσωμεν κατὰ πρῶτον 7 ἐπὶ 5, $\frac{2}{3}$ ἐπὶ 5, 7 ἐπὶ $\frac{7}{8}$ καὶ $\frac{2}{7}$ ἐπὶ $\frac{7}{8}$, μετὰ ταῦτα νὰ ἑνώσωμεν τὰ τοιαῦτα τέσσαρα γινόμενα, ἀλλὰ ἡ τοιαύτη πρᾶξις εἶναι ἐπίπονος καὶ μακρά.

Περὶ Διαιρέσεως τῶν κλασμάτων.

§. 59. Τὸ νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμὸν δι' ἄλλου συνίσταται (ἀριθμ. 9) εἰς τὸ νὰ εὕρωμεν ἕνα τρίτον ἀριθμὸν, ὅς τις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν δεύτερον νὰ προκύψῃ τὸν πρῶτον.

Ἕπεται ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τούτου καὶ ἀπὸ ἐκείνου τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (ἀριθμ. 56), ὅτι ὁ πρῶτος ἀριθμὸς καλούμενος διαιρετέος, συντίθεται ἐκ τοῦ τρίτου, ὅς τις καλεῖται πηλίκον, κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, μὲ τὸν ὁποῖον ὁ δεύτερος, καλούμενος διαιρέτης, συντίθεται ἐκ τῆς μονάδος.

Τούτου τεθέντος εἰς τὴν διαίρεσιν, καθὼς καὶ εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν κλασμάτων, παριστάνονται τρεῖς ἀρχικαὶ περιστάσεις. Δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν α^ον Νὰ διαιρέσωμεν ἓν κλάσμα δι' ἑνὸς ἀκεραίου, π. χ. τὸ κλάσμα $\frac{5}{7}$ νὰ διαιρεθῇ διὰ τοῦ 6.

Ἐπειδὴ ὁ διαιρέτης 6 εἶναι ἴσος μὲ 6 φοραῖς τὴν μονάδα, ἕπεται ὅτι ὁ διαιρετέος $\frac{5}{7}$ πρέπει νὰ εἶναι ἴσος μὲ 6 φοραῖς τὸ ζητούμενον πηλίκον, ἢ τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ αὐτὸ, τὸ πηλίκον πρέπει νὰ εἶναι τὸ ἕκτον μέρος τῶν $\frac{5}{7}$. Τώρα διὰ νὰ λάβωμεν τὸ ἕκτον ἑνὸς κλάσματος, ἢ διὰ νὰ εὕρωμεν ἓν κλάσμα 6 φοραῖς μικρότερον, πρέπει (ἀριθμ. 42) νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν παρονομαστὴν ἐπὶ 6, οὕτως συνάγομεν $\frac{5}{6 \text{ φοραῖς } 7}$, ἢ $\frac{5}{42}$ διὰ τὸ ζητούμενον πηλίκον.

Κανὼν Γενικός. Διὰ νὰ διαιρέσωμεν κλάσμα δι' ἀκεραίου, πολλαπλασιάζομεν τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος ἐπὶ τὸν ἀκέραιον, καὶ παραιτοῦμεν, ὡς ὑπάρχει, τὸν ἀριθμητήν.

Οὕτω $\frac{11}{12}$ διαιρεθὲν διὰ 8 δίδει $\frac{11}{96}$ πηλίκον· $\frac{23}{30}$ νὰ διαιρεθῇ διὰ 12 δίδει $\frac{23}{360}$.

Τὸ πηλίκον τοῦ $\frac{18}{25}$ διὰ 6 εἶναι $\frac{18}{150}$, ἀλλὰ δυνάμεθα προσέτι νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν τοῦ $\frac{18}{25}$ διὰ τοῦ 6, λαμβάνοντες τὸ ἕκτον τοῦ ἀριθμητοῦ, ὅθεν προκύπτει $\frac{3}{25}$, ἐξαγόμενον, εἰς τὸ ὁποῖον ἄγεται καὶ τὸ $\frac{18}{150}$, ἐξαλειφομένου τοῦ παράγοντος 6 κοινοῦ εἰς τοὺς δύο ὅρους.

β^{ον.} Νὰ διαιρέσωμεν ἀκέραιον δι' ἑνὸς κλάσματος.

Ἔστω νὰ διαιρεθῇ τὸ 12 διὰ $\frac{7}{9}$.

Ἐπειδὴ ὁ διαιρέτης $\frac{7}{9}$ εἶναι ἴσος μὲ 7 φοραῖς τὸ $\overline{9}^{ον}$ τῆς μονάδος, συνάγομεν, ὅτι ὁ διαιρετέος 12 εἶναι ἴσος μὲ 7 φοραῖς τὸ $\overline{9}^{ον}$ τοῦ ζητουμένου πηλίκου. Λοιπὸν λαμβάνοντες τὸ $\overline{7}^{ον}$ τοῦ 12, τὸ ὁποῖον δίδει $\frac{12}{7}$, θέλομεν ἔχει τὸ $\overline{9}^{ον}$ τοῦ ζητουμένου πηλίκου· καὶ διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὸ ζητούμενον πηλίκον, ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν $\frac{12}{7}$, 9 φοραῖς, τὸ ὁποῖον ἐκτελοῦμεν πολλαπλασιάζοντες τὸν ἀριθμητὴν ἐπὶ 9, καὶ ἐκ τούτου συνάγομεν $\frac{9 \text{ φοραῖς } 12}{7}$ ἢ $\frac{108}{7}$, ἢ ἐξάγοντες τὰς ἀκεραίας μονάδας, 15 καὶ $\frac{3}{7}$.

Λοιπὸν διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἕνα ἀκέραιον ἀριθμὸν δι' ἑνὸς κλάσματις, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀκέραιον διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, νὰ διαιρέσωμεν τὸ γινόμενον διὰ τοῦ ἀριθμητοῦ, καὶ νὰ ἐξάξωμεν τὰς ἀκεραίας μονάδας.

Ἄς παρατηρήσωμεν, ὅτι, ἐπειδὴ πρέπει νὰ λάβωμεν τὸ $\overline{7}^{ον}$ τοῦ 12, καὶ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἐξαγόμενον ἐπὶ 9, εἶναι τὸ αὐτὸ, ὡς νὰ πολλαπλασιωμεν 12 ἐπὶ $\frac{9}{7}$. Οὕτως δυνάμεθα προσέτι νὰ εἴπωμεν, ὅτι διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἕνα ἀκέραιον ἀριθμὸν δι' ἑνὸς κλάσματος, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀκέραιον ἀριθμὸν ἐπὶ τὸ κλάσμα, διαιρέτην ἀντεστραμμένον.

$\overline{\gamma}^{ον}$. Νὰ διαιρέσωμεν κλάσμα δι' ἄλλου κλάσματος.

Ἔστω νὰ διαιρεθῇ $\frac{3}{5}$ διὰ $\frac{8}{11}$.

Ὁ συλλογισμὸς εἶναι ὅμοιος μὲ τὸν ἀνωτέρω. Ὁ διαιρέτης $\frac{8}{11}$ μὲ τὸ νὰ εἶναι ἴσος μὲ 8 φοραῖς τὸ $\overline{11}^{ον}$ τῆς μονάδος, ὁ διαιρέτης $\frac{3}{5}$ πρέπει νὰ εἶναι ἴσος μὲ 8 φοραῖς τὸ $\overline{11}^{ον}$ τοῦ πηλίκου. Λοιπὸν τὸ $\overline{8}^{ον}$ τοῦ $\frac{3}{5}$, ἢ $\frac{3}{40}$ εἶναι τὸ $\overline{11}^{ον}$ τοῦ πηλίκου, καὶ 11 φοραῖς $\frac{3}{40}$, ἢ $\frac{33}{40}$ εἶναι τὸ ζητούμενον πηλίκον.

Λοιπὸν διὰ νὰ διαιρέσωμεν κλάσμα δι' ἄλλου κλάσματος, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ διαιρετέου κλάσματος διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ διαρέτου κλάσματος, μετὰ ταῦτα τὸν παρονοματσὴν τοῦ διαιρετέου κλάσματος διὰ τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ διαιρέτου κλάσματος, καὶ νὰ δώσωμεν τὸ δεύτερον γινόμενον διὰ παρονομαστὴν τοῦ πρώτου, ἢ πλέον ἁπλούστερα νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ διαιρετέον κλάσμα ἐπὶ τὸ διαιροῦν κλάσμα ἀντεστραμμένον.

Οὕτως $\frac{3}{4}$ νὰ διαρεθῇ διὰ $\frac{5}{7}$ ἄγεται εἰς $\frac{3}{4}$ νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ $\frac{7}{5}$, καὶ δίδει διὰ ἐξαγόμενον $\frac{21}{20}$ ἢ 1 καὶ $\frac{1}{20}$.

Παρομοίως $\frac{23}{30}$ διαιρούμενον διὰ $\frac{13}{15}$ ἄγεται εἰς $\frac{23}{30}$ νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ $\frac{15}{13}$, καὶ δίδει διὰ ἐξαγόμενον $\frac{345}{390}$, ἢ $\frac{23}{26}$, ἐπειδὴ τὸ 15 εἶναι κοινὸς παράγων τῶν δύο ὅρων.

Τέλος πάντων, ἐὰν εἴχαμεν ἀκέραιον ἑνωμένον μὲ κλάσμα νὰ διαιρεθῇ δι' ἄλλου ἀκεραίου ἑνωμένου μὲ ἄλλο κλάσμα, ἄγομεν τὰ ἀκέραια εἰς κλάσματα, καὶ ἐκτελοῦμεν, ὡς ἀνωτέρω εἴπομεν.

Ἔστω π. χ. 12 καὶ $\frac{3}{7}$ νὰ διαιρεθῇ διὰ 6 καὶ $\frac{2}{3}$.

Οὗτοι οἱ δύο ἀριθμοὶ ἄγονται εἰς $\frac{51}{4}$ καὶ $\frac{20}{3}$, εἰς τὰ ὁποῖα ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν, ὡς ἀνωτέρω, συνάγομεν πηλίκον $\frac{153}{80}$, ἢ 1 $\frac{73}{80}$. Παρομοίως 4 καὶ $\frac{7}{11}$ νὰ διαιρεθῇ διὰ 15 καὶ $\frac{5}{8}$, δίδει διὰ πηλίκον $\frac{408}{1375}$.

§. 60. Σ. Κ. Ὁσάκις εἰς τὴν διαίρεσιν ὁ διαιρέτης εἶναι ἓν κλάσμα, τὸ πηλίκον εἶναι μεγαλήτερον τοῦ διαιρετέου· ἐπειδὴ αὐτὸ τὸ πηλίκον προκύπτει ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ διαιρέτου ἀντιστεφομένου, ὅστις οὕτως γίνεται ἕνας ἀριθμὸς μείζων τῆς μονάδος.

§. 61. Ἂς ἐφαρμόσωμεν τὴν μέθοδον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως τῶν κλασμάτων εἴς τινα ζητήματα.

1ον. Ἡ πήχη ἑνὸς ὑφάσματος ἔχει 47 φράγκα καὶ $\frac{2}{5}$, ζητεῖται ἡ τιμὴ τῶν 12 καὶ $\frac{7}{8}$ πηχῶν.

Ἐπειδὴ μία μόνη πῆχη ἔχει τιμὴν 47 φράγκα καὶ $\frac{2}{8}$, εἶναι φανερὸν, ὅτι 12 $\frac{7}{8}$ πῆχαι θέλουν ἔχει τιμὴν 12 φοραῖς 47 καὶ $\frac{2}{5}$ φράγκου, περιπλέον $\frac{7}{8}$ τῶν 47 καὶ $\frac{2}{5}$ τοῦ φράγκου, τουτέστι πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν 47 καὶ $\frac{2}{5}$ ἐπὶ 12 καὶ $\frac{7}{8}$, καὶ τὸ γινόμενον ἐκφράζει εἰς φράγκα τὴν ζητουμένην τιμήν.

Τώρα 47 καὶ $\frac{2}{5}$ πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ 12 $\frac{7}{8}$ τρέπεται εἰς $\frac{237}{5}$ πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ $\frac{103}{8}$, καὶ δίδει διὰ γινόμενον $\frac{24411}{40}$, ἢ ἐξαγομένων τῶν ἀκεραίων μονάδων 610 $\frac{11}{40}$· οὕτως ἡ ζητουμένη τιμὴ εἶναι 610 φρ. καὶ $\frac{11}{40}$. Διὰ νὰ κάμωμεν τὴν βάσανον, διαιροῦμεν 610 $\frac{11}{40}$ διὰ 12 καὶ $\frac{7}{8}$, καὶ πρέπει νὰ εὕρωμεν 47 καὶ $\frac{2}{5}$· ἀλλ' εἶναι πλέον ἁπλούστερον (ἀριθμ. 40) νὰ διπλασιάσωμεν 47 καὶ $\frac{2}{5}$, καὶ νὰ πάρωμεν τὸ ἥμισυ τοῦ 12 καὶ $\frac{7}{8}$· τὸ διπλοῦν τοῦ 47 $\frac{2}{5}$ εἶναι 94 $\frac{4}{5}$, τὸ ἥμισυ τοῦ 12 καὶ $\frac{7}{8}$ εἶναι 6 καὶ $\frac{7}{16}$. Τώρα 97 $\frac{4}{5}$

πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ $6\frac{7}{16}$, ἄγεται εἰς $\frac{474}{5}$ πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ $\frac{103}{16}$, καὶ δίδει γινόμενον $\frac{48822}{80}$, ἢ ἐκτελεσθείσης τῆς διαιρέσεως $610\frac{22}{80}$, ἢ ἁπλούστερα $610\frac{11}{40}$.

2ον. Εἷς ἠγόρασε 23 πῆχες καὶ $\frac{5}{12}$ ἑνὸς εἴδους ὑφάσματος μὲ χρηματικήν τινα ποσότητα ἀπὸ 745 φράγκα καὶ $\frac{13}{20}$. Ζητεῖται πόσον ἔπρεπε νὰ πληρώσῃ διὰ κάθε πῆχην τοῦ τοιούτου ὑφάσματος.

Ἀφ' οὗ γενῇ ἡ τιμὴ τῆς πήχης γνωστὴ, πολλαπλασιάζομεν αὐτὴν ἐπὶ $23\frac{5}{12}$, καὶ πρέπει νὰ εὕρωμεν 745 φρ. $\frac{13}{20}$: Λοιπὸν διὰ νὰ λάβωμεν τὴν ζητουμένην τιμὴν, πρέπει νὰ διαιρέσωμεν 745 καὶ $\frac{13}{20}$ διὰ 23 καί $\frac{5}{12}$.

Τώρα 745 καὶ $\frac{13}{20}$ διαιρουμένων διὰ 23 καὶ $\frac{5}{12}$ προκύπτει $\frac{14913}{20}$ διαιρεθὲν διὰ $\frac{281}{12}$, καὶ ἐξάγεται $\frac{12\text{ φορ. }14913}{20\text{ φορ. }281}$ ἢ $\frac{178956}{5620}$, καὶ ἐξαχθεισῶν τῶν ἀκεραίων μονάδων λαμβάνομεν· $31\frac{4736}{5620}$.

Λοιπὸν ἡ τιμὴ τῆς πήχης εἶναι 31 φράγκα πλέον $\frac{4736}{5620}$ τοῦ φράγκου.

Διὰ τὴν βεβαίωσιν ἀρκεῖ νὰ διπλασιάσωμεν τοὺς δύο ὅρους τῆς διαιρέσεως, καὶ τὸ πηλίκον (ἀριθμ. 40) δὲν πρέπει νὰ ἀλλάξῃ.

Τὸ διπλοῦν τοῦ 743 $\frac{13}{20}$ εἶναι 1491 $\frac{13}{10}$· τὸ διπλοῦν τοῦ 23 καὶ $\frac{5}{12}$ εἶναι 46 καὶ $\frac{5}{6}$.

Διαιροῦντες 1491 καὶ $\frac{3}{10}$, ἢ $\frac{14913}{10}$ διὰ 46 $\frac{5}{6}$ ἢ $\frac{281}{6}$, συνάγομεν διὰ πηλίκον $\frac{89478}{2810}$, ἢ ἐξάγοντες τὰς ἀκεραίας μονάδας, 31 καὶ $\frac{2368}{2810}$. Τὸ τελευταῖον τοῦτο κλάσμα ἐμβαίνει εἰς τὸ κλάσμα $\frac{4736}{5620}$, ὅταν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δύο του ὅρους ἐπὶ 2, ἢ ἐξαλείψωμεν τὸν κοινὸν παράγοντα ἐκ τῶν δύο ὅρων τοῦ $\frac{4736}{5620}$.

Κλάσματα Κλασμάτων.

§. 62. Εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν κλασμάτων προσκολλᾶται ἓν ἄλλο εἶδος ἐργασίας, ἥτις καλεῖται κανὼν κλασμάτων τῶν κλασμάτων.

Διὰ νὰ δώσωμεν καθαράν τινα ἰδέαν ταύτης τῆς ἐργασίας, ἂς ὑποθέσωμεν κατὰ πρῶτον, ὅτι ἀπὸ τὸ κλάσμα

$\frac{5}{7}$ ἔχομεν νὰ λάβωμεν ἓν μέρος, τὸ ὁποῖον νὰ ἐκφράζηται διὰ $\frac{2}{3}$, ἢ μὲ ἄλλας λέξεις ζητοῦμεν τὰ $\frac{2}{3}$ τῶν $\frac{5}{7}$.

Ἐπειδὴ διὰ νὰ ἐκτελέσωμεν ταύτην τὴν πρᾶξιν πρέπει νὰ λάβωμεν δύο φοραῖς τὸ τριτημόριον τῶν $\frac{5}{7}$. Τοῦτο ἀπαιτεῖ (ἀριθμ. 57) νὰ πολλαπλασιάσωμεν $\frac{5}{7}$ ἐπὶ $\frac{2}{3}$, τὸ ὁποῖον ἐκτελεῖται (ἀριθμ. 56) πολλαπλασιαζομένου ἀριθμητοῦ ἐπὶ ἀριθμητὴν, καὶ παρονομαστοῦ ἐπὶ παρονομαστὴν, καὶ συνάγομεν $\frac{10}{21}$ διὰ $\frac{2}{3}$ τῶν $\frac{5}{7}$.

Τώρα ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{10}{21}$ θέλομεν νὰ λάβωμεν ἓν μέρος ἐκφραζόμενον διὰ $\frac{8}{13}$. Εἰς ταύτην τὴν περίστασιν ἔχομεν σκοπὸν πραγματικῶς νὰ λάβωμεν τὰ $\frac{8}{13}$ τῶν $\frac{2}{3}$ τῶν $\frac{5}{7}$.

Τώρα διὰ νὰ εὕρωμεν τὰ $\frac{8}{13}$ τῶν $\frac{10}{21}$ πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν $\frac{10}{21}$ ἐπὶ $\frac{8}{13}$, τὸ ὁποῖον ἐκτελοῦμεν πολλαπλασιάζοντες ἀναμεταξύ των τοὺς δύο ἀριθμητὰς καὶ τοὺς δύο παρονομαστάς· καὶ οὕτω συνάγομεν $\frac{80}{273}$ διὰ τὰ $\frac{10}{13}$ τῶν $\frac{2}{3}$ τῶν $\frac{5}{7}$.

Δυνάμεθα προσέτι, ἐὰν θέλωμεν νὰ λάβωμεν τὰ $\frac{3}{11}$ τῶν $\frac{80}{273}$, τουτέστι νὰ πολλαπλασιάσωμεν $\frac{80}{273}$ ἐπὶ $\frac{3}{11}$, καὶ τὸ νέον ἐξαγόμενον $\frac{240}{3003}$ ἐκφράζει τὰ $\frac{3}{11}$ τῶν $\frac{8}{13}$ τῶν $\frac{2}{3}$ τῶν $\frac{5}{7}$.

Ἂς ληφθοῦν διὰ δεύτερον παράδειγμα τὰ $\frac{2}{3}$ τῶν $\frac{3}{4}$ τῶν $\frac{5}{8}$ τῶν $\frac{6}{7}$ τοῦ 12.

Κατὰ πρῶτον νὰ λάβωμεν τὰ $\frac{6}{7}$ τοῦ 12 ἄλλο δὲν εἶναι, παρὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν 12 διὰ $\frac{6}{7}$· ὅθεν μᾶς προκύπτει $\frac{72}{7}$.

Μετὰ ταῦτα νὰ λάβωμεν τὰ $\frac{5}{8}$ τῶν $\frac{6}{7}$ τοῦ 12 ἦτον τὸ αὐτὸ ὡς νὰ λάβωμεν τὰ $\frac{5}{8}$ τῶν $\frac{72}{7}$ ἢ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ $\frac{72}{2}$ ἐπὶ $\frac{5}{8}$, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖ $\frac{360}{56}$.

Διὰ νὰ λάβωμεν δὲ τὰ $\frac{3}{4}$ τῶν $\frac{5}{8}$ τῶν $\frac{6}{7}$ τοῦ

12 πρέπει νὰ λάβωμεν τὰ $\frac{3}{4}$ τῶν $\frac{360}{56}$ ἢ νὰ πολλαπλασιάσωμεν $\frac{360}{56}$ ἐπὶ $\frac{3}{4}$, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖ $\frac{1080}{224}$.

Τέλος πάντων διὰ νὰ λάβωμεν τὰ $\frac{2}{3}$ τῶν $\frac{3}{4}$ τῶν $\frac{5}{8}$ τῶν $\frac{6}{7}$ τοῦ 12, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν $\frac{1080}{224}$ ἐπὶ $\frac{2}{3}$, καὶ συνάγομεν $\frac{2160}{672}$.

Καὶ ἐξάγοντες τὰς ἀκεραίας μονάδας, τὰς περιεχομένας εἰς αὐτὸ τὸ ἐξαγόμενον, εὑρίσκομεν 3 καὶ $\frac{144}{672}$, ἢ ἀνάγοντες τὸ κλάσμα, 3 καὶ $\frac{3}{14}$.

Παρατηροῦντες ὀλίγον τι τὴν ὁδὸν, τὴν ὁποίαν ἐξηκολουθήσαμεν, βλέπομεν, ὅτι διὰ νὰ λάβωμεν κλάσματα κλασμάτων, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ἀριθμητὰς ἀναμεταξύ των, καὶ νὰ πράξωμεν τὸ αὐτὸ εἰς τοὺς παρονομαστὰς, καὶ νὰ δώσωμεν τὸ δεύτερον γινόμενον διὰ παρονομαστὴν τοῦ πρώτου. Ἐὰν ἔχωμεν νὰ λάβωμεν κλάσματα κλασμάτων ἑνὸς ἀκεραίου ἀριθμοῦ, ὡς εἰς τὸ δεύτερον παράδειγμα, πρέπει νὰ θέσωμεν τὸν τοιοῦτον ἀκέραιον ἀριθμὸν ὑπὸ τὴν μορφὴν κλάσματος, δίδοντές του 1 διὰ παρονομαστὴν, καὶ ἐφαρμόζοντες τὸν κανόνα, τὸν ὁποῖον ἀνωτέρω ἐξηγήσαμεν.

Πρόβλημα. Ἠρώτησαν ἕνα γυμνασμένον ἀριθμητικὸν, ὁποία ὥρα εἶναι, καὶ αὐτὸς ἀπεκρίθη, εἶναι τὰ $\frac{3}{4}$ τῶν $\frac{5}{6}$ τῶν $\frac{7}{12}$ τῶν $\frac{6}{7}$ τῶν 24 ὡρῶν; ὁποία ἦτον ἐκείνη ἡ ὥρα;

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ τοιοῦτον ζήτημα, γράφομεν ἐπὶ μιᾶς πρώτης ὁριζοντίου γραμμῆς ὅλους τοὺς ἀριθμητὰς καὶ τὸν ἀκέραιον ὁμοίως, καὶ ἐπὶ μιᾶς δευτέρας ὅλους τοὺς παρονομαστάς· 3, 5, 7, 6, 24

4, 6, 12, 7, 1.

Τούτου τεθέντος, σχηματίζομεν τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν τῆς πρώτης γραμμῆς, καὶ ἐκεῖνο τῶν ἀριθμῶν τῆς δευτέρας, μετὰ ταῦτα διαιροῦμεν τὸ πρῶτον γινόμενον διὰ τοῦ δευτέρου, καὶ οὕτω συνάγομεν $\frac{15120}{2016}$ διὰ ἐξαγόμενον, καὶ ἐξάγοντες τὰς ἀκεραίας μονάδας, εὑρίσκομεν 7 καὶ $\frac{1008}{2016}$, ἢ ἀνάγοντες, $7\frac{1}{2}$· λοιπὸν ἦτον 7 ὧραι καὶ $\frac{1}{2}$.

Ἐμποροῦμεν πολλάκις νὰ καθιστάνωμεν ἁπλουστέραν τὴν πρᾶξιν, παρατηροῦντες, ὅτι ὁ παράγων 7 εὑρίσκεται κοινὸς παράγων εἰς τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμητῶν καὶ τῶν παρονομαστῶν, ὅθεν δυνάμεθα νὰ ἐξαλείψωμεν αὐτὸν πρὸ τοῦ νὰ ἐκτελέσωμεν τὸν πολλαπλασιασμόν. Τὸ αὐτὸ ἀκολουθεῖ διὰ τὸν παράγοντα 6. οὕτω καὶ ὁ παράγων 12, ὅς τις εὑρίσκεται εἰς τὸν ἀριθμὸν τῶν παρονομαστῶν, εὑρίσκεται παρομοίως εἰς τὸ 24. Δυνάμεθα προσέτι νὰ ἐξαλείψωμεν τὸν παράγοντα 2, ὅς τις ἐπειδὴ εἶναι τὸ πηλίκον τοῦ 24 διὰ τοῦ 12, εὑρίσκεται εἰς τὸν παρονομαστὴν 4· καὶ τότε τρέπεται, ἐξαλειφομένων τῶν παραγόντων τούτων, εἰς $\frac{3 \text{ φοραῖς } 5}{2}$, ἢ $\frac{15}{2}$ ἢ $7\frac{1}{2}$, ὡς ἀνωτέρω εὑρήκαμεν.

Ἀλλὰ αἱ τοιαῦται ἁπλότητες τῶν πράξεων ἀπαιτοῦν μεγαλωτάτην γύμνασιν καὶ προσοχήν, ἐν ᾧ ἡ συσταθεῖσα μέθοδος εἶναι γενική, καὶ μᾶς ἄγει πάντοτε εἰς τὸν αὐτὸν σκοπόν.

Ἄλλαι ἐφαρμογαί. Τὰ $\frac{2}{3}$ τῶν $\frac{3}{4}$ ἑνὸς ἀριθμοῦ σχηματίζουσι $\frac{6}{12}$, ἢ τὸ ἥμισυ τούτου τοῦ ἀριθμοῦ. Παρομοίως τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ $\frac{1}{5}$ ἑνὸς ἀριθμοῦ εἶναι ἴσον μὲ $\frac{1}{15}$ τούτου τοῦ ἀριθμοῦ· τὸ $\frac{1}{2}$ τῶν $\frac{3}{4}$ εἶναι $\frac{3}{8}$ καὶ ἐφεξῆς.

§. 63. Παρατήρησις Γενικὴ ἐπὶ τῶν κλασμάτων. Ἕπεται προδήλως ἀπὸ τὴν φύσιν τῶν συσταθεισῶν ἰδιοτήτων διὰ τοῦ ὑπολογισμοῦ τῶν κλασμάτων, ὅτι αἱ τέσσαρες θεμελιώδεις ἐργασίαι, τὰς ὁποίας ἐκτελέσαμεν εἰς αὐτὰς, τουτέστιν ἡ Πρόσθεσις, ἡ Ἀφαίρεσις, ὁ Πολλαπλασιασμὸς καὶ ἡ Διαίρεσις ἀνάγονται πάντοτε, μὲ τὴν τελευταίαν ἀνάλυσιν, εἰς τὰς αὐτὰς πράξεις, τὰς ὁποίας ἐκτελέσαμεν ἐπὶ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν.

Καθὼς π. χ. ἡ πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις τῶν κλασμάτων ἄγεται διὰ τῆς ἀναγωγῆς τῶν κλασμάτων εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν, εἰς τὴν πρόσθεσιν καὶ ἀφαίρεσιν τῶν ἀριθμητῶν των.

Παρομοίως, ὁ πολλαπλασιασμὸς ἐκτελεῖται, πολλαπλασιαζομένων τῶν ἀριθμητῶν ἀναμεταξύ των, καὶ τῶν παρονομαστῶν ἀναμεταξύ των. Ἡ διαίρεσις ἄγεται εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν, ἀντιστρεφομένου τοῦ διαιροῦντος κλάσματος.

Συμπεραίνομεν ἐντεῦθεν, ὅτι αἱ συσταθεῖσαι ἀρχαὶ εἰς τὸν ἀριθμ. 25 καὶ 26. ἐπὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, ἐφαρμόζονται παρομοίως καὶ εἰς τὰ κλάσματα, τουτέστι

1ον Νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἓν κλάσμα ἐπὶ τὸ γινόμενον πολλῶν ἄλλων ἄγεται εἰς πολλαπλασιασμὸν τοῦ πρώτου κλάσματος ἐφ' ἕκαστον τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου διαδοχικῶς.

2ον Τὸ γινόμενον δύο ἢ περισσοτέρων κλασμάτων εἶναι πάντοτε τὸ αὐτὸ, καθ' ὁποίαν τάξιν ἐκτελέσωμεν τὸν πολλαπλασιασμόν.

Τέλος πάντων δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν ἐπὶ τῶν κλασμάτων ὅλας τὰς συσταθείσας ἀρχὰς εἰς τὸν ἀριθμὸν 40, ἐπὶ τῶν τροπῶν, τὰς ὁποίας δέχεται τὸ γινόμενον ἑνὸς πολλαπλασιασμοῦ, ἢ τὸ πηλίκον μιᾶς διαιρέσεως, ὅταν κάμωμεν μερικὰς μεταβολὰς εἰς ἕνα τῶν ὅρων τῆς ἐργασίας, τὴν ὁποίαν ἔχομεν σκοπὸν νὰ ἐκτελέσωμεν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

Περὶ Συμμιγῶν ἀριθμῶν.

§. 64. Τοῦτο τὸ κεφάλαιον καὶ τὸ ἀκόλουθον εἰς κάποιον τρόπον ἄλλο τι δὲν εἶναι, παρὰ ἔκτασις τοῦ δευτέρου· ἐπειδὴ ἄλλο δὲν περιέχουν, παρὰ ἐφαρμογὰς τῆς γενικῆς θεωρίας τῶν κλασμάτων, εἰς ζητήματα, εἰς τὰ ὁποῖα θεωροῦμεν κλάσματα ἑνὸς μερικοῦ εἴδους.

Ἡ θεωρία τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν, ἥτις κάμνει τὸ ὑποκείμενον τούτου τοῦ κεφαλαίου (πρέπει νὰ τὸ ὁμολογή-