20· ἐκ δὲ τῆς δευτέρας, τὸ $Z = \chi + 30 - y$. διὸ τὸ $\chi + y - 20 = \chi + 30 - y$. τὸ ἄρα $y = \frac{50}{2} = 25$. τούτου οὖν τεθέντος ἐν τῇ πρώτῃ ἐξισώσει, ἔσται τὸ $\chi + 25 = Z + 20$, ἤτοι τὸ $Z = \chi + 5$. τεθήτω οὖν ἐν τῇ τρίτῃ ἐξισώσει ἀντὶ τοῦ y καὶ τοῦ Z τὰ εὑρεθέντα αὐτοῖς ἴσα. οὐκοῦν ἔσται τὸ $\chi + \chi + 5 = 25 + 40$, ἤτοι τὸ $\chi = \frac{60}{2} = 30$. διὸ τὸ $Z = 35$. τοιγαροῦν ὁ μὲν $\chi = 30$, ὁ δὲ $y = 25$, ὁ δὲ $Z = 35$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΚΑ'.

§. 196. Εὑρεῖν τέσσαρας ἀριθμοὺς, ὅπως σὺν τρεῖς συντιθέμενοι ποιῶσι τοὺς ἐπιταχθέντας ἀριθμούς.

Ἔστω ὁ μὲν πρῶτος $= \chi$, ὁ δὲ δεύτερος $= y$, ὁ δὲ τρίτος $= Z$, ὁ δὲ τέταρτος $= \Omega$. ἐπιτετάχθω δὲ τοὺς μὲν ἀπὸ τοῦ πρώτου τρεῖς κατὰ τὸ ἑξῆς συντεθέντας ποιεῖν μονάδας 14· τοὺς δ' ἀπὸ τοῦ δευτέρου τρεῖς, 21· τοὺς δ' ἀπὸ τοῦ τρίτου τρεῖς, 20· τοὺς δ' ἀπὸ τοῦ τετάρτου τρεῖς, 17.

Τοιγαροῦν οἱ μὲν $\chi + y + Z = 14$· οἱ δὲ $y + Z + \Omega = 21$· οἱ δὲ $Z + \chi + \Omega = 20$· οἱ δὲ $\Omega + \chi + y = 17$. ἐκ μὲν οὖν τῆς πρώτης ἐξισώσεως τὸ $\chi + y = 14 - Z$· ἐκ δὲ τῆς ἐσχάτης, τὸ $\chi + y = 17 - \Omega$. διὸ τὸ $14 - Z = 17 - \Omega$. τὸ ἄρα $Z = \Omega - 3$. πάλιν ἐκ μὲν τῆς δευτέρας ἐξισώσεως τὸ $\chi + \Omega = 20 - Z$, ἐκ δὲ τῆς τρίτης τὸ $\chi + \Omega = 17 - y$. διὸ τὸ $17 - y = 20 - Z$. τὸ ἄρα $Z - 3 = y$. ἀλλὰ τὸ Z εὕρηται ἴσον τῷ $\Omega - 3$ τὸ ἄρα $\Omega - 3 - 3 = y$, ἤτοι $\Omega - 6 = y$. τεθήτω οὖν ἐν τῇ δευτέρᾳ ἐξισώσει ἀντὶ τῶν y καὶ Z τὰ εὑρεθέντα αὐτοῖς ἴσα. καὶ ἔσται δὴ τὸ $\Omega - 6 + \Omega - 3 + \Omega = 21$, ἤτοι τὸ $3\Omega = 30$. τὸ ἄρα $\Omega = 10$. διὸ τὸ μὲν

$y=10-6=4$, τὸ δὲ $Z=10-3=7$. τὸ δὲ $\chi+4=17-10$, ἤτοι τὸ $\chi=3$. οὐκοῦν τῶν ζητουμένων ἀριθμῶν ὁ μὲν $\chi=3$, ὁ δὲ $y=4$, ὁ δὲ $Z=7$, ὁ δὲ $\Omega=10$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΚΒ'.

§. 197. Δοθέντος τοῦ κεφαλαίου δύω Δυνάμεων τὸν αὐτὸν ἐκθέτην ἐχουσῶν, καὶ τῆς διαφορᾶς αὐτῶν, εὑρεῖν ἑκατέρας τὴν ῥίζαν.

Ἔστω τῆς μὲν μείζονος ἡ ῥίζα, y· τῆς δὲ ἐλάσσονος, χ· καὶ τὸ μὲν τῶν Δυνάμεων κεφάλαιον $=\alpha$, ἡ δὲ διαφορὰ $=\beta$.

Οὐκοῦν τὸ μὲν $y^2+\chi^2=\alpha$, τὸ δὲ $y^2-\chi^2=\beta$. καὶ ἐκ μὲν τῆς πρώτης ἐξισώσεως εὑρίσκομεν τὸ $y^2=\alpha-\chi^2$· ἐκ δὲ τῆς δευτέρας, τὸ $y^2=\beta+\chi^2$. διὸ τὸ $\alpha-\chi^2=\beta+\chi^2$. τὸ ἄρα $\chi^2=\frac{\alpha-\beta}{2}$. καὶ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἐξαχθείσης, ἔσται τὸ $\chi=\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{2}}$.

Ἔστω τὸ μὲν $\alpha=25$, τὸ δὲ $\beta=7$. οὐκοῦν τὸ μὲν $\chi=\sqrt{\frac{25-7}{2}}=\sqrt{\frac{18}{2}}=\sqrt{9}=3$· τὸ δὲ $y^2=7+9=16$. διὸ τὸ $y=4$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΚΓ'.

§. 198. Εὑρεῖν δύω ἀριθμοὺς, ὅπως τὸ γινόμενον ἐξ ἑκατέρου καὶ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ ἑτέρου ἴσον ᾖ δοθέντι ἀριθμῷ.

Ἔστω τὸ μὲν τῶν γινομένων α. τὸ δὲ β. καὶ ὁ μὲν τῶν ζητουμένων χ, ὁ δὲ y.

Τοιγαροῦν τὸ μὲν $\chi\sqrt{y}=\alpha$, τὸ δὲ $y\sqrt{\chi}=\beta$. καὶ ἐκ μὲν τῆς πρώτης ἐξισώσεως εὑρίσκομεν τὸ $y=$

$\frac{\alpha^2}{\chi^2}$, ἐκ δὲ τῆς δευτέρας τὸ $y = \frac{\beta}{\sqrt{\chi}}$. διὸ τὸ $\frac{\alpha^2}{\chi^2} = \frac{\beta}{\sqrt{\chi}}$.

τὸ ἄρα $\frac{\alpha^4}{\chi^4} = \frac{\beta^2}{\chi}$. καὶ τὸ $\chi^3 = \frac{\alpha^4}{\beta^2}$. διὸ τὸ $\chi = \sqrt[3]{\frac{\alpha^4}{\beta^2}}$.

Ἔςω τὸ μὲν $\alpha = 18$, τὸ δὲ $\beta = 12$. οὐκοῦν τὸ $\chi = \sqrt[3]{\frac{104976}{144}} = \sqrt[3]{729} = 9$. τὸ δὲ $y = \frac{12}{\sqrt{9}} = \frac{12}{3} = 4$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΚΔ'.

§. 199. Εὑρεῖν δύω ἀριθμοὺς, ὅπως τὸ ἐξ αὐτῶν γινόμενον ἴσον ᾖ δοθέντι ἀριθμῷ, τὸ δὲ ἀπὸ τοῦ κεφαλαίου αὐτῶν τετράγωνον, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ὑπεροχῆς ἔχῃ τὸν δοθέντα λόγον.

Ἔςω ὁ μὲν μείζων τῶν ζητουμένων ἀριθμῶν χ, ὁ δὲ ἐλάσσων y· καὶ τὸ μὲν ἐξ αὐτῶν γινόμενον $= \alpha$· ὁ δὲ δοθεὶς λόγος, ὁ τοῦ $\beta : \gamma$.

Οὐκοῦν ἔςαι τὸ μὲν $\chi y = \alpha$, τὸ δὲ $\chi^2 + 2\chi y + y^2 : \chi^2 - 2\chi y + y^2 :: \beta : \gamma$. διὸ τὸ $\gamma\chi^2 + 2\gamma\chi y + \gamma y^2 = \beta\chi^2 - 2\beta\chi y + \beta y^2$. καὶ ἐκ μὲν τῆς πρώτης ἐξισώσεως εὑρίσκομεν τὸ $\chi^2 = \frac{\alpha^2}{y^2}$· ἐκ δὲ τῆς δευτέρας, τὸ $\chi^2 + y^2 = \frac{2\gamma + 2\beta}{\beta - \gamma}.\ \chi y$. τεθέντων οὖν ἀντὶ τοῦ χy, καὶ τοῦ χ^2 ἐν τῇ δε τῇ ἐξισώσει τῶν εὑρεθέντων αὐτοῖς ἴσων, προκύψει ἥδε ἡ ἐξίσωσις· $\frac{\alpha^2}{y^2} + y^2 = \frac{2\gamma + 2\beta}{\beta - \gamma}.\ \alpha$. διὸ τεθέντος τοῦ $\frac{2\gamma + 2\beta}{\beta - \gamma}.\ \alpha = 2\nu$, ἔσεται τὸ $y^4 = 2\nu y^2 - \alpha^2$, ἤτοι τὸ $y^4 - 2\nu y^2 = -\alpha^2$. τοῦ δὲ τετραγώνου πληρωθέντος, ἔσεται τὸ $y^4 - 2\nu y^2 + \nu^2 = \nu^2 - \alpha^2$. καὶ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἐξαχθείσης, ἔσεται τὸ $y^2 - \nu = \sqrt{\nu^2 - \alpha^2}$. διὸ τὸ $y^2 = \nu + \sqrt{\nu^2 - \alpha^2}$. καὶ πάλιν τῆς τετραγωνικῆς ἐξαχθείσης ῥίζης, ἔσεται τὸ $y = \sqrt{\nu + \sqrt{\nu^2 - \alpha^2}}$.

Ἔστω τὸ μὲν $\alpha = 96$· ὡς δὲ $\beta : \gamma :: 25 : 1$. τὸ ἄρα $2\nu = \frac{2.1 + 2.25}{25 - 1} . 96 = 52.4 = 208$. διὸ τὸ $\nu = 104$, τὸ δὲ $\nu^2 = 10816$. ἔστι δὲ καὶ τὸ $\alpha^2 = 9216$. τὸ ἄρα $y = \sqrt{104 + \sqrt{10816 - 9216}} = \sqrt{104 + 40} = \sqrt{144} = 12$. διὸ τὸ $\chi = \frac{96}{12} = 8$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΚΕ'.

§. 200. Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς, ὅπως τὸ ἐξ αὐτῶν γινόμενον ἴσον ᾖ ἑκατέροις, εἴτουν τῷ κεφαλαίῳ αὐτῶν, καὶ τῇ ὑπεροχῇ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων.

Ἔστω ὁ μὲν μείζων τῶν ζητουμένων χ, ὁ δὲ ἐλάσσων y.

Οὐκοῦν ἔσται τὸ $\chi y = \chi + y$, ὁμοίως τὸ $\chi y = \chi^2 - y^2$. ἐκ τῆς πρώτης δὲ ἐξισώσεως δῆλον ὅτι τὸ $\chi = \chi y - y$. τεθέντος οὖν ἀντὶ τοῦ χ ἐν τῇ δευτέρᾳ ἐξισώσει τοῦ ἴσου αὐτῷ, ἔσται τὸ $\chi^2 - y^2 = \chi y^2 - y^2$, ἤτοι τὸ $\chi = y^2$. διὸ τὸ $y = \sqrt{\chi}$. ἐν τῇ πρώτῃ οὖν ἐξισώσει τεθέντος ἀντὶ τοῦ y τοῦ ἴσου αὐτῷ, ἔσται τὸ $\chi\sqrt{\chi} = \chi + \sqrt{\chi}$, ἤτοι τὸ $\chi = \sqrt{\chi} + 1$. διὸ τὸ $\chi - 1 = \sqrt{\chi}$, καὶ τὸ $\chi = \chi^2 - 2\chi + 1$. οὐκοῦν τὸ $\chi^2 - 3\chi = -1$. καὶ πληρωθέντος τοῦ τετραγώνου, ἔσεται τὸ $\chi^2 - 3\chi + \frac{9}{4} = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4}$. διὰ τὸ $\chi = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$. τὸ δὲ $y = \sqrt{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 201. Ἰςέον δὲ ὅτι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τῆς $\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}$, καὶ τῶν ὁμοίων αὐτῇ ἐκθέσεων, εὑρίσκεται οὕτω. κείσθω τὴν ζητουμένην ῥίζαν εἶναι τὴν $\Omega+\sqrt{\Psi}$. ἐκοῦν ἔςαι τὸ $\Omega+\sqrt{\Psi}=\sqrt{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}}$. διὸ τὸ $\Omega^2+2\Omega\cdot\sqrt{\Psi}+\Psi=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}$. κείσθω τὸ $2\Omega\sqrt{\Psi}=\frac{1}{2}\sqrt{5}$. ἐκοῦν ἔςαι τὸ $\Omega^2+\Psi=\frac{3}{2}$. καὶ ἐκ μὲν τῆς πρώτης ἐξισώσεως, ἐπεὶ $4\Omega^2\Psi=\frac{5}{4}$, ἔςαι τὸ $\Psi=\frac{5}{4\cdot4\cdot\Omega^2}$. ἀντὶ οὖν, τοῦ Ψ τεθέντος ἐν τῇ δευτέρᾳ ἐξισώσει τοῦ ἴσου αὐτῷ, ἔςαι τὸ $\Omega^2+\frac{5}{4\cdot4\cdot\Omega^2}=\frac{3}{2}$. διὸ τὸ $\Omega^4-\frac{3}{2}\Omega^2=-\frac{5}{4\cdot4}$. πληρωθέντος δὲ τοῦ τετραγώνου, ἔςαι τὸ $\Omega^4-\frac{3}{2}\Omega^2+\frac{9}{4\cdot4}=\frac{9}{4\cdot4}-\frac{5}{4\cdot4}$, καὶ τῆς τετραγωνικῆς ἐξαχθείσης ῥίζης, ἔςαι τὸ $\Omega^2-\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$. διὸ τὸ μὲν $\Omega^2=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}$, τὸ δὲ $\Omega=\frac{1}{2}\sqrt{5}$. διὸ τὸ $\frac{5}{4}+\Psi=\frac{3}{2}$, ἤτοι τὸ $\Psi=\frac{3}{2}-\frac{5}{4}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$, ἐκοῦν ἡ $\sqrt{\Psi}=\frac{1}{2}$. διὸ τὸ $\Omega+\sqrt{\Psi}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}$. ἡ ἄρα ζητουμένη ῥίζα ἔσεται ἡ $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}=\sqrt{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΚϚ΄. (*)

§. 202. Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς, ὅπως ἕκαστος τῷ ἑξῆς ἑαυτοῦ διδῷ μέρος τὸ ἐπιταχθέν· ἵνα δόντες καὶ λαβόντες γίνωνται ἴσοι.

Ἔστω ὁ μὲν πρῶτος x, ὁ δὲ δεύτερος y, ὁ δὲ τρίτος z. ἐπιτετάχθω δὲ τὸν μὲν πρῶτον τῷ δευτέρῳ διδόναι τὸ ἑαυτοῦ τρίτον· τὸν δὲ δεύτερον τῷ τρίτῳ, τὸ τέταρτον· καὶ ἔτι τὸν τρίτον τῷ πρώτῳ, τὸ πέμπτον.

Τοιγαροῦν ὁ μὲν πρῶτος μετὰ τὴν δόσιν τοῦ ἑαυτοῦ τρίτου ἴσος ἔσται τῷ $x - \frac{1}{3}x = \frac{2}{3}x$, λαβὼν δὲ τὸ πέμπτον τοῦ τρίτου, ἴσος ἔσται τῷ $\frac{2}{3}x + \frac{1}{5}z$. ὁ δὲ δεύτερος μετὰ τὴν δόσιν τοῦ τεταρτημορίου αὐτοῦ ἴσος ἔσται τῷ $y - \frac{1}{4}y = \frac{3}{4}y$, λαβὼν δὲ τὸ τοῦ πρώτου τριτημόριον, ἴσος ἔσται τῷ $\frac{3}{4}y + \frac{1}{3}x$. ὁ δὲ τρίτος δοὺς μὲν τὸ πεμπτημόριον, ἴσος ἔσται τῷ $z - \frac{1}{5}z = \frac{4}{5}z$, λαβὼν δὲ τὸ τοῦ δευτέρου τεταρτημόριον, ἴσος τῷ $\frac{4}{5}z + \frac{1}{4}y$. ἔστιν ἄρα τὸ $\frac{2}{3}x + \frac{1}{5}z = \frac{3}{4}y + \frac{1}{3}x$, καὶ τὸ $\frac{3}{4}y + \frac{1}{3}x = \frac{4}{5}z + \frac{1}{4}y$. ἐκ μὲν τῆς πρώτης ἐξισώσεως εὑρίσκομεν τὸ $\frac{1}{3}x = \frac{3}{4}y - \frac{1}{5}z$. τεθέντος δὲ ἐν τῇ δευτέρᾳ ἐξισώσει ἀντὶ τοῦ $\frac{1}{3}x$ τοῦ ἴσου αὐτῷ, ἔσται τὸ $\frac{3}{4}y + \frac{3}{4}y - \frac{1}{5}z = \frac{4}{5}z + \frac{1}{4}y$. διὸ τὸ $z = \frac{5}{4}y$. καὶ τὸ $\frac{1}{3}x = \frac{3}{4}y - \frac{1}{5}\cdot\frac{5}{4}y$, ἤτοι τὸ $\frac{1}{3}x = \frac{1}{2}y$, ἤτοι τὸ $x = \frac{3}{2}y$.

Ἔστω

(*) Τὰ ἑξῆς προβλήματα ἐκ τῶν ἀορίστων ἐστί.

Ἔςω τὸ $Z=10$. οὐκοῦν τὸ μὲν $y=8$, τὸ δὲ $\chi=12$. Ἔςω τὸ $Z=20$. τὸ μὲν ἄρα $y=16$, τὸ δὲ $\chi=24$. ἔςω τὸ $Z=30$. τὸ μὲν ἄρα $y=24$, τὸ δὲ $\chi=36$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΚΖ΄.

203. Εὑρεῖν δύω ἀριθμοὺς, ὧν τὸ κεφάλαιον σὺν τῷ γινομένῳ ἴσον ἀριθμῷ δοθέντι.

Ἔςω ὁ μὲν τῶν ζητουμένων $=\chi$, ὁ δὲ $=y$, ὁ δὲ δοθεὶς ἀριθμὸς $=\alpha$.

Τοιγαροῦν ἔσεται τὸ $\chi+y+\chi y=\alpha$. τὸ ἄρα $\chi y+\chi=\alpha-y$, ἤτοι τὸ $\chi.\ \overline{y+1}=\alpha-y$. διὸ τὸ $\chi=\frac{\alpha-y}{y+1}$.

Ἔςω τὸ μὲν $y=2$, τὸ δὲ $\alpha=30$. οὐκοῦν τὸ $\chi=\frac{30-2}{2+1}=9+\frac{1}{3}$. κείσθω τὸ μὲν $y=2$, τὸ δὲ $\alpha=20$, τὸ ἄρα $\chi=\frac{20-2}{2+1}=6$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΚΗ΄.

§. 204. Εὑρεῖν τέσσαρας ἀριθμοὺς, ὅπως τὸ μὲν κεφάλαιον τοῦ πρώτου καὶ τοῦ δευτέρου ἴσον ᾖ τῷ τρίτῳ· ἡ δὲ ὑπεροχὴ, τῷ τετάρτῳ.

Ἔςω ὁ μὲν πρῶτος $=\chi$, ὁ δὲ δεύτερος $=y$, ὁ δὲ τρίτος $=Z$, ὁ δὲ τέταρτος $=\Omega$.

Οὐκοῦν τὸ μὲν $\chi+y=Z$, τὸ δὲ $\chi-y=\Omega$. καὶ ἐκ μὲν τῆς πρώτης ἐξισώσεως εὑρίσκομεν τὸ $\chi=Z-y$, ἐκ δὲ τῆς δευτέρας, τὸ $\chi=\Omega+y$. διὸ τὸ $Z-y=\Omega+y$. ὅθεν τὸ $y=\frac{Z-\Omega}{2}$.

Κείσθω

Κείσθω τὸ μὲν $Z = 8$, τὸ δὲ $\Omega = 2$. τὸ μὲν ἄρα $y = \frac{8-2}{2} = 3$. τὸ δὲ $\chi = 8 - 3 = 5$. Ἔστω τὸ μὲν $Z = 5$, τὸ δὲ $\Omega = 1$. ἄρα τὸ μὲν $y = \frac{5-1}{2} = 2$. τὸ δὲ $\chi = 5 - 2 = 3$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΚΘ΄.

§. 205. Εὑρεῖν δύω ἀριθμοὺς, ὅπως τὸ ἐξ αὐτῶν γινόμενον ἴσον ᾖ κύβῳ, οὗ ἡ ῥίζα ἴση τῷ γινομένῳ ἐκ τοῦ πρώτου τῶν ζητουμένων ἀριθμῶν, καὶ τοῦ τετραγώνου τοῦ δευτέρου.

Ἔστω ὁ μὲν πρῶτος $= \chi$, ὁ δὲ δεύτερος $= y$, ἡ δὲ κυβικὴ ῥίζα $= \Omega$.

Οὐκοῦν τὸ μὲν $\chi y = \Omega^3$, τὸ δὲ $\chi y^2 = \Omega$. καὶ ἐκ μὲν τῆς πρώτης ἐξισώσεως προκύπτει τὸ $\chi = \frac{\Omega^3}{y}$, ἐκ δὲ τῆς δευτέρας, τὸ $\chi = \frac{\Omega}{y^2}$. διὸ τὸ $\frac{\Omega^3}{y} = \frac{\Omega}{y^2}$. τὸ ἄρα $y = \frac{1}{\Omega^2}$.

Κείσθω τὸ $\Omega = 2$. ἄρα τὸ μὲν $y = \frac{1}{4}$, τὸ δὲ $\chi = 32$. ἔστω τὸ $\Omega = 3$. τὸ ἄρα $y = \frac{1}{9}$, τὸ δὲ $\chi = 243$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Λ.

§. 206. Εὑρεῖν δύω ἀριθμοὺς, ὅπως ὁ ἕτερος τῷ τετραγώνῳ τοῦ ἑτέρου προστεθεὶς ποιῇ ἀριθμὸν τετράγωνον, οὗ ἡ πλευρὰ ἴση τῷ τῶν ἀριθμῶν κεφαλαίῳ.

Ἔστω ὁ μὲν τῶν ἀριθμῶν $= \chi$, ὁ δὲ $= y$, ὁ δὲ τετράγωνος ἀριθμὸς $= v^2$.

Οὐκοῦν τὸ μὲν $\chi^2 + y = v^2$, τὸ δὲ $v = \chi + y$. ἐκ τῆς πρώτης ἐξισώσεως εὑρίσκομεν τὸ $v = \sqrt{\chi^2 + y}$. διὸ τὸ $\chi + y = \sqrt{\chi^2 + y}$. τὸ ἄρα $\chi^2 + 2y\chi + y^2 =$

$\chi^2 + y$, ἤτοι τὸ $2y\chi + y^2 = y$, εἴτουν τὸ $2\chi + y = 1$. διὸ τὸ $\chi = \frac{1-y}{2}$. ἐξ ὧ δῆλον, ὅτι ἑκάτερος τῶν ζητεμένων ἀριθμῶν ἐλάσσων ἐςὶ τῆς μονάδος.

Ἔςω τὸ $y = \frac{1}{2}$. Οὐκῦν τὸ $\chi = (1 - \frac{1}{2}) : 2 = \frac{1}{4}$.

Κείσθω τὸ $y = \frac{1}{3}$. τὸ ἄρα $\chi = (1 - \frac{1}{3}) : 2 = \frac{1}{3}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΛΛ'.

§. 207. Εὑρεῖν δύω ἀριθμὲς τετραγώνες, ὅπως ἑκατέρῳ προςεθὲν τὸ ἐξ αὐτῶν γινόμενον, τετράγωνον ποιήσῃ.

Ἔςω ὁ μὲν τῶν τετραγώνων $= \chi^2$, ὁ δὲ $= y^2$. τῶν δὲ κεφαλαίων, τὸ μὲν ποιείτω τὸν ν^2, τὸ δὲ τὸν μ^2.

Οὐκῦν τὸ μὲν $\chi^2 + \chi^2 y^2 = \nu^2$, τὸ δὲ $y^2 + \chi^2 y^2 = \mu^2$. καὶ ἐκ μὲν τῆς πρώτης ἐξισώσεως γίνεται τὸ $\chi^2 = \frac{\nu^2}{y^2+1}$, ἐκ δὲ τῆς δευτέρας τὸ $\chi^2 = \frac{\mu^2 - y^2}{y^2}$. διὸ τὸ $\frac{\nu^2}{y^2+1} = \frac{\mu^2 - y^2}{y^2}$. ὀκῦν τὸ $y^2 \nu^2 = \mu^2 y^2 - y^4 + \mu^2 - y^2$. διὸ τὸ $y^4 + \overline{\nu^2 - \mu^2 + 1}\,.\,y^2 = \mu^2$. καὶ τεθέντος τῦ $\nu^2 - \mu^2 + 1 = 2\gamma$, ἔσεται τὸ $y^4 + 2\gamma y^2 = \mu^2$. καὶ πληρωθέντος τῦ τετραγώνυ, τὸ $y^4 + 2\gamma y^2 + \gamma^2 = \gamma^2 + \mu^2$. καὶ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἐξαχθείσης, τὸ $y^2 + \gamma = \sqrt{\gamma^2 + \mu^2}$. διὸ τὸ $y^2 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 + \mu^2}$.

Ἔςω τὸ μὲν $\nu = 3$, τὸ δὲ $\mu = 2$. ὀκῦν τὸ $\nu^2 - \mu^2 + 1 = 9 - 4 + 1 = 6 = 2\gamma$. τὸ ἄρα $\gamma = 3$. διὸ τὸ μὲν $y^2 = -3 + \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13} - 3$, τὸ δὲ $\chi^2 = \frac{9}{\sqrt{13} - 2}$.

ΚΕΦ.