ΚΕΦ. Κ'.

Γεωμετρικῶν τινῶν προβλημάτων ἐπίλυσις.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'.

§. 208. Τὴν δοθεῖσαν πεπερασμένην εὐθεῖαν ΑΒ (*) ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμεῖν.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα $AB = \alpha$, τὸ δὲ τῆς τομῆς σημεῖον, τὸ Γ, ἡ δὲ $A\Gamma = \chi$. καὶ ἔσαι δὴ ἡ $B\Gamma = \alpha - \chi$.

Οὐκοῦν ὡς $\alpha : \chi :: \chi : \alpha - \chi$. διὸ τὸ $\chi^2 = \alpha^2 - \alpha\chi$. κοινοῦ δὲ προστεθέντος τοῦ $\alpha\chi$, ἔσεται τὸ $\chi^2 + \alpha\chi = \alpha^2$, καὶ τοῦ τετραγώνου πληρωθέντος, τὸ $\chi^2 + \alpha\chi + \frac{1}{4}\alpha^2 = \frac{1}{4}\alpha^2 + \alpha^2$, καὶ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἐξαχθείσης, τὸ $\chi + \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{5}{4}\alpha^2}$. διὸ τὸ $\chi = \sqrt{\frac{5}{4}\alpha^2} - \frac{1}{2}\alpha$.

Ἤχθω ἐν ἀπὸ τοῦ Α πρὸς ὀρθὰς τῇ ΑΒ ἡ $A\Delta = \frac{1}{2}\alpha$. καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς ΒΔ, εἰλήφθω τῇ μὲν $A\Delta = BE$, τῇ δὲ $\Delta E = A\Gamma$. λέγω, ὅτι ἡ $A\Gamma = \chi$.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ μὲν $AB = \alpha$, ἡ δὲ $A\Delta = \frac{1}{2}\alpha$, ἔσεται ἡ $B\Delta = \sqrt{\alpha^2 + \frac{1}{4}\alpha^2} = \sqrt{\frac{5}{4}\alpha^2}$. ἀλλ' ἡ $BE = \frac{1}{2}\alpha$, ἡ ἄρα $\Delta E = \sqrt{\frac{5}{4}\alpha^2} - \frac{1}{2}\alpha = \chi$. ἀλλὰ τῇ ΔΕ ἴση ἡ ΑΓ. ἡ ἄρα $A\Gamma = \chi$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'.

§. 209. Δοθείσης τῆς περιμέτρου καὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ΑΒΓ ὀρθογωνίου τριγώνου, εὑρεῖν τὴν ὑποτείνουσαν τὴν ὀρθὴν γωνίαν ΑΓ. σχ. 5.

Ἔσω

(*) Πιν. XIX. σχ. 4.

Ἔςω ἡ μὲν περίμετρος, ἤτουν ἡ $ΑΒ+ΒΓ+ΓΑ=α$, ἡ δὲ ἐπιφάνεια $=β^2$, ἡ δὲ ζητουμένη $ΑΓ=χ$. ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ Β πρὸς ὀρθὰς τῇ ΑΓ ἀχθεῖσα $ΒΔ=y$.

Οὐκοῦν ἔσεται ἡ $ΑΒ+ΒΓ=α-ΓΑ$, ἤτοι ἡ $ΑΒ+ΒΓ=α-χ$. καὶ τοῦ τετραγώνου ἑκατέρωθεν ληφθέντος, ἔσεται τὸ $ΑΒ^2+2ΑΒ.ΒΓ+ΒΓ^2=α^2-2αχ+χ^2$, καὶ τοῦ $2ΑΒ.ΒΓ$ ἑκατέρωθεν ἀφαιρεθέντος, ἔσεται τὸ $ΑΒ^2+ΒΓ^2=α^2-2αχ+χ^2-2ΑΒ.ΒΓ$. ἐπεὶ δὲ τὸ $ΑΓ^2=ΑΒ^2+ΒΓ^2$, ἤτοι τὸ $χ^2=ΑΒ^2+ΒΓ^2$, ἔσεται ἄρα τὸ $χ^2$ ἴσον τοῖς ἐν τῷ (υ) Α. καὶ ἐπεὶ τὸ $\frac{1}{2}ΑΒ.ΒΓ$ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἐμφαίνει, ἔςιν ἄρα τὸ $β^2$ ἴσον τοῖς ἐν τῷ Β. διὸ τὸ $4β^2$ ἴσον τοῖς ἐν τῷ Γ. ἐὰν οὖν ἐν τῇ κατὰ τὸ Α ἐξισώσει, ἀντὶ τοῦ $2ΑΒ.ΒΓ$ τεθῇ τὸ $4β^2$, προκύψει ἡ κατὰ τὸ Δ ἐξίσωσις, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ Ε γίνεται, ἐξ αὐτῆς δὲ ἡ κατὰ τὸ Ζ, ἐξ ἧς γνωςὸν τὸ χ ἀριθμητικῶς.

Ἐπεὶ δὲ καὶ τὸ $\frac{1}{2}ΒΔ.ΑΓ$ τὴν τοῦ τριγώνου ἐπιφάνειαν ἐμφαίνει, ἔσεται ἄρα τὸ $β^2$ ἴσον τοῖς ἐν τῷ Η. διὸ τὸ y ἴσον τοῖς κατὰ τὸ Θ.

Ἐκκείσθω οὖν εὐθεῖα ἡ $ΒΔ=α$, (φ) καὶ ἀπὸ τοῦ Β ἤχθω πρὸς ὀρθὰς αὐτῇ ἡ $ΒΛ=2β$. καὶ δίχα τμηθείσης τῆς ΒΛ κατὰ τὸ Ε, καὶ ληφθείσης τῆς $ΒΖ=ΒΕ=β$, εὑρεθήτω τετάρτη ἀνάλογον τῶν ΒΔ, ΒΛ, ΒΖ, ἡ ΒΗ. ἥτις δὴ ἴση ἔσεται τῷ $\frac{2β^2}{α}$. τετμήσθω δὲ δίχα ἡ ΒΔ κατὰ τὸ Γ, καὶ εἰλήφθω ἡ $ΓΙ=ΒΗ=\frac{2β^2}{α}$. καὶ ἔςαι δὴ ἡ $ΒΙ=\frac{1}{2}α-\frac{2β^2}{α}=χ$. δίχα οὖν τμηθείσης τῆς ΒΙ κατὰ τὸ Ο, ἔσεται ἡ $ΒΟ=\frac{1}{2}χ$. ἐὰν

οὖν

(υ) Πίν. XXIV. (φ) Πίν. XIX. σχ. 6.

οὖν τῶν ΒΟ, ΒΖ, τρίτη ἀνάλογον εὑρεθῇ, ἔστω τρίτη τῶν $\frac{1}{2}\chi$, καὶ β, ἡ ΒΚ, ἔσεται ἡ ΒΚ $= \frac{2\beta^2}{\chi} = y$. ὅπερ ἐστὶ τὸ τοῦ τριγώνου ὕψος. ἐὰν οὖν ἐπὶ τῆς ΒΙ ἡμικύκλιον ἀναγραφῇ τὸ ΒΛΙ, καὶ ἀπὸ τοῦ Κ τῇ ΒΔ ἀχθῇ παράλληλος ἡ ΚΛ, ἐπιζευχθῶσι δὲ αἱ ΒΛ, ΙΛ, ἔσεται τὸ ΒΛΙ τρίγωνον, τὸ ὕψος μὲν ἔχον τὴν ΒΚ $= y$, βάσιν δὲ τὴν ΒΙ $= \chi$, ἐπιφάνειαν δὲ ἴσην τῷ β^2.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'.

§. 210. Δοθείσης τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, (χ. 7.) οὗτινος ἡ ἑτέρα τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν μέση ἀνάλογόν ἐστι τῆς τὴν ὀρθὴν ὑποτεινούσης καὶ τῆς λοιπῆς πλευρᾶς, εὑρεῖν ἑκάστην τῶν πλευρῶν.

Ἔστω ἡ μὲν ἐπιφάνεια $= \alpha^2$, ἡ δὲ ΑΒ $= y$, ἡ δὲ ΒΓ $= \chi$. ὡς δὲ ΑΓ : ΑΒ :: ΑΒ : ΒΓ.

Οὐκοῦν ἔσται ὡς $\chi : y :: y :$ ΑΓ. διὸ ἡ ΑΓ $= \frac{y^2}{\chi}$. ἐπεὶ δὲ τὸ $\overline{\mathrm{A\Gamma}}^2 = \overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{B\Gamma}}^2$, ἔσεται τὸ $\frac{y^4}{\chi^2}$ ἴσον τοῖς ἐν τῷ Ι, (χ) ἤτουν τοῖς ἐν τῷ Κ. ἔστι δὲ καὶ τὸ $\frac{1}{2}y\chi = \alpha^2$, τὸ ἄρα $y\chi$ ἴσον τῆς ἐν τῷ Λ. ἐκ τῆς κατὰ τὸ Λ δὲ ἐξισώσεως, τοῦ τετραγώνου ἑκατέρωθεν ληφθέντος, ἡ κατὰ τὸ Μ γίνεται, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ Ν, πάλιν τοῦ τετραγώνου ἑκατέρωθεν ληφθέντος. ἐὰν οὖν ἀντὶ τοῦ $y^2\chi^2$, καὶ τοῦ χ^4 τὰ ἴσα αὐτοῖς τεθῇ ἐν τῇ κα-

(χ) Πίν. XXIV.

κατὰ τὸ Κ ἐξισώσει, ἡ κατὰ τὸ Ξ προκύψει, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ Ο γίνεται, ϗ τῶ τετραγώνυ πληρωθέντος, ἡ κατὰ τὸ Π, ϗ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἐξαχθείσης, ἡ κατὰ τὸ Ρ, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ Σ, ϗ τῆς ῥίζης τῆς τετάρτης δυνάμεως ἐξαχθείσης, ἡ κατὰ τὸ Τ. τεθέντων δὲ ἐν τῇ κατὰ τὸ Κ ἐξισώσει, ἀντὶ τῶ y^4 ϗ τῶ $y^2 \chi^2$ τῶν ἴσων αὐτοῖς τῶν ἐν τοῖς Σ ϗ Μ, ἡ κατὰ τὸ Υ ἐξίσωσεις γίνεται, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ Φ, ϗ ἐξ αὐτῆς ἡ κατὰ τὸ Χ.

Ἐκκείσθω ἓν εὐθεῖα ἡ ΑΓ = 2α. (ψ) ϗ ἀπὸ τῶ Α ἤχθω πρὸς ὀρθὰς τῇ ΑΓ ἡ ΑΒ = α. ϗ ἐπιζευχθείσης τῆς ΓΒ, εἰλήφθω ἡ ΒΔ = ΒΑ = α, ϗ ἐκβληθείσης τῆς ΑΓ κατὰ τὸ συνεχές, εἰλήφθω ἡ ΓΕ = ΓΔ. ϗ ἡμικυκλίυ τῶ ΑΝΕ ἀναγραφέντος ἐπὶ τῆς ΑΕ, ἤχθω ἀπὸ τῶ Γ ἡ ΓΝ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΑΕ. ϗ ληφθείσης τῆς μὲν ΓΖ = ΓΝ, τῆς δὲ ΓΗ = ΑΒ = α, ἀναγεγράφθω ἐπὶ τῆς ΗΖ ἡμικύκλιον τὸ ΗΙΖ. ϗ ληφθείσης τῆς ΓΚ = ΓΗ + ΓΒ, ἀναγεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΚ ἡμικύκλιον τὸ ΑΛΚ. ϗ ἐκβληθείσης τῆς ΝΓ ἐπὶ τὸ Λ, εἰλήφθω ἡ ΓΟ = ΓΛ, ϗ ἀναγεγράφθω ἐπὶ τῆς ΗΟ ἡμικύκλιον τὸ ΗΜΟ. ϗ ληφθείσης τῆς ΓΦ = ΓΙ, ἐπεζεύχθω ἡ ΦΜ. λέγω δὴ, ὅτι τὸ ΜΓΦ τρίγωνον ἐστὶ τὸ ζητύμενον· ἐν ᾧ ἡ μὲν ΓΜ = y, ἡ δὲ ΓΦ = χ.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΓΒ = $\sqrt{4\alpha^2 + \alpha^2} = \alpha\sqrt{5}$, ἡ δὲ ΒΔ = α, ἡ ἄρα ΓΔ = $\alpha\sqrt{5} - \alpha$. ἀλλὰ τῇ ΓΔ = ΓΕ, ἄρα ϗ ἡ ΓΕ = $\alpha\sqrt{5} - \alpha$. ἐπεὶ δὲ ὡς ΑΓ : ΓΝ :: ΓΝ : ΓΕ, ἤτοι ὡς 2α : ΓΝ :: ΓΝ : $\alpha\sqrt{5} - \alpha$, ἡ ἄρα ΓΝ = $\alpha\sqrt{2\sqrt{5} - 2}$ = ΓΖ. ἀλλ᾽ ὡς ΗΓ : ΓΙ :: ΓΙ : ΓΖ, ἤτοι ὡς α : ΓΙ :: ΓΙ : $\alpha\sqrt{2\sqrt{5} - 2}$, ἡ ἄρα ΓΙ = $\alpha\sqrt[4]{2\sqrt{5} - 2} = \chi$. (ὅρα τὸν XXIV πίν.) ἀλλ᾽ ἡ

(ψ) Πίν. XIX. σχ. 8.

ΓΙ

ΓΙ = ΙΦ. ἄρα καὶ ἡ ΓΦ = χ. ἐπεὶ δὲ ἡ ΓΚ = ΓΗ + ΓΒ = $\alpha + \alpha\sqrt{5}$. ἔτι δὲ ὡς ΛΙ : ΓΛ :: ΙΛ : ΓΚ, ἤτοι ὡς 2α : ΓΛ :: ΓΛ : $\alpha + \alpha\sqrt{5}$, ἡ ἄρα ΓΛ = $\alpha\sqrt{\ldots + 2\sqrt{5}}$ ἴση ΓΟ. ἔτι δὲ καὶ ὡς ΙΗ : ΓΜ :: ΓΜ : ΓΟ, ἤτοι ὡς αι ΓΜ :: ΓΜ : $\alpha\sqrt{2 + 2\sqrt{5}}$. ἡ ἄρα ΓΜ = $\alpha\sqrt[4]{2 + 2\sqrt{5}}$ = χ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'.

§. 211. Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΑΒ (α) τεμεῖν, ὥστε τὰ ἑαυτῆς τμήματα ἀντιπεπονθότα λόγον ἔχειν ταῖς δοθείσαις εὐθείαις ΑΕ, ΗΖ.

Ἔστω ἡ μὲν ΑΒ = α, ἡ δὲ ΑΕ = β, ἡ δὲ ΗΖ = γ. καὶ κείσθω τὴν ΑΒ κατὰ τὸ ἐπιταχθὲν τμηθῆναι κατὰ τὸ Ι. καὶ ἔστω ἡ ΒΙ = χ. οὐκοῦν ἡ ΑΙ = α − χ.

Ἔστιν ἄρα ὡς ΑΓ : ΑΕ :: ΗΖ : ΒΙ, ἤτοι ὡς α − χ : β :: γ : χ. ἐκ τῆς ἀναλογίας δὲ ταύτης ἡ κατὰ τὸ Ψ (α) ἐξίσωσις γίνεται ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ Ω, καὶ τοῦ τετραγώνου πληρωθέντος, ἡ κατὰ τὸ α, καὶ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἐξαχθείσης, ἡ κατὰ τὸ β, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ γ.

Ἐκκείσθω οὖν εὐθεῖα ἡ ΗΚ, (β) καὶ εἰλήφθω ἡ μὲν ΗΙ = β, ἡ δὲ ΙΚ = γ. καὶ ἀναγραφέντος τοῦ ΗΜΚ ἡμικυκλίου, ἤχθω ἡ ΙΜ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΙΚ. καὶ ληφθείσης τῆς ΙΛ = $\frac{1}{2}\alpha$, κέντρῳ μὲν τῷ Λ, διαστήματι δὲ τῷ ΛΙ, τόξον κύκλου γεγράφθω τὸ ΙΝΠ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Μ ἡ ΜΠ τῇ ΗΛ παράλληλος, λέγω, ὅτι ἡ ΝΠ = χ.

Ἤχθω

(α) Πίν. XIX. χ. 9. (α) Πίν. XXIV. (β) Πίν. XXV. χ. 1.

Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τῆ Λ ἡ ΛΟ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΝΠ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΛΝ. καὶ ἐπεὶ ὡς ΠΙ : ΙΜ :: ΙΜ : ΙΚ, ἤτοι ὡς β : ΙΜ :: ΙΜ : γ, ἔσται ἡ ΙΜ $=$ ΛΟ $= \sqrt{\beta\gamma}$. ἐπεὶ δὲ τὸ ΝΛ$^2 =$ ΝΟ$^2 +$ ΛΟ^2, ἤτοι $\frac{1}{4}\alpha^2 =$ ΝΟ$^2 + \beta\gamma$, ἔσται ἡ ΝΟ $=$ ΟΠ $= \sqrt{\frac{1}{4}\alpha^2 - \beta\gamma}$, ἀλλ' ἡ ΜΟ $=$ ΙΛ $= \frac{1}{2}\alpha$, ἡ ἄρα ΝΠ $= \frac{1}{2}\alpha + \sqrt{\frac{1}{4}\alpha^2 - \beta\gamma} = \chi$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε'.

§. 219. Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΗΖ, (γ) τὰς ἀντιπεπονθότα λόγον ἐχούσας εὑρεῖν, ὧν ἡ διαφορὰ ἴση ἔσται δοθείσῃ τῇ ΑΓ.

Ἔστω ἡ μὲν ΑΒ $= \alpha$, ἡ δὲ ΗΖ $= \beta$, ἡ δὲ ΑΓ $= \gamma$. καὶ ἡ μὲν ἐλάσσων τῶν ἀντιπεπονθυιῶν $= \chi$, ἡ δὲ μείζων $= \gamma + \chi$.

Οὐκοῦν ἔσται ὡς $\chi : \alpha :: \beta : \gamma + \chi$. ἐκ τῆς ἀναλογίας δὲ ταύτης, ἡ κατὰ τὸ δ ἐξίσωσις γίνεται, (δ) καὶ πληρωθέντος τῆ τετραγώνου, ἡ κατὰ τὸ ε, καὶ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἐξαχθείσης, ἡ κατὰ τὸ ζ, ἐξ αὐτῆς δὲ ἡ κατὰ τὸ η.

Ἐκκείσθω ἓν εὐθεῖα ἡ ΑΒ, (ε) καὶ εἰλήφθω ἡ μὲν ΑΓ $= \beta$, ἡ δὲ ΓΒ $= \alpha$, καὶ ἀναγραφέντος ἐπὶ τῆς ΑΒ τῆ ΑΔΒ ἡμικυκλίου, ἤχθω ἀπὸ τῆ Γ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΑΒ ἡ ΓΔ, καὶ ληφθείσης τῆς ΓΕ $= \frac{1}{2}\gamma$, ἐπεζεύχθω ἡ ΕΔ, καὶ εἰλήφθω ἡ ΕΗ $=$ ΕΓ $- \frac{1}{2}\gamma$. λέγω ὅτι ἡ ΔΗ $= \chi$.

Ἐπεὶ γὰρ ὡς ΑΓ : ΓΔ :: ΓΔ : ΓΒ, ἤτοι ὡς β : ΓΔ :: ΓΔ : α, ἔσται τὸ ΓΔ$^2 = \alpha\beta$. ἀλλὰ ΔΕ$^2 =$

(γ) Πίν. XIX. χ. 9. (δ) Πίν. XXIV. (ε) Πίν. XXV. χ. 8.

$\overline{\Delta\Gamma}^2 + \overline{\Gamma E}^2$. τὸ ἄρα $\overline{\Delta E}^2 = \alpha\beta + \frac{1}{4}\gamma^2$. διὸ ἡ $\Delta E = \sqrt{\frac{1}{4}\gamma^2 + \alpha\beta}$. ἀλλ' ἡ $EH = E\Gamma = \frac{1}{2}\gamma$. ἡ ἄρα (ὅρα πίν. XXIV.) $\Delta H = \sqrt{\frac{1}{4}\gamma^2 + \alpha\beta} - \frac{1}{2}\gamma = \chi$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ϛ'.

§. 213. Δοθείσης πλευρᾶς ὀκταγώνȣ τῆς ΑΗ, (ζ) εὑρεῖν τὴν ἡμιδιάμετρον τȣ̃ περὶ αὐτὸ περιγραφθησομένȣ κύκλȣ.

Ἔςω ἡ $AH = \beta$, κύκλος δὲ ὁ περὶ αὐτὸ περιγεγραμμένος ὁ ΑΒΔ, ἔτινος ἡ ζητȣμένη ἡμιδιάμετρος $AK = y$. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν κύκλον πλευρὰ τετραγώνȣ ἡ ΑΒ, καὶ ἀπὸ τȣ̃ κέντρȣ Κ ἐπὶ τὰ Α, Η, Β σημεῖα ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΑ, ΚΗ, ΚΒ.

Οὐκȣ̃ν ἔσεται ἡ ΒΚΑ γωνία ὀρθὴ, ἑκατέρα δὲ τῶν ΗΚΑ, ΗΚΒ ἡμίσεια ὀρθῆς. διὸ δῆλον, ὅτι ϗ ἑκατέρα τῶν ΚΖΑ, ΚΖΒ ὀρθὴ, καὶ ἡ $AZ = ZB$, καὶ ἡ ΚΑΖ ἡμίσεια ὀρθῆς. ἄρα ϗ ἡ $ZK = ZA$. ἐπεὶ δὲ τὸ $\overline{AB}^2 = \overline{BK}^2 + \overline{AK}^2 = 2\overline{AK}^2 = 2y^2$, ἔσεται τὸ $\overline{AZ}^2 = \frac{2y^2}{4} = \frac{1}{2}y^2$. ἡ ἄρα $AZ = ZK = \sqrt{\frac{1}{2}y^2}$. διὸ ἡ $HZ = y - \sqrt{\frac{1}{2}y^2}$. ἐπεὶ δὲ $\overline{AH}^2 = \overline{AZ}^2 + \overline{HZ}^2$, ἐκ τȣ́τȣ ἄρα προκύπτει ἡ κατὰ τὸ θ ἐξίσωσις, (Πίν. XXIV.) ἡ αὐτὴ ȣ̓̂σα τῇ κατὰ τὸ ι, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ κ γίνεται. ϗ ληφθέντων ἑκατέρωθεν, τῶν τετραγώνων, ἡ κατὰ τὸ λ, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ μ, καὶ τȣ̃ τετραγώνȣ πληρωθέντος, ἡ κατὰ τὸ ν, καὶ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἐξαχθείσης ἡ κατὰ τὸ ξ, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ ο, καὶ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης πάλιν ἐξαχθείσης ἡ κατὰ τὸ π.

Ἐπὶ

(ζ) Πίν. XXV. σχ. 3.

Ἐπὶ τῆς τῦ ὀκταγώνυ ἒν πλευρᾶς ΑΗ, (Πίν. XXV. χ. 4.) ἀναγεγράφθω ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΗ, κ̀ ἀπὸ τῦ κέντρυ Κ ἤχθω πρὸς ὀρθὰς τῇ ΑΗ ἡ ΚΔ, κ̀ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΔ. καὶ ἐκβληθεισῶν τῶν ΑΗ, ΚΔ κατὰ τὸ συνεχὲς, εἰλήφθω ἡ $ΑΕ = 2ΑΗ + 2ΗΔ$, κ̀ ἀναγραφέντος ἐπὶ τῆς ΑΕ τῦ ΑΓΕ ἡμικυκλίυ, ἐπεζεύχθω ἡ ΑΓ. λέγω ὅτι ἡ $ΑΓ = y$.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ $ΑΗ = β$, ἡ ἄρα $ΚΗ = ΚΔ = \frac{1}{2}β$. ἡ ἄρα $ΗΔ = \sqrt{\frac{1}{4}β^2 + \frac{1}{4}β^2} = \sqrt{\frac{1}{2}β^2}$. ἡ ἄρα $ΑΕ = 2ΑΗ + 2ΗΔ = 2β + 2\sqrt{\frac{1}{2}β^2}$. ἐπεζευχθείσης δὲ τῆς ΓΕ, ἐςὶν ὡς ΑΕ : ΑΓ :: ΑΓ : ΑΚ, ἤτοι ὡς $2β + 2\sqrt{\frac{1}{2}β^2}$: ΑΓ :: ΑΓ : $\frac{1}{2}$ β. διὸ ἡ $ΑΓ = \sqrt{β^2 + β\sqrt{\frac{1}{2}β^2}} = y$. ὁ ἒν κέντρῳ τῷ Γ καὶ διαςήματι τῷ ΓΑ γραφέμενος κύκλος ἐςὶν ὁ ζητέμενος.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ζ'.

§. 214. Δοθείσης πλευρᾶς δεκαγώνυ τῆς ΑΒ, (σχ. 5.) εὑρεῖν τὴν ἡμιδιάμετρον τῦ περὶ αὐτὸ περιγραφθησομένυ κύκλυ.

Ἔςω ἡ μὲν $ΑΒ = α$, κύκλος δὲ ὁ περὶ τὸ δεκάγωνον περιγραφθησόμενος ὁ ΑΒΕ, ἔτινος ἡ ζητυμένη ἡμιδιάμετρος $ΑΚ = χ$. ἐκβληθείσης δὲ τῆς ΒΑ, κ̀ ληφθείσης τῆς $ΑΔ = ΑΚ$, ἐπεζεύχθω ἡ ΚΔ. κ̀ ἐπεὶ ἡ ΑΒ περιφέρεια δεκατημόριον τῆς ὅλης ἐςὶν, ἡ ἄρα ΑΚΒ γωνία ἴση μοίραις 36. ἐπεὶ δὲ ἡ $ΚΒΑ = ΚΑΒ$, ἑκατέρα ἄρα αὐτῶν ἴση μοίραις 72. ἡ ἄρα ΔΑΚ ἴση μοίραις 108. ἔςι δὲ ἡ ΛΚΔ = ΛΔΚ, ἑκατέρα ἄρα αὐτῶν ἴση μοίραις 36, ὅλη δὲ ἡ ΔΚΒ ἴση μοίραις 72. ὥστε τὰ ΔΚΒ, ΛΚΒ τρίγωνα ὅμοιά εἰσιν. ὡς ἄρα ΔΒ : ΒΚ :: ΛΚ : ΛΒ, ἤτοι ὡς $\alpha + \chi : \chi :: \chi : \alpha$. ἐκ τῆς ἀναλογίας δὲ ταύτης ἡ κατὰ τὸ ρ ἐξίσωσις γίνεται (η) ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ σ, καὶ τοῦ τετραγώνου πληρωθέντος, ἡ κατὰ τὸ τ, καὶ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἐξαχθείσης ἡ κατὰ τὸ υ, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ φ.

Ἀνασάτω οὖν ἀπὸ τοῦ Λ (θ) τῇ ΛΒ πλευρᾷ τοῦ δεκαγώνου πρὸς ὀρθὰς ἡ $\text{ΛΓ} = \frac{1}{2}\alpha$. καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς ΓΒ, εἰλήφθω ἀπὸ τῆς ΛΓ ἐκβληθείσης ἡ ΓΚ = ΓΒ. λέγω ὅτι ἡ $\text{ΚΛ} = \chi$.

Ἔςι γὰρ τὸ $\overline{\text{ΓΒ}}^2 = \overline{\text{ΑΒ}}^2 + \overline{\text{ΛΓ}}^2$, ἤτοι τὸ $\overline{\text{ΓΒ}}^2 = \alpha^2 + \frac{1}{4}\alpha^2 = \frac{5}{4}\alpha^2$. ἡ ἄρα $\text{ΓΒ} = \text{ΓΚ} = \sqrt{\frac{5}{4}\alpha^2}$. διὸ ἡ $\text{ΚΛ} = \frac{1}{2}\alpha + \sqrt{\frac{5}{4}\alpha^2} - \chi$. ὁ κέντρῳ ἄρα τῷ Κ, διαστήματι δὲ τῷ ΚΛ γραφόμενος κύκλος, ἔσαι ὁ ζητούμενος.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Η'.

§. 215. Δοθείσης τῆς ἡμιδιαμέτρου ΛΚ (σχ. 7.) τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ τῆς τοῦ εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένου δεκαγώνου πλευρᾶς ΑΗ, τὴν πλευρὰν εὑρεῖν τοῦ εἰς αὐτὸν ἐγγραφθησομένου πενταγώνου.

Ἔςω ἡ μὲν $\text{ΛΚ} = \alpha$, ἡ δὲ $\text{ΑΗ} = \beta$, ἡ δὲ ζητουμένη τοῦ πενταγώνου πλευρὰ $\text{ΑΒ} = \chi$. ἐπιζευχθεισῶν οὖν τῶν ΚΒ, ΚΗ, αἱ γωνίαι ΛΚΗ, ΗΚΒ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται διὰ τὸ δίχα τετμημένον εἶναι τὸ ΑΒ τόξον κατὰ τὸ Η. ἐξ οὗ δῆλον, ὅτι ἡ $\text{ΒΖ} = \text{ΑΖ} = \frac{1}{2}\chi$, καὶ

(η) Πίν. XXIV. (θ) Πίν. XXV. σχ. 6.

καὶ ἡ ΑΖΚ γωνία ὀρθή. διὸ τὸ $\overline{ΑΚ}^2 = \overline{ΑΖ}^2 + \overline{ΖΚ}^2$, ἤτοι τὸ $α^2 = \frac{1}{4}χ^2 + \overline{ΖΚ}^2$. τὸ ἄρα $\overline{ΖΚ}^2 = α^2 - \frac{1}{4}χ^2$. διὸ ἡ $ΖΚ = \sqrt{α^2 - \frac{1}{4}χ^2}$. ἡ ἄρα $ΗΖ = α - \sqrt{α^2 - \frac{1}{4}χ^2}$. ἐπεὶ δὲ $\overline{ΑΗ}^2 = \overline{ΗΖ}^2 + \overline{ΑΖ}^2$, ἐκ τούτου ἄρα ἡ κατὰ τὸ Α ἐξίσωσις γίνεται, (ι) ἡ αὐτὴ οὖσα τῇ κατὰ τὸ Β, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ Γ, καὶ τῶν τετραγώνων ἑκατέρωθεν ληφθέντων, ἡ κατὰ τὸ Δ, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐξ αὐτῆς ἡ κατὰ τὸ Ζ, καὶ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἐξαχθείσης ἡ κατὰ τὸ Η.

Ἐκκείσθω οὖν εὐθεῖα ἡ $ΓΗ = 2ΑΚ = 2α$, (κ) καὶ ἀναγραφέντος τοῦ ΓΑΗ ἡμικυκλίου ἐφηρμόσθω ἡ $ΑΗ = β$, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΑ, καὶ ληφθείσης τῆς $ΓΖ = β$, ἀπὸ μὲν τοῦ κέντρου Κ ἐπὶ τὸ Α ἐπεζεύχθω ἡ ΚΑ, ἀπὸ δὲ τοῦ Ζ ἤχθω τῇ ΚΑ παράλληλος ἡ ΖΒ. λέγω ὅτι ἡ ζητουμένη τοῦ πενταγώνου πλευρά ἐστιν ἡ $ΓΒ = χ$.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ $\overline{ΓΗ}^2 = \overline{ΑΗ}^2 + \overline{ΓΑ}^2$, ἔσεται τὸ $4α^2 = β^2 + \overline{ΓΑ}^2$. διὸ τὸ $4α^2 - β^2 = \overline{ΓΑ}^2$. ἡ ἄρα $ΓΑ = \sqrt{4α^2 - β^2}$. ἐπεὶ δὲ ὡς $ΓΚ : ΓΖ :: ΓΑ : ΓΒ$, ἤτοι ὡς $α : β : \sqrt{4α^2 - β^2} : ΓΒ$, ἔσεται ἄρα ἡ $ΓΒ = \frac{β}{α}\sqrt{4α^2 - \sqrt{β^2}} = χ$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Θ'.

§. 216. Δοθέντος τοῦ κεφαλαίου τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ (χ. 9.) περιεχουσῶν πλευρῶν, ΑΒ, ΒΓ, καὶ τοῦ ὕψους ΒΔ, εὑρεῖν ἑκάστην τῶν πλευρῶν.

Ἔστω τὸ μὲν $ΑΒ + ΒΓ = α$, τὸ δὲ $ΒΔ = β$, ἡ δὲ $ΑΓ = χ$. ἔστω δὲ καὶ $ΑΒ - ΒΓ = y$.

Ἐπεὶ οὖν τὸ $ΑΒ + ΒΓ = α$, κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ $2ΒΓ$, ἔσεται $ΑΒ - ΒΓ = α - 2ΒΓ$. ἀλλ' $ΑΒ - ΒΓ = y$.

 τὸ

(ι) Πίν. XXVI. (κ) Πίν. XXV. χ. 8.

τὸ ἄρα $y = \alpha - 2$ΒΓ. διὸ τὸ 2ΒΓ $= \alpha - y$, καὶ τὸ ΒΓ $= \frac{\alpha - y}{2}$. τεθέντος δὲ ἐν τῇ πρώτῃ ἐξισώσει ἀντὶ τοῦ ΒΓ τοῦ ἄρτι εὑρεθέντος αὐτῷ ἴσου, ἔσεται τὸ ΑΒ $+ \frac{\alpha - y}{2} = \alpha$, ἤτοι τὸ ΑΒ $= \frac{\alpha + y}{2}$. ϗ ἐπεὶ τὸ μὲν ΑΓ$^2 =$ ΑΒ$^2 + \overline{\text{ΒΓ}}^2$, ὡς δὲ ΑΒ : ΒΔ :: ΑΓ : ΒΓ, ἐκ τούτου ἄρα γίνονται αἱ κατὰ τὰ Θ ϗ Ι ἐξισώσεις. (λ) ϗ ἡ μὲν κατὰ τὸ Θ ἡ αὐτή ἐστι τῇ ἐν τῷ Κ, ἐξ ἧς ἡ ἐν τῷ Λ· ἐκ δὲ τῆς κατὰ τὸ Ι ἡ κατὰ τὸ Μ γίνεται, ἐξ αὐτῆς δὲ καὶ τῆς κατὰ τὸ Λ ἡ ἐν τῷ Ν, ἐξ ἧς ἡ ἐν τῷ Ξ· ϗ τοῦ τετραγώνου πληρωθέντος, ἡ ἐν τῷ Ο, καὶ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἐξαχθείσης, ἡ ἐν τῷ Π, ἐξ αὐτῆς δὲ ἡ ἐν τῷ Ρ.

Εὐθείᾳ τῇ ΔΓ $= \alpha$ (μ) ἤχθω πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΕ $= \beta$, ϗ ἐπιζευχθείσης τῆς ΕΓ, εἰλήφθω τῇ μὲν ΒΔ $=$ ΕΖ, τῇ δὲ ΓΖ $=$ ΓΑ, καὶ ἀναγραφέντος ἐπὶ τῆς ΑΓ τοῦ ΑΒΓ ἡμικυκλίου, ἤχθω ἡ ΕΒ τῇ ΔΓ παράλληλος, ϗ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΒ, ΓΒ. λέγω ὅτι τὸ ΑΒΓ τρίγωνόν ἐστι τὸ ζητούμενον.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ $\overline{\text{ΕΓ}}^2 = \overline{\text{ΔΓ}}^2 + \overline{\text{ΕΔ}}^2$, ἤτοι τὸ $\overline{\text{ΕΓ}}^2 = \alpha^2 + \beta^2$, ἡ ἄρα ΕΓ $= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. ἀλλ' ἡ ΕΖ $=$ ΕΔ $= \beta$, ἡ ἄρα ΓΖ $= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \beta$. ἀλλὰ τῇ ΓΖ $=$ ΑΓ, ἄρα ἡ ΑΓ $= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \beta = \chi$. ἡ ἄρα βάσις τοῦ ζητουμένου τριγώνου ἐστὶν ἡ ΑΓ, ὕψος δὲ ἡ ΕΔ $= \beta$. διὸ δῆλον ὅτι αἱ λοιπαὶ τοῦ τριγώνου πλευραί εἰσιν αἱ ΑΒ, ΒΓ.

ΠΡΟ-

(λ) Πίν. XXVI. (μ) Πίν. XXV. χ. 10.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ι'.

§. 217. Δοθείσης τῆς ΒΓ, (σχ. 11.) τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινάσης τοῦ ΒΑΓ ὀρθογωνίου τριγώνου καὶ τῆς τῶν λοιπῶν πλευρῶν διαφορᾶς ΔΓ, ἑκατέραν τῶν πλευρῶν εὑρεῖν.

Ἔστω ἡ μὲν ΒΓ $=$ γ, ἡ δὲ ΔΓ $=$ α, ἔστω δὲ καὶ ἡ $\frac{ΑΒ+ΑΓ}{2} = χ$. ἐκεῖν ἔσται ἡ ΑΒ $+$ ΑΓ $=$ 2χ, καὶ κοινῆς ἀφαιρεθείσης τῆς 2ΑΒ, ἔσται ἡ ΑΓ $-$ ΑΒ $=$ 2χ $-$ 2ΑΒ. ἀλλὰ ἡ ΑΓ $-$ ΑΒ $=$ ΔΓ $=$ α, ἄρα τὸ α $=$ 2χ $-$ 2ΑΒ. διὸ ἡ 2ΑΒ $=$ 2χ $-$ α. ἡ ἄρα ΑΒ $= χ - \frac{1}{2}α$. τεθέντος δὲ ἐν τῇ δευτέρᾳ ἐξισώσει ἀντὶ τῆς ΑΒ τοῦ ἄρτι εὑρεθέντος αὐτῇ ἴσου, ἔσται ἡ ΑΓ $= χ + \frac{1}{2}α$.

Ἔστι δὲ $\overline{ΒΓ}^2 = \overline{ΑΓ}^2 + \overline{ΑΒ}^2$, διὸ ἡ κατὰ τὸ Σ (ν) ἐξίσωσις γίνεται, ἡ αὐτὴ οὖσα τῇ κατὰ τὸ Τ, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ Υ, καὶ ἐξ αὐτῆς ἡ κατὰ τὸ Φ, καὶ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἐξαχθείσης, ἡ κατὰ τὸ Χ.

Ἐκκείσθω ἐν εὐθείᾳ ἡ ΑΖ $= \frac{1}{2}γ$, (ξ) καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἤχθω πρὸς ὀρθὰς καὶ ἴση αὐτῇ ἡ ΖΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕ. καὶ ἡμικυκλίου ἀναγραφέντος ἐπὶ τῆς ΑΕ τοῦ ΑΖΕ, ἐφηρμόσθω εὐθεῖα ἡ ΕΘ $= \frac{1}{2}α$, καὶ εἰλήφθω ἑκατέρα τῶν ΓΘ, ΘΔ ἴση τῇ ΕΘ. καὶ ἔσται δὴ ἡ μὲν ΑΘ $=$ χ· ἡ δὲ ΑΓ, ἡ μείζων τῶν πλευρῶν· ἡ δὲ ΑΒ, ἡ ἐλάσσων.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ $\overline{ΑΕ}^2 = \overline{ΑΖ}^2 + \overline{ΕΖ}^2$, ἤτοι τὸ $\overline{ΑΕ}^2 = \frac{1}{4}γ^2 + \frac{1}{4}γ^2$, ἡ ἄρα ΑΕ $= \sqrt{\frac{1}{2}γ^2}$. πάλιν ἐπειδὴ τὸ $\overline{ΑΕ}^2 = \overline{ΑΘ}^2 + \overline{ΘΕ}^2$, ἤτοι τὸ $\frac{1}{2}γ^2 = \overline{ΑΘ}^2 + \frac{1}{4}α^2$, ἡ ἄρα ΑΘ $= \sqrt{\frac{1}{2}γ^2 - \frac{1}{4}α^2} = χ$. ἔστι δὲ ἡ

(ν) Πίν. XXVI. (ξ) Πίν. XXV. χ. 12.

$\Theta\Gamma = E\Theta = \frac{1}{2}\alpha$, ἡ ἄρα $A\Gamma = \chi + \frac{1}{2}\alpha$, ἡ δὲ $AB = A\Gamma - \Delta\Gamma = A\Delta = A\Theta - \Delta\Theta = \chi - \frac{1}{2}\alpha$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΑ'.

§. 218. Εἰς τὸν δοθέντα ΛΚΙ κύκλον (ο) εὐθεῖαν δοθεῖσαν τὴν ΚΛ ἐναρμόσαι, ἥτις ἐκβληθεῖσα διὰ τοῦ δοθέντος σημείου Η ἥξει, ἀφ' οὗ ἡ δοθεῖσα ἐφαπτομένη ΗΙ ἤχθη.

Ἔστω ἡ μὲν $K\Lambda = \alpha$, ἡ δὲ $HI = \beta$, καὶ ἐκβληθεῖσα ἡ ΚΛ ἡκέτω ἐπὶ τὸ Η. καὶ ἔστω ἡ $H\Lambda = y$. οὐκοῦν ἔσται ἡ $HK = y + \alpha$.

Καὶ ἐπεὶ τὸ $HK.\ H\Lambda = \overline{HI}^2$, ἐκ τούτου ἡ κατὰ τὸ Ψ ἐξίσωσις γίνεται. (π) καὶ πληρωθέντος τοῦ τετραγώνου ἡ κατὰ τὸ Ω, καὶ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἐξαχθείσης, ἡ κατὰ τὸ α, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ β.

Ἤχθω οὖν ἀπὸ τοῦ Ι (ρ) πρὸς ὀρθὰς τῇ ΗΙ ἡ $IM = \frac{1}{2}\alpha$, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΜ. καὶ ληφθείσης τῆς $MN = MI$, κέντρῳ τῷ Η καὶ διαστήματι τῷ ΗΝ γεγράφθω τόξον κύκλου τὸ ΝΛ, λέγω ὅτι ἡ $H\Lambda = y$.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ $\overline{HM}^2 = \overline{HI}^2 + \overline{IM}^2$, ἤτοι τὸ $\overline{HM}^2 = \beta^2 + \frac{1}{4}\alpha^2$, ἔσεται ἡ $HM = \sqrt{\beta^2 + \frac{1}{4}\alpha^2}$. ἔστι δὲ ἡ $MN = MI = \frac{1}{2}\alpha$, ἡ ἄρα $HN = \sqrt{\beta^2 + \frac{1}{4}\alpha^2} - \frac{1}{2}\alpha$. ἀλλὰ τῇ $HN = H\Lambda$. ἡ ἄρα $H\Lambda = \sqrt{\beta^2 + \frac{1}{4}\alpha^2} - \frac{1}{2}\alpha = y$. ἐκ τούτου δὴ δῆλον, ὅτι τὸ Λ ἐστὶ τὸ σημεῖον, ἐφ' ὃ ἐπιζευχθείσης τῆς ΗΛ, καὶ ἐκβληθείσης, ἔσται ἡ ΗΛΚ ἡ ζητουμένη.

ΠΡΟ-

(ο) Πίν. XXVII. σχ. 1. (π) Πίν. XXVI. (ρ) Πίν. XXVII. σχ. 1.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΒ'.

§. 219. Εὑρεῖν δύω τετράγωνα, ἀντιπεπονθότως μὲν ἀνάλογον τοῖς διθεῖσι τετραγώνοις, ὁμοῦ δὲ ληφθέντα ἴσα δοθέντι τετραγώνῳ.

Ἔςω τὰ μὲν δοθέντα τετράγωνα τὰ, β^2, γ^2, τὸ δὲ τῶν ζητεμένων κεφάλαιον α^2, ἓν δὲ τῶν ζητεμένων τὸ y^2, ἐκὲν τὸ ἕτερον ἔςαι $\alpha^2 - y^2$.

Ἔςαι δὴ ἒν ὡς $y^2 : \beta^2 :: \gamma^2 : \alpha^2 - y^2$. ἐκ δὲ τῆς ἀναλογίας ταύτης ἡ κατὰ τὸ γ (σ) ἐξίσωσεις γίνεται, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ δ, ϰ τε τετραγώνε πληρωθέντος, ἡ κατὰ τὸ ε, καὶ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἐξαχθείσης, ἡ κατὰ τὸ ζ, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ η, ϰ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης πάλιν ἐξαχθείσης, ἡ κατὰ τὸ θ.

Ἐκκείσθω ἒν εὐθεῖά τις ἡ ΑΔ, (τ) ϰ ἑτέρα ἡ ΑΘ γωνίαν περιέχεσαι τυχῆσαν τὴν ΘΑΔ. καὶ τῇ ΑΒ $=\alpha$, ΒΔ $=\gamma$, ΑΓ $=\beta$, τετάρτη ἀνάλογον εὑρεθήτω ἡ ΓΕ, ἥτις ἴση ἔςαι $\frac{\beta\gamma}{\alpha}$. καὶ ληφθείσης τῆς ΓΖ $=\frac{1}{2}\alpha$, ϰ ἀναγραφέντος ἐπ' αὐτῆς τε ΖΗΓ ἡμικυκλίε, ἐνηρμόσθω εἰς αὐτὸν εὐθεῖα ἡ ΓΗ $=$ ΓΕ, ἐπιζευχθείσης τε τῆς ΖΗ, εἰλήφθω ἡ μὲν ΖΙ $=$ ΖΗ, ἡ δὲ ΓΘ $=\alpha$· ϰ ἡμικυκλίε ἀναγραφέντος ἐπὶ τῆς ΙΘ τε ΙΚΘ, ἤχθω ἀπὸ τε Γ ἡ ΓΚ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΙΘ. καὶ τε ΓΛΘ ἡμικυκλίε ἐπὶ τῆς ΓΘ ἀναγραφέντος, ἐναρμοσθείσης τε τῆς ΓΛ $=$ ΓΚ, ἐπεζεύχθω ἡ ΘΛ. λέγω ἒν ὅτι ἡ μὲν ΓΚ $=y$, ἡ δὲ ΛΘ $=\sqrt{\alpha^2 - y^2}$.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ $\overline{\text{ΖΓ}}^2 = \overline{\text{ΖΗ}}^2 + \overline{\text{ΓΗ}}^2$, ἤτοι $\frac{1}{4}\alpha^2 = \overline{\text{ΖΗ}}^2 + \frac{\beta^2\gamma^2}{\alpha^2}$, ἔσεται ἡ ΖΗ $= \frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{1}{4}\alpha^4 - \beta^2\gamma^2} =$ ΖΙ.

ἡ

(σ) Πιν. XXVI. (τ) Πιν. XXVII. χ. 2.

ἡ ἄρα $\Gamma\mathrm{I} = \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{1}{4}\alpha^4 - \beta^2\gamma^2}$. ϰ̀ ἐπεὶ ὡς ΙΓ: ΓΚ:: ΓΚ: ΓΘ, ἤτοι ὡς $\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{1}{4}\alpha^4 - \beta^2\gamma^2}$: ΓΚ:: ΓΚ : α, ἡ ἄρα $\Gamma\mathrm{K} = \sqrt{\frac{1}{2}\alpha^2 - \sqrt{\frac{1}{4}\alpha^4 - \beta^2\gamma^2}} = y = \Gamma\Lambda$. ἐπεὶ δὲ τὸ $\Gamma\Theta^2 = \Gamma\Lambda^2 + \Lambda\Theta^2$, ἤτοι τὸ $\alpha^2 = y^2 + \Lambda\Theta^2$, ἡ ἄρα $\Lambda\Theta = \sqrt{\alpha^2 - y^2}$. ἐκ τούτου δὲ δῆλον, ὅτι τὸ μὲν τῶν ζητουμένων τετραγώνων ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΛ· τὸ δὲ, τὸ ἀπὸ τῆς ΛΘ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΓ΄.

§. 210. Ἐκ τῆς γωνίας Γ (σχ. 3.) τοῦ δοθέντος ῥόμβου ΑΓΔΒ εὐθεῖαν ἀγαγεῖν, συμβάλλουσαν τῇ ἑτέρᾳ τῶν τοῦ ῥόμβου πλευρῶν ἐκβληθείσῃ κατά τι σημεῖον τὸ Ζ, ὥστε τὴν ἐκτὸς ὑπὸ τῶν πλευρῶν τοῦ ῥόμβου ἀπολαμβανομένην ΕΖ ἴσην εἶναι εὐθείᾳ δοθείσῃ.

Ἤχθω ἡ διαγώνιος ΓΒ, ϰ̀ συνεστάτω γωνία ἡ ΓΕΦ = ΓΒΖ, ϰ̀ συμβαλλέτω ἡ ΕΦ τῇ διαγωνίῳ ΓΒ ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ Φ.

Ἔστω δὲ ἡ μὲν ΑΒ = β, ἡ δὲ ΓΒ = γ, ἡ δὲ ΕΖ = α, ἡ δὲ ΒΖ = Ζ, ἡ δὲ ΓΦ = y. οὐκοῦν ἡ ΦΒ = y − γ.

Ἐπεὶ δὲ τὰ ΓΒΖ, ΓΕΦ τρίγωνα ἔχει τὴν μὲν γωνίαν ΓΒΖ = ΓΕΦ, τὴν δὲ ΒΓΖ κοινὴν, ὅμοια ἄρα εἰσί. πάλιν ἐπεὶ ἡ ΔΒΓ = ΓΒΔ, (διὰ τὸ τοῦ ῥόμβου ἰσόπλευρον) ἡ δὲ ΑΒΓ = ΦΒΖ, ἄρα καὶ ἡ ΓΒΔ = ΦΒΖ, κοινῆς δὲ προσκειμένης τῆς ΕΒΖ, ἔσεται ἡ ΦΒΕ = ΓΒΖ. ἀλλ' ἡ ΓΒΖ = ΓΕΦ, ἄρα καὶ ἡ ΓΕΦ = ΦΒΕ. ἔχουσι δὲ τὰ τρίγωνα ΓΕΦ, ΒΕΦ, καὶ τὴν πρὸς τῷ Φ γωνίαν κοινὴν, ὅμοια ἄρα εἰσίν. ἐπεὶ δὲ ὡς ΖΒ: ΖΕ:: ΒΑ : ΕΓ, ἤτοι ὡς Ζ : α:: β: ΕΓ, (παράλληλος γὰρ ἡ ΒΕ τῇ ΑΓ διὰ τὸν ῥόμβον) ἔσεται ἄρα ἡ ἡ ΕΓ $= \frac{\alpha\beta}{z}$. ἔστι δὲ καὶ ὡς ΓΒ : ΒΖ :: ΓΕ : ΕΦ, ἤτοι ὡς $\gamma : z :: \frac{\alpha\beta}{z}$: ΕΦ, ἡ ἄρα ΕΦ $= \frac{\alpha\beta z}{\gamma z} = \frac{\alpha\beta}{\gamma}$. ἐπεὶ δὲ καὶ ὡς ΓΦ : ΦΕ :: ΦΕ : ΦΒ, ἤτοι ὡς $y : \frac{\alpha\beta}{\gamma} :: \frac{\alpha\beta}{\gamma} : y - \gamma$, ἐκ τούτου ἄρα ἡ κατὰ τὸ ι ἐξίσωσις (υ) γίνεται, καὶ πληρωθέντος τοῦ τετραγώνου, ἡ κατὰ τὸ κ, καὶ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἐξαχθείσης, ἡ κατὰ τὸ λ, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ μ.

Ἐκβεβλήσθω οὖν ἡ διαγώνιος ΒΓ, (φ) καὶ ληφθείσης τῆς ΒΜ $= \alpha$, ἤχθω ἀπὸ τοῦ Μ ἡ ΜΛ τῇ ΓΑ παράλληλος, δίχα δὲ τμηθείσης τῆς ΒΓ κατὰ τὸ Ν, ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ Γ ἡ ΓΟ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΓΒ καὶ ἴση τῇ ΛΜ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΝΟ. ληφθείσης δὲ τῆς ΝΦ = ΝΟ, κέντρῳ μὲν τῷ Φ, διαστήματι δὲ τῷ ΦΕ γεγράφθω τόξον κύκλου τέμνον τὴν ΒΔ κατὰ τὸ Ε. καὶ ἔσται δὴ ἡ ἀπὸ τοῦ Γ ἐπὶ τὸ Ε ἐπιζευγνυμένη καὶ ἐκβαλλομένη, ἧς τὸ μέρος ΕΖ τὸ ζητούμενον.

Ἐπεὶ γὰρ ὡς ΒΓ : ΓΑ :: ΒΜ : ΜΛ, ἤτοι ὡς $\gamma : \beta :: \alpha$: ΜΛ, ἔσεται ἡ ΜΛ = ΓΟ $= \frac{\alpha\beta}{\gamma}$. ἔστι δὲ τὸ $\overline{\mathrm{ON}}^2 = \overline{\mathrm{O\Gamma}}^2 + \overline{\mathrm{\Gamma N}}^2$, ἤτοι τὸ $\overline{\mathrm{ON}}^2 = \frac{\alpha^2\beta^2}{\gamma^2} + \frac{1}{4}\gamma^2$, ἡ ἄρα ΟΝ $= \frac{1}{\gamma}\sqrt{\frac{1}{4}\gamma^4 + \alpha^2\beta^2}$ = ΝΦ. ἡ ἄρα ΓΦ $= \frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{\gamma}\sqrt{\frac{1}{4}\gamma^4 + \alpha^2\beta^2} = y$. ἡ δὲ ΦΕ = ΛΜ. ἑκατέρα γὰρ ἴση τῷ $\frac{\alpha\beta}{\gamma}$.

ΚΒΦ.

(υ) Πίν. XXVI. (φ) Πίν. XXVII. σχ. 3.