τῆς δὲ κατὰ τὸ Ι, τὸ ἐν Ο. ἐὰν οὖν τὰ κατὰ τὸ Ξ καὶ Ο ἀπὸ τοῦ ἐν τῷ Ν ἀφαιρεθῇ, λοιπὸν τὸ ἐν τῷ Κ τὸ κεφάλαιον ἔσαι τῆς κατὰ τὸ Ζ Σειρᾶς.

Ὁμοιοτρόπως δὲ καὶ τῶν ἐφεξῆς ὁμοίως συναθροισμένων Σειρῶν εὑρεθήσονται τὰ κεφάλαια.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 172. Ἔσω τὸ μὲν $\alpha = 1$, τὸ δὲ $\mu = 2$. οὐκοῦν ἡ μὲν κατὰ τὸ Λ Σειρὰ, εἰς τὴν κατὰ τὸ Π μεταβληθήσεται· ἡ δὲ κατὰ τὸ Γ, εἰς τὴν κατὰ τὸ Ρ· ἡ δὲ κατὰ τὸ Ζ, εἰς τὴν κατὰ τὸ Σ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α΄.

§. 173. Οἱ τῶν Ρ καὶ Σ Σειρῶν ἀριθμοὶ, καὶ οἱ ἐφεξῆς κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εὑρισκόμενοι **Γεωμετρικοὶ ἀριθμοὶ ἐσχηματισμένοι** καλοῦνται. (*)

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β΄.

§. 174. Ἰσέον, ὅτι τὰ ἄχρι τοῦ νῦν ἐπιλυθέντα προβλήματα, οἷον θέμεθλά εἰσι πάντων τῶν δι' ἀριθμῶν ἐπιλυομένων προβλημάτων.

ΚΕΦ. ΙΘ΄.

Ἀριθμητικῶν τινῶν προβλημάτων ἐπίλυσις.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄.

§. 175. Δοθέντων τοῦ πρώτου καὶ ἐσχάτου ὅρου καὶ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ὅρων τῆς Γεωμετρικῆς Σειρᾶς, τὸν τοῦ λόγου ἐκθέτην εὑρεῖν.

Ἔσω ὁ μὲν πρῶτος ὅρος $= \alpha$, ὁ δὲ δεύτερος $= \beta$, ὁ δὲ τῶν ὅρων ἀριθμὸς $= \nu$, ὁ δὲ ζητούμενος ἐκθέτης $= \chi$.

(*) Περὶ τούτων μέτιθι τὴν τοῦ Ἱερωνύμου Ῥινάλδου βίβλον, τὴν περὶ μαθηματικῶν γυμνασμάτων τὴν κατὰ τὸ Πατάβιον ἐκτυπωθεῖσαν.

Οὐκοῦν ὁ ἔσχατος τῆς Σειρᾶς ὅρος, εἴτουν τὸ $\beta = \chi^{\nu-1}\alpha$. (§. 164, 167.) τὸ ἄρα $\chi^{\nu-1} = \frac{\beta}{\alpha}$. διὸ $\chi = \frac{\sqrt[\nu-1]{\beta}}{\sqrt[\nu-1]{\alpha}}$.

Ἔσω τὸ μὲν $\alpha = 2$, τὸ δὲ $\beta = 486$, τὸ δὲ $\nu = 6$, ἔσται τὸ $\chi = \frac{\sqrt[5]{486}}{\sqrt[5]{2}} = \sqrt[5]{243} = 3$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'.

§. 176. Δοθέντων τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ὅρων, τοῦ ἐκθέτου τοῦ λόγου, καὶ τοῦ κεφαλαίου τῆς γεωμετρικῆς Σειρᾶς, εὑρεῖν τὸν πρῶτον ὅρον.

Ἔσω ὁ μὲν τῶν ὅρων ἀριθμὸς $= \nu$, ὁ δὲ ἐκθέτης $= \mu$, τὸ δὲ Κεφάλαιον $= \gamma$, ὁ δὲ ζητούμενος πρῶτος $= \chi$.

Ἔσται δὴ οὖν ὁ μὲν ἔσχατος ὅρος $= \mu^{\nu-1}\chi$, (§. 164) τὸ δὲ τῆς Σειρᾶς Κεφάλαιον, ἤτοι τὸ $\gamma = \frac{\mu . \mu^{\nu-1}\chi - \chi}{\mu - 1}$, (§. 168, 169.) ὅπερ ἐστὶ τὸ $\gamma = \frac{\mu^{\nu}\chi - \chi}{\mu - 1}$. διὸ τὸ $\mu^{\nu}\chi - \chi = \mu\gamma - \gamma$. ἐκ οὗ τὸ $\chi = \frac{\mu\gamma - \gamma}{\mu^{\nu} - 1}$.

Ἔσω τὸ μὲν $\mu = 3$, τὸ δὲ $\nu = 6$, τὸ δὲ $\gamma = 728$. τὸ ἄρα $\chi = \frac{2184 - 728}{729 - 1} = 2$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'.

§. 177. Δοθέντων τοῦ πρώτου καὶ τοῦ ἐσχάτου ὅρου, καὶ τοῦ ἐκθέτου τοῦ λόγου, τὸν ἀριθμὸν εὑρεῖν τῶν ὅρων.

Ἔσω ὁ μὲν πρῶτος $= \alpha$, ὁ δὲ ἔσχατος $= \beta$, ὁ δὲ ἐκθέτης $= \mu$, ὁ δὲ ζητούμενος τῶν ὅρων ἀριθμὸς $= \chi$.

Τοί-

Τοιγαρῦν ὁ ἔσχατος ὅρος, ἤτοι τὸ $\beta = \mu^{\chi-1}\,\alpha$. (§. 164.) διὸ δὴ καὶ ὁ λογάριθμος τῦ β ἴσος τῷ λογαρίθμῳ τῦ $\mu^{\chi-1}\,\alpha$. διὰ τῦ λ ῦν σημανθέντος τῦ λογαρίθμυ, ἔσεται ὁ $\lambda\beta = \chi - 1 . \lambda\mu + \lambda\alpha$, (*) ἤτοι ὁ $\lambda\beta = \chi\lambda\mu - \lambda\mu + \lambda\alpha$. διὸ τὸ $\chi\lambda\mu = \lambda\beta + \lambda\mu - \lambda\alpha$. τὸ ἄρα $\chi = \frac{\lambda\beta - \lambda\alpha}{\lambda\mu} + 1$.

Ἔστω τὸ μὲν $\alpha = 2$, τὸ δὲ $\beta = 486$, τὸ δὲ $\mu = 3$. ὅθεν ἔσεται ὁ μὲν $\lambda\beta = 2.6866363$, ὁ δὲ $\lambda\alpha = 0.3010300$, ὁ δὲ $\lambda\mu = 0.4371213$. διὸ ὁ $\frac{\lambda\beta - \lambda\alpha}{\lambda\mu} = \frac{2.3856063}{0.4371213} = 5$. τὸ ἄρα $\chi = 5 + 1 = 6$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'.

§. 178. Δοθέντων τῦ πρώτυ καὶ τῦ ἐσχάτυ καὶ τῦ κεφαλαίυ τῶν ὅρων τῆς γεωμετρικῆς Σειρᾶς, εὑρεῖν τὸν τῶν ὅρων ἀριθμὸν καὶ τὸν ἐκθέτην τῦ λόγυ.

Ἔστω ὁ μὲν πρῶτος $= \alpha$, ὁ δὲ ἔσχατος $= \beta$, τὸ δὲ κεφάλαιον $= \gamma$, ὁ δὲ τῶν ὅρων ἀριθμὸς $= \chi$, ὁ δὲ τῦ λόγυ ἐκθέτης $= y$.

Τὸ ἄρα κεφάλαιον $\gamma = \frac{\beta y - \alpha}{y - 1}$. διὸ τὸ $\gamma y - \gamma = \beta y - \alpha$. ὅθεν τὸ $y = \frac{\gamma - \alpha}{\gamma - \beta}$.

Ὁ δὲ ἔσχατος ὅρος, ἤτοι τὸ $\beta = y^{\chi-1}\,\alpha$, ληφθέντων δὲ τῶν λογαρίθμων, ἔσεται ὁ $\lambda\beta = \chi\lambda y - \lambda y + \lambda\alpha$, ἤτοι ὁ $\chi\lambda y = \lambda\beta + \lambda y - \lambda\alpha$. διὸ τὸ $\chi = \frac{\lambda\beta - \lambda\alpha}{\lambda y} + 1$.

Ἔστω τὸ μὲν $\alpha = 2$, τὸ δὲ $\beta = 486$, τὸ δὲ $\gamma = 728$. τὸ ἄρα $y = \frac{728 - 2}{728 - 486} = 3$.

Ἐπεὶ

(*) Ὅρα τὸ γ'. Θεώρ. καὶ τὸ μετ' αὐτὸ α'. Πόρισ. τῦ Δ'. βιβλ. τῆς ἡμετέρ. Ἀριθμητ.

Ἐπεὶ δὲ ὁ μὲν $\lambda\beta = 2.6866363$, ὁ δὲ $\lambda\alpha = 0.3010300$, ὁ δὲ $\lambda y = 0.4771212$, τὸ ἄρα $\chi = \frac{2.6866363 - 0.3010300}{0.4771212} + 1 = 5 + 1 = 6$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε'.

§. 179. Δοθέντων τοῦ γινομένου ἐκ τοῦ πρώτου καὶ τοῦ ἐσχάτου ὅρου, τοῦ ἐκθέτου τοῦ λόγου, καὶ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ὅρων τῆς Γεωμετρικῆς Σειρᾶς, εὑρεῖν τὸν πρῶτον καὶ ἔσχατον ὅρον.

Ἔστω τὸ μὲν ἐκ τοῦ πρώτου καὶ τοῦ ἐσχάτου γινόμενον $= \zeta$, ὁ δὲ τοῦ λόγου ἐκθέτης $= \mu$, ὁ δὲ τῶν ὅρων ἀριθμὸς $= \nu$, ὁ δὲ πρῶτος $= \chi$, ὁ δὲ ἔσχατος $= y$.

Οὐκοῦν ὁ μὲν ἔσχατος ὅρος, ἤτοι τὸ $y = \mu^{\nu-1}\chi$, τὸ δὲ γινόμενον, ἤτοι τὸ $\chi y = \zeta$. τὸ ἄρα $y = \frac{\zeta}{\chi}$. ἐν τῇ πρώτῃ οὖν ἐξισώσει τεθέντος ἀντὶ τοῦ y τοῦ ἴσου αὐτῷ, προκύψει ἤδη ἡ ἐξίσωσις· $\frac{\zeta}{\chi} = \mu^{\nu-1}\chi$. ἐξ ἧς γίνεται αὕτη, $\zeta = \mu^{\nu-1}\chi^2$. ἐξ ἧς τὸ $\chi = \frac{\sqrt{\zeta}}{\sqrt{\mu^{\nu-1}}}$.

Ἔστω τὸ μὲν $\zeta = 972$, τὸ δὲ $\mu = 3$, τὸ δὲ $\nu = 6$. οὐκοῦν τὸ μὲν $\chi = \frac{\sqrt{972}}{\sqrt{243}} = \sqrt{4} = 2$, τὸ δὲ $y = \frac{972}{2} = 486$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 180. Ἐν συνεχεῖ μὲν ἁρμονικῷ λόγῳ μεγέθη εἶναι λέγεται, ἐὰν ἡ ὑπεροχὴ τοῦ πρώτου καὶ τοῦ δευτέρου, πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου λόγον ἔχῃ ὃν τὸ πρῶτον, πρὸς τὸ τρίτον. οἷον, τὰ δε, 10, 16, 40. ἔστι γὰρ ὡς $6 : 24 :: 10 : 40$· ἐν διακεκριμένῳ δὲ, ἐὰν ἡ ὑπεροχὴ τοῦ πρώτου καὶ τοῦ δευτέρου, πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τοῦ τρίτου καὶ τοῦ τετάρτου λόγον ἔχῃ ὃν τὸ πρῶτον, πρὸς τὸ τέταρτον. οἷον τάδε, 6, 8, 12, 18. ἐστι γὰρ ὡς 2 . 6 :: 6 : 18· ἐν ὑπεναντίῳ δὲ ἁρμονικῷ, ἐὰν ἡ ὑπεροχὴ τοῦ πρώτου καὶ τοῦ δευτέρου, πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου λόγον ἔχῃ, ὃν ὁ τρίτος, πρὸς τὸν πρῶτον. οἷον τάδε, 3, 5, 6. ἐστι γὰρ ὡς 2 : 1 :: 6 : 3.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ϛ'.

§. 181. Δύω ἀριθμῶν δοθέντων, τρίτον ἁρμονικῶς ἀνάλογον εὑρεῖν.

Ἔστω ὁ μὲν πρῶτος $= \alpha$, ὁ δὲ δεύτερος $= \beta$, ὁ δὲ ζητούμενος τρίτος $= \chi$.

Οὐκοῦν ὡς $\beta - \alpha : \chi - \beta :: \alpha : \chi$. (§. 180.) τὸ ἄρα $\alpha\chi - \alpha\beta = \beta\chi - \alpha\chi$. διὸ τὸ $\chi = \frac{\alpha\beta}{2\alpha - \beta}$

Ἔστω τὸ μὲν $\alpha = 10$, τὸ δὲ $\beta = 16$. τὸ ἄρα $\chi = \frac{160}{20 - 16} = 40$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ζ'.

§. 182. Δύω ἀριθμῶν δοθέντων, μέσον ἁρμονικῶς ἀνάλογον εὑρεῖν.

Ἔστω ὁ μὲν πρῶτος $= \alpha$, ὁ δὲ τρίτος $= \beta$, ὁ δὲ ζητούμενος μέσος $= \chi$.

Ὡς ἄρα $\chi - \alpha . \beta - \chi :: \alpha : \beta$. τὸ ἄρα $\beta\chi - \alpha\beta = \alpha\beta - \alpha\chi$. διὸ τὸ $\chi = \frac{2\alpha\beta}{\beta + \alpha}$.

Ἔστω τὸ μὲν $\alpha = 10$, τὸ δὲ $\beta = 40$. οὐκοῦν τὸ $\chi = \frac{800}{50} = 16$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Η'.

§. 183. Τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων, τέταρτον εὑρεῖν ἁρμονικῶς ἀνάλογον.

Ἔστω

Ἔστω ὁ μὲν πρῶτος $=\alpha$, ὁ δὲ δεύτερος $=\beta$, ὁ δὲ τρίτος $=\gamma$, ὁ δὲ ζητούμενος τέταρτος $=\chi$.

Οὐκοῦν ὡς $\beta-\alpha : \chi-\gamma :: \alpha : \chi$. τὸ ἄρα $\beta\chi-\alpha\chi=\alpha\chi-\alpha\gamma$. διὸ τὸ $\chi=\frac{\alpha\gamma}{2\alpha-\beta}$.

Ἔστω τὸ μὲν $\alpha=6$, τὸ δὲ $\beta=8$, τὸ δὲ $\gamma=12$. τὸ ἄρα $\chi=\frac{72}{12-8}=18$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Θ'.

§. 184. Δύω ἀριθμῶν δοθέντων εὑρεῖν τρίτον ὑπεναντίως ἁρμονικόν.

Ἔστω ὁ μὲν πρῶτος $=\alpha$, ὁ δὲ δεύτερος $=\beta$, ὁ δὲ ζητούμενος τρίτος $=\chi$. οὐκοῦν ἔσται ὡς $\beta-\alpha : \chi-\beta :: \chi : \alpha$. (§. 180.) τὸ ἄρα $\chi^2-\beta\chi=\alpha\beta-\alpha^2$. πληρωθέντος δὲ τοῦ τετραγώνου, ἔσται τὸ $\chi^2-\beta\chi+\frac{\beta^2}{4}=\frac{\beta^2}{4}+\alpha\beta-\alpha^2$. (§. 120.) καὶ τῆς τετραγωνικῆς ἐξαχθείσης ῥίζης ἔσται τὸ $\chi-\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{\beta^2}{4}+\alpha\beta-\alpha^2}$. διὸ τὸ $\chi=\frac{\beta}{2}+\sqrt{\frac{\beta^2}{4}+\alpha\beta-\alpha^2}$.

Ἔστω τὸ μὲν $\alpha=3$, τὸ δὲ $\beta=5$. οὐκοῦν ἔσται τὸ $\chi=\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{25}{4}+15-9}=\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{49}{4}}=\frac{5}{2}+\frac{7}{2}=\frac{12}{2}=6$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ι'.

§. 185. Δύω ἀριθμῶν δοθέντων μέσον ὑπεναντίως ἁρμονικὸν εὑρεῖν.

Ἔστω ὁ μὲν πρῶτος $=\alpha$, ὁ δὲ τρίτος $=\beta$, ὁ δὲ ζητούμενος μέσος $=\chi$.

Ὡς ἄρα $\chi-\alpha : \beta-\chi :: \beta : \alpha$. τὸ ἄρα $\alpha\chi-\alpha^2=\beta^2-\beta\chi$. διὸ τὸ $\chi=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta}$.

Ἔστω

Ἔϛω τὸ μὲν $\alpha = 3$, τὸ δὲ $\beta = 6$. ἐκȣ̃ν τὸ $\chi = \frac{9+36}{3+6} = 5$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ. ΙΑ'.

§. 186. Δοθέντων τȣ̃ πρώτȣ καὶ τȣ̃ ἐσχάτȣ καὶ τῆς διαφορᾶς τῶν ὅρων τῆς ἀριθμητικῆς Σειρᾶς, εὑρεῖν τὸν τῶν ὅρων ἀριθμὸν, καὶ τὸ αὐτῆς κεφάλαιον.

Ἔϛω ὁ μὲν πρῶτος $= \alpha$, ὁ δὲ ἔσχατος $= \beta$, ἡ δὲ διαφορὰ δ, ὁ δὲ τῶν ὅρων ἀριθμὸς $= \chi$, τὸ δὲ τῆς Σειρᾶς κεφάλαιον $= y$.

Οὐκȣ̃ν ὁ μὲν ἔσχατος ὅρος, εἴτȣν τὸ $\beta = \alpha + \overline{\chi - 1}.\ \delta$ (§. 153, 154.) τὸ δὲ τῆς Σειρᾶς κεφάλαιον, ἤτοι τὸ $y = \alpha + \beta.\ \frac{\chi}{2}$. καὶ ἐκ μὲν τῆς πρώτης ἐξισώσεως εὑρίσκομεν τὸ $\chi = \frac{\beta + \delta - \alpha}{\delta}$· ἐκ δὲ τῆς δευτέρας, τεθέντος ἀντὶ τȣ̃ χ τȣ̃ ἴσȣ αὐτῷ, τὸ $y = \overline{\alpha + \beta}.\ \frac{\beta + \delta - \alpha}{2\delta}$.

Κείσθω τὸ μὲν $\alpha = 2$, τὸ δὲ $\beta = 17$, τὸ δὲ $\delta = 3$. ἐκȣ̃ν τὸ μὲν $\chi = \frac{17+3-2}{3} = 6$· τὸ δὲ $y = \overline{2+17}.\ \frac{17+3-2}{6} = 57$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΒ'.

§. 187. Δοθέντων τȣ̃ πρώτȣ καὶ τῆς διαφορᾶς τῶν ὅρων, καὶ τȣ̃ τῆς ἀριθμητικῆς Σειρᾶς κεφαλαίȣ, εὑρεῖν τὸν ἔσχατον, καὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν ὅρων.

Ἔϛω ὁ μὲν πρῶτος $= \alpha$, ἡ δὲ διαφορὰ $= \delta$, τὸ δὲ κεφάλαιον $= \gamma$, ὁ δὲ ἔσχατος $= y$, ὁ δὲ τῶν ὅρων ἀριθμὸς $= \chi$.

Τὸ

Τὸ μὲν ἄρα $y = \alpha + \overline{\chi - 1}.\ \delta$ (§. 153.) τὸ δὲ $\gamma = \alpha + y.\ \frac{\chi}{2}$. (§. 155.) καὶ ἐκ μὲν τῆς πρώτης ἐξισώσεως τὸ $y = \alpha + \delta\chi - \delta$ ἐκ δὲ τῆς δευτέρας, τὸ $y = \frac{2\gamma - \alpha\chi}{\chi}$. διὸ τὸ $\alpha + \delta\chi - \delta = \frac{2\gamma - \alpha\chi}{\chi}$. ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης προκύπτει ἤδε· $\chi^2 + \frac{2\alpha - \delta}{\chi}\,\chi = \frac{2\gamma}{\delta}$ τεθέντος δὲ τοῦ $\frac{2\alpha - \delta}{\delta} = 2\nu$, ἔσαι τὸ $\chi^2 + 2\nu\chi = \frac{2\gamma}{\delta}$. καὶ τοῦ τετραγώνου πληρωθέντος, ἔσεται τὸ $\chi^2 + 2\nu\chi + \nu^2 = \nu^2 + \frac{2\gamma}{\delta}$. ἐξαχθείσης δὲ τῆς ῥίζης, ἔσεται τὸ $\chi + \nu = \sqrt{\nu^2 + \frac{2\gamma}{\delta}}$. διὸ τὸ $\chi = \sqrt{\nu^2 + \frac{\gamma}{\delta}} - \nu$.

Ἔσω τὸ μὲν $\alpha = 2$, τὸ δὲ $\delta = 3$, τὸ δὲ $\gamma = 57$. Οὐκοῦν τὸ μὲν $\frac{2\alpha - \delta}{\delta} = \frac{4 - 3}{3} = \frac{1}{3} = 2\nu$. διὸ τὸ $\nu = \frac{1}{6}$, καὶ τὸ $\nu^2 = \frac{1}{36}$. τὸ ἄρα $\chi = \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{114}{3}} - \frac{1}{6} = \sqrt{\frac{1369}{36}} - \frac{1}{6} = \frac{37}{6} - \frac{1}{6} = \frac{36}{6} = 6$. διὸ τὸ $y = 2 + 18 - 3 = 17$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΓ'.

§. 188. Δοθέντων τοῦ πρώτου καὶ ἐσχάτου καὶ τοῦ κεφαλαίου τῶν ὅρων τῆς ἀριθμητικῆς Σειρᾶς, εὑρεῖν τὴν διαφορὰν καὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν ὅρων.

Ἔσω ὁ μὲν πρῶτος $= \alpha$, ὁ δὲ ἔσχατος $= \beta$, τὸ δὲ κεφάλαιον $= \gamma$, ἡ δὲ διαφορὰ $= y$, ὁ δὲ τῶν ὅρων ἀριθμὸς $= \chi$.

Τοιγαροῦν τὸ μὲν $\gamma = \overline{\alpha + \beta}.\ \frac{\chi}{2}$, τὸ δὲ $\beta = \alpha + \overline{\chi - 1}.\ y$. καὶ ἐκ μὲν τῆς πρώτης ἐξισώσεως εὑρίσκομεν τὸ $\chi = \frac{2\gamma}{\alpha + \beta}$.

$\frac{2\gamma}{\alpha+\beta}$. ἐκ δὲ τῆς δευτέρας, τεθέντος ἀντὶ τοῦ χ τοῦ ἴσου αὐτῷ, τὸ $y = \frac{\overline{\alpha+\beta}.\ \overline{\beta-\alpha}.}{2\gamma-\alpha-\beta}$

Κείσθω τὸ μὲν $\alpha = 2$, τὸ δὲ $\beta = 17$, τὸ δὲ $\gamma = 57$. οὐκοῦν τὸ μὲν $\chi = \frac{114}{19} = 6$· τὸ δὲ $y = \frac{\overline{2+17}.\ \overline{17-2}}{114-2-17} = \frac{285}{95} = 3$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΔ'.

§. 189. Δοθέντων τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ὅρων, τῆς διαφορᾶς, καὶ τοῦ τῆς ἀριθμητικῆς Σειρᾶς κεφαλαίου, εὑρεῖν τὸν πρῶτον καὶ ἔσχατον ὅρον.

Ἔστω ὁ μὲν τῶν ὅρων ἀριθμὸς $= \nu$, ἡ δὲ διαφορὰ $= \delta$, τὸ δὲ κεφάλαιον $= \gamma$, ὁ δὲ πρῶτος ὅρος $= \chi$, ὁ δὲ ἔσχατος $= y$. Οὐκοῦν τὸ μὲν $\gamma = \overline{\chi + y}.\ \frac{\nu}{2}$, τὸ δὲ $y = \chi + \overline{\nu - 1}.\ \delta = \chi + \nu\delta - \delta$. ἀντὶ οὖν τοῦ y τεθέντος ἐν τῇ πρώτῃ ἐξισώσει τοῦ ἴσου αὐτῷ, ἔσται τὸ $\gamma = \overline{\chi + \chi + \nu\delta - \delta}.\ \frac{\nu}{2}$, ὅθεν τὸ $2\gamma = 2\nu\chi + \nu^2\delta - \nu\delta$, ἤτοι τὸ $\chi = \frac{2\gamma + \nu\delta - \nu^2\delta}{2\nu}$.

Κείσθω τὸ μὲν $\nu = 6$, τὸ δὲ $\delta = 3$, τὸ δὲ $\gamma = 57$. οὐκοῦν τὸ μὲν $\chi = \frac{114 + 18 - 108}{12} = \frac{24}{12} = 2$, τὸ δὲ $y = 2 + \overline{6 - 1}.\ 3 = 17$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΕ'.

§. 190. Δοθέντων τοῦ ἐσχάτου καὶ τῆς διαφορᾶς καὶ τοῦ κεφαλαίου τῶν τῆς ἀριθμητικῆς Σειρᾶς ὅρων, εὑρεῖν τὸν πρῶτον, καὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν ὅρων.

Ἔςω ὁ μὲν ἔσχατος $=\beta$, ἡ δὲ διαφορὰ $=\delta$, τὸ δὲ κεφάλαιον $=\gamma$, ὁ δὲ πρῶτος $=\chi$, ὁ δὲ τῶν ὅρων ἀριθμὸς $=y$. Ὁ μὲν ἄρα $\beta=\chi+y-1.\delta$, τὸ δὲ $\gamma=\chi+\beta.\frac{y}{2}$. καὶ ἐκ μὲν τῆς πρώτης ἐξισώσεως εὑρίσκομεν τὸ $y=\frac{\beta-\chi+\delta}{\delta}$ ἐκ δὲ τῆς δευτέρας, τὸ $y=\frac{2\gamma}{\chi+\beta}$. διὸ τὸ $\frac{2\gamma}{\chi+\beta}=\frac{\beta-\chi+\delta}{\delta}$, ἤτοι τὸ $\chi^2-\delta\chi=\beta^2+\beta\delta-2\gamma\delta$. πληρωθέντος δὲ τοῦ τετραγώνου, ἔσεται τὸ $\chi^2-\delta\chi+\frac{\delta^2}{4}=\frac{\delta^2}{4}+\beta^2+\beta\delta-2\gamma\delta$. καὶ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἐξαχθείσης, ἔσεται τὸ $\chi-\frac{\delta}{2}=\sqrt{\frac{\delta^2}{4}+\beta^2+\beta\delta-2\gamma\delta}$, εἴτουν τὸ $\chi=\frac{\delta}{2}+\sqrt{\frac{\delta^2}{4}+\beta^2+\beta\delta-2\gamma\delta}$.

Κείσθω τὸ μὲν $\beta=17$, τὸ δὲ $\delta=3$, τὸ δὲ $\gamma=57$. τὸ μὲν ἄρα $\chi=\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{9}{4}+289+51-342}=\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2\cdot$ τὸ δὲ $y=\frac{114}{2+17}=6$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙϚ΄.

§. 191. Εὑρεῖν ἀριθμὸν, οὗ τὸ ἥμισυ σὺν τῷ τεταρτημορίῳ καὶ ἑβδομημορίῳ καὶ τρισὶ μονάσιν ἴσον ἐςὶ τῷ ὅλῳ. (*)

Ἔςω ὁ ζητούμενος χ.

Οὐκοῦν τὸ $\frac{\chi}{2}+\frac{\chi}{4}+\frac{\chi}{7}+3=\chi$. τὸ ἄρα $\chi=28$.

ΠΡΟ-

(*) Τοῦτό ἐςι τὸ ὑπὸ Διοφάντου προτεινόμενον (ἐν βιβλ. 5. τῶν Ἀριθμ. σελ. 262) ςιχουργικῶς.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΖ'.

§. 192. Ἑυρεῖν ἀριθμὸν, ȣ͂ τὸ πεμπτημόριον σὺν τῷ δωδεκατημορίῳ καὶ ὀκτημορίῳ καὶ εἰκοστημορίῳ καὶ τεταρτημορίῳ καὶ ἑβδομημορίῳ, καὶ μονάσι πεντακοσίαις ἴσον ᾗ τῷ ὅλῳ. (*)

Ἔστω ὁ ζητȣ́μενος χ.

Τὸ ἄρα $\frac{1}{5}\chi + \frac{1}{12}\chi + \frac{1}{8}\chi + \frac{1}{20}\chi + \frac{1}{4}\chi + \frac{1}{7}\chi +$ $500 = \chi$. διὸ τὸ $\chi = 3360$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΗ'.

§. 193. Ἑυρεῖν τρεῖς ἀριθμȣ̀ς, ὧν ὁ μὲν πρῶτος τὸν δεύτερον καὶ τὸ τριτημόριον περιέχει τȣ͂ τρίτȣ· ὁ δὲ δεύτερος, τὸν τρίτον καὶ τὸ τȣ͂ πρώτȣ τριτημόριον· ὁ δὲ τρίτος, μονάδας δέκα καὶ τὸ τȣ͂ πρώτȣ τρίτον. (**)

Ἔστω ὁ μὲν πρῶτος $= \chi$, ὁ δὲ δεύτερος $= y$, ὁ δὲ τρίτος $= Z$.

Τοιγαρȣ͂ν ὁ μὲν $\chi = y + \frac{1}{3}Z$, ὁ δὲ $y = Z + \frac{1}{3}\chi$, ὁ δὲ $Z = 10 + \frac{1}{3}\chi$. τεθήτω ȣ͂ν ἐν τῇ δευτέρᾳ ἐξισώσει ἀντὶ τȣ͂ Z τὸ ἴσον αὐτῷ. ἐκȣ͂ν ἔσαι τὸ $y = 10 + \frac{2}{3}\chi$. ἐὰν ȣ͂ν ἐν τῇ πρώτῃ ἐξισώσει ἀντὶ τȣ͂ y καὶ τȣ͂ Z τεθῶσι τὰ ἴσα αὐτοῖς, προκύψει ἡ ἐξίσωσις αὕτη· $\chi = 10 + \frac{2}{3}\chi + \frac{1}{3}.10 + \frac{1}{3}\chi$. ἐξ ἧς δῆλον ὅτι τὸ $\chi = 60$. τὸ μὲν ἄρα $Z = 10 + 20 = 30$· τὸ δὲ $y = 30 + 20 = 50$.

(*) Τȣ͂ Διοφάντ. αὐτ.

(**) Τȣ͂ αὐτȣ͂. αὐτ. ὁμοίως καὶ τὸ ἑξῆς. σελ. 277.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΘ΄.

§. 194. Εὑρεῖν δύω ἀριθμὲς, ὧν ὁ πρῶτος δέκα μονάδας παρὰ τῦ δευτέρυ λαβὼν, τριπλάσιος αὐτῦ γίνεται· ὁ δὲ δεύτερος τὰς αὐτὰς παρὰ τῦ πρώτυ λαβὼν, πεντάπλυς τῦ πρώτυ.

Ἔςω ὁ μὲν πρῶτος $= \chi$, ὁ δὲ δεύτερος $= y$.

Οὐκῦν ὁ μὲν πρῶτος μετὰ τὴν λῆψιν ἴσος ἐςὶ τῷ $\chi + 10$· ὁ δὲ δεύτερος μετὰ τὴν δόσιν, τῷ $y - 10$. ἐπεὶ δὲ ὁ πρῶτος μετὰ τὴν λῆψιν τριπλάσιος γίνεται τῦ δευτέρυ μετὰ τὴν δόσιν, ἔσεται τὸ $\chi + 10 = 3y - 30$. πάλιν ὁ μὲν δεύτερος μετὰ τὴν λῆψιν ἐςὶν ὁ $y + 10$, ὁ δὲ πρῶτος μετὰ τὴν δόσιν, ὁ $\chi - 10$. ϗ ἐπεὶ ὁ δεύτερος μετὰ τὴν λῆψιν πεντάπλυς γίνεται τῦ πρώτυ μετὰ τὴν δόσιν, ἔσεται δὴ ἄρα τὸ $y + 10 = 5\chi - 50$. ϗαὶ ἐκ μὲν τῆς πρώτης ἐξισώσεως εὑρίσκομεν τὸ $\chi = 3y - 40$· ἐκ δὲ τῆς δευτέρας, τὸ $\chi = \frac{y + 60}{5}$. διὸ τὸ $3y - 40 = \frac{y + 60}{5}$. τὸ ἄρα $y = \frac{260}{14} = 18 + \frac{4}{7}$· τὸ δὲ $\chi = 3 \cdot \overline{18 + \frac{4}{7}} - 40 = 15 + \frac{5}{7}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Κ΄.

§. 195. Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμὲς, ὅπως σὺν δύω λαμβανόμενοι τῦ λοιπῦ ὑπερέχωσι τῷ ἐπιταχθέντι ἀριθμῷ.

Ἔςω ὁ μὲν πρῶτος χ, ὁ δὲ δεύτερος y, ὁ δὲ τρίτος z. ἐπιτετάχθω δὲ τὸν μὲν πρῶτον ϗαὶ τὸν δεύτερον τῦ τρίτυ ὑπερέχειν μονάδας 20· τὸν δὲ δεύτερον ϗαὶ τὸν τρίτον τῦ πρώτυ, 30· τὸν δὲ τρίτον ϗαὶ τὸν πρῶτον τῦ δευτέρυ, 40. Οὐκῦν τὸ μὲν $\chi + y = z + 20$, τὸ δὲ $y + z = \chi + 30$, τὸ δὲ $\chi + z = y + 40$. ϗ ἐκ μὲν τῆς πρώτης ἐξισώσεως τὸ $z = \chi + y - 20$·

20· ἐκ δὲ τῆς δευτέρας, τὸ $Z = \chi + 30 - y$. διὸ τὸ $\chi + y - 20 = \chi + 30 - y$. τὸ ἄρα $y = \frac{50}{2} = 25$. τούτου οὖν τεθέντος ἐν τῇ πρώτῃ ἐξισώσει, ἔσται τὸ $\chi + 25 = Z + 20$, ἤτουν τὸ $Z = \chi + 5$. τεθήτω οὖν ἐν τῇ τρίτῃ ἐξισώσει ἀντὶ τοῦ y καὶ τοῦ Z τὰ εὑρεθέντα αὐτοῖς ἴσα. οὐκοῦν ἔσται τὸ $\chi + \chi + 5 = 25 + 40$, ἤτοι τὸ $\chi = \frac{60}{2} = 30$. διὸ τὸ $Z = 35$. τοιγαροῦν ὁ μὲν $\chi = 30$, ὁ δὲ $y = 25$, ὁ δὲ $Z = 35$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΚΑ'.

§. 196. Εὑρεῖν τέσσαρας ἀριθμοὺς, ὅπως σὺν τρεῖς συντιθέμενοι ποιῶσι τοὺς ἐπιταχθέντας ἀριθμούς.

Ἔστω ὁ μὲν πρῶτος $= \chi$, ὁ δὲ δεύτερος $= y$, ὁ δὲ τρίτος $= Z$, ὁ δὲ τέταρτος $= \Omega$. ἐπιτετάχθω δὲ τοὺς μὲν ἀπὸ τοῦ πρώτου τρεῖς κατὰ τὸ ἑξῆς συντεθέντας ποιεῖν μονάδας 14· τοὺς δ' ἀπὸ τοῦ δευτέρου τρεῖς, 21· τοὺς δ' ἀπὸ τοῦ τρίτου τρεῖς, 20· τοὺς δ' ἀπὸ τοῦ τετάρτου τρεῖς, 17.

Τοιγαροῦν οἱ μὲν $\chi + y + Z = 14$· οἱ δὲ $y + Z + \Omega = 21$· οἱ δὲ $Z + \chi + \Omega = 20$· οἱ δὲ $\Omega + \chi + y = 17$. ἐκ μὲν οὖν τῆς πρώτης ἐξισώσεως τὸ $\chi + y = 14 - Z$· ἐκ δὲ τῆς ἐσχάτης, τὸ $\chi + y = 17 - \Omega$. διὸ τὸ $14 - Z = 17 - \Omega$. τὸ ἄρα $Z = \Omega - 3$. πάλιν ἐκ μὲν τῆς δευτέρας ἐξισώσεως τὸ $\chi + \Omega = 20 - Z$, ἐκ δὲ τῆς τρίτης τὸ $\chi + \Omega = 17 - y$. διὸ τὸ $17 - y = 20 - Z$. τὸ ἄρα $Z - 3 = y$. ἀλλὰ τὸ Z εὕρηται ἴσον τῷ $\Omega - 3$ τὸ ἄρα $\Omega - 3 - 3 = y$, ἤτοι $\Omega - 6 = y$. τεθήτω οὖν ἐν τῇ δευτέρᾳ ἐξισώσει ἀντὶ τῶν y καὶ Z τὰ εὑρεθέντα αὐτοῖς ἴσα. καὶ ἔσται δὴ τὸ $\Omega - 6 + \Omega - 3 + \Omega = 21$, ἤτουν τὸ $3\Omega = 30$. τὸ ἄρα $\Omega = 10$. διὸ τὸ μὲν