συγκροτηθεισῶν τῶν δευσῶν ἐξισώσεων, ἐξίσωσις προκύψει, ἐν ᾗ ὁ μέγισος τοῦ ἀγνώςου φ ἐκθέτης ἔσεται $\frac{\nu-1}{2}$, ἐὰν τὸ ν περιττὸν ἐμφαίνῃ ἀριθμὸν, $\frac{\nu}{2}$ δὲ ἐὰν ἄρτιον. ὅθεν αἱ τοῦ φ ῥίζαι εὑρεθήσονται ἤτοι ἴσαι τὸν ἀριθμὸν τοῦ $\frac{\nu-1}{2}$, ἢ τοῦ $\frac{\nu}{2}$. ἑκάςης δὲ τούτων ἐν τῇ κατὰ τὸ Ω ἐκθέσει τεθείσης ἀντὶ τοῦ φ, αἱ τοῦ χ ῥίζαι εὑρεθήσονται ἰσάριθμοι τῷ ν.

## ΚΕΦ. ΙϚ.

## Περὶ προβλημάτων.

### ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Αʹ.

§. 143. Δύω τὰ τῶν προβλημάτων εἴδη· **Ἀόριςα**, τὰ ἀπειροαρίθμους ἐπιδεχόμενα ἐπιλύσεις· καὶ **Ὡρισμένα**, ὧν ὁ τῶν ἐπιλύσεων ἀριθμὸς ὡρισμένος ἐςί.

### ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 144. Προκείσθω δεῖν εὑρεῖν δύω μεγέθη, λόγον ἔχοντα πρὸς ἄλληλα, ὃν τὸ α : β. Ἔςω δὴ οὖν τὸ μὲν τῶν μεγεθῶν, χ, τὸ δὲ, y. οὐκοῦν ἔςαι ὡς α : β :: χ : y. ἐκκείσθωσαν οὖν δύω εὐθεῖαι, (μ) αἱ ΑΒ, ΒΓ, γωνίαν τυχοῦσαν τὴν ΑΒΓ περιέχουσαι· καὶ ἔςω ἡ μὲν ΑΒ = α, ἡ δὲ ΒΓ = β, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΓ. ἐὰν οὖν ληφθῇ ἡ ΑΔ = χ, ἔςαι ἡ ΔΕ, ἡ ἀπὸ τοῦ Δ σημείου ἀγομένη παράλληλος τῇ ΒΓ, ἴση τῷ y. ἔςι γὰρ ὡς ΑΒ : ΒΓ :: ΑΔ : ΔΕ. πάλιν ληφθείσης τῆς ΑΖ = χ, ἔςαι ἡ ΖΗ, ἡ τῇ ΒΓ παράλληλος, ἴση τῷ y. ὁμοίως ἐκβληθεισῶν κατὰ τὸ συνεχὲς τῶν ΑΒ, ΑΓ, καὶ ληφθεί-



(μ) Πιν. XIX. σχ. 1.

θείσης τῆς ΛΘ $= \chi$, ἔςαι ἡ ΘΙ, ἡ τῇ ΒΓ παράλληλος ἴση τῷ $y$. ἐπεὶ ἂν ἀπειροαρίθμους εὐθείας ἔνεςι λαβεῖν ἴσας τῷ $\chi$, ἀπειροάριθμοι εὑρεθήσονται εὐθεῖαι ἴσαι τῷ $y$. ἐξ ἂ δῆλον, ὅτι τὸ προκείμενον πρόβλημα ἀόριςον ὄν, ἀπειροαρίθμους ἐπιδέχεται τὰς ἐπιλύσεις. τὸ αὐτὸ δὲ καὶ δι' ἀριθμῶν δείκνυται. ἐπεὶ γὰρ ὡς $\alpha : \beta :: \chi : y$, ἔςαι τὸ $\alpha y = \beta\chi$. διὸ τὸ $y = \frac{\beta\chi}{\alpha}$. ἔςω τὸ μὲν $\alpha = 1$, τὸ δὲ $\beta = 2$. τὸ ἄρα $y = \frac{2.\chi}{1}$. ἐὰν ἂν τὸ $\chi = 2$, ἔσεται τὸ $y = 4$· ἐὰν δὲ τὸ $\chi = 3$, τὸ $y = 6$· ἐὰν δὲ τὸ $\chi = 4$, τὸ $y = 8$.

Προκείσθω δὲ διχοτομῆσαι δεῖν τὸ τόξον, ἂτινος χορδὴ ἡ ΑΒ. (σχ. 2.) ἐπεὶ ἂν ἡ ΑΒ χορδή ἐςιν ἑκατέρου τῶν ΑΓΒ, ΑΔΒ τόξων, ζητουμένης τῆς ΒΓ, τῆς κατὰ τὸ μέσον σημεῖον Γ τὸ τόξον ΑΓΒ τεμνούσης, ἐξίσωσις δευτέρου βαθμοῦ προκύπτει, δι' ἧς ὀ μόνον ἡ ΒΓ εὑρίσκεται, ἀλλὰ καὶ ἡ ΒΔ, ἡ τὸ ΑΔΒ τόξον διοχοτομοῦσα κατὰ τὸ Δ. ἔςω μὲν γὰρ ἡ ΓΔ, ἡ διὰ τοῦ Κέντρου Κ πρὸς ὀρθὰς τῇ χορδῇ ΑΒ, ἴση $2\alpha$, ἡ δὲ ΕΒ $= \beta$, ἡ δὲ ΒΓ $= \chi$. καὶ ἐπεὶ ὡς ΔΓ : ΓΒ :: ΓΒ : ΓΕ, εἴτουν ὡς $2\alpha : \chi :: \chi :$ ΓΕ, ἔσεται ἡ ΓΕ $= \frac{\chi^2}{2\alpha}$. ἐπεὶ δὲ τὸ $\overline{\text{ΓΒ}}^2 = \overline{\text{ΓΕ}}^2 + \overline{\text{ΒΕ}}^2$, προκύπτει ἄρα ἡ ἐν τῷ Α ἐξίσωσις, (ν) ἐξ ἧς ἡ ἐν τῷ Β, καὶ πληρωθέντος τοῦ τετραγώνου, ἡ ἐν τῷ Γ, καὶ τῆς τετραγωνικῆς ἐξαχθείσης ῥίζης, ἡ ἐν τῷ Δ. καὶ πάλιν τῆς τετραγωνικῆς ἐξαχθείσης ῥίζης, ἡ ἐν τῷ Ε. ἐξ ἧς αἱ ἐν τῷ Ζ καὶ Η. καὶ τὰ μὲν ἴσα τῷ $\chi$, τὰ ἐν τῷ Ζ, τὴν μείζονα ἐμφαίνουσι, τὴν ΒΔ· τὰ δὲ ἐν τῷ Η, τὴν ἐλάσσονα, τὴν ΒΓ. εἰλήφθω γὰρ (ξ) ἡ ΚΜ $=$ ΕΒ $= \beta$. οὐκοῦν ἡ μὲν ΓΜ $= \alpha + \beta$, ἡ δὲ ΜΔ $= \alpha - \beta$. ἀχθείσης ἂν ἀπὸ τοῦ

(ν) Πίν. ΧΧ. (ξ) Πίν. ΧΙΧ.

τȣ̃ Μ τῆς ΜΛ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΓΔ, ἐπεὶ ὡς $ΓΜ : ΜΛ :: ΜΛ : ΜΔ$, ἔσεται ὡς $\alpha+\beta : ΜΛ :: ΜΛ : \alpha-\beta$. διὸ τὸ μὲν $\overline{ΜΛ}^2 = \alpha^2-\beta^2$, ἡ δὲ $ΜΛ = \sqrt{\alpha^2-\beta^2}$. ἡ δὲ διπλασία τῆς ΜΛ, εἴτȣν ἡ $ΛΝ = 2\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$. ἐκβληθείσης ȣ̂ν ἑκατέρωθεν τῆς ΓΔ, καὶ ληφθείσης τῆς μὲν $ΓΘ = ΓΚ = \alpha$, τῆς δὲ $ΔΖ = ΛΝ = 2\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$, ἀναγραφέντος ἐπὶ τῆς ΘΖ τȣ̃ ΘΞΖ ἡμικυκλίȣ, καὶ ἀχθείσης ἀπὸ τȣ̃ Γ τῆς ΓΞ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΘΖ, ἔσεται ὡς $ΘΓ : ΓΞ :: ΓΞ : ΓΖ$, ἤτοι ὡς $\alpha : ΓΞ :: ΓΞ : 2\alpha+2\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$. διὸ τὸ μὲν $\overline{ΓΞ}^2 = \alpha . 2\alpha + 2 . \sqrt{\alpha^2-\beta^2}$, ἡ δὲ $ΓΞ = \sqrt{\alpha . 2\alpha + 2\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}$. ἐξ ȣ̂ δῆλον ὅτι ἡ $ΓΞ = \chi$. ἐὰν δὲ ληφθῇ ἡ $ΔΙ = ΝΛ = 2\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$, ἔσεται ἡ $ΓΙ = 2\alpha - 2\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$. διὸ ἀναγραφέντος ἐπὶ τῆς ΘΙ τȣ̃ ΘΟΙ ἡμικυκλίȣ, ἔσεται ὡς $ΘΓ : ΓΟ :: ΓΟ : ΓΙ$, εἴτȣν ὡς $\alpha : ΓΟ :: ΓΟ : 2\alpha - 2\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$. διὸ τὸ μὲν $\overline{ΓΟ}^2 = \alpha . 2\alpha - 2 . \sqrt{\alpha^2-\beta^2}$, ἡ δὲ $ΓΟ = \sqrt{\alpha . 2\alpha - 2\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}$. ἐξ ȣ̂ δῆλον, ὅτι καὶ ἡ $ΓΟ = \chi$, ἐμφαίνȣσα τὴν ΒΓ. ἐὰν ȣ̂ν τῷ κύκλῳ ἐφαρμοσθῇ ἡ $ΒΔ = ΓΞ$, διχοτομήσει τὸ ΑΔΒ τόξον κατὰ τὸ Δ· ἐὰν δὲ ἁρμοσθῇ ἡ $ΒΓ = ΓΟ$, διχοτομήσει τὸ ΑΓΒ κατὰ τὸ Γ. ἐκ τȣ́των δὲ φανερὸν, ὅτι ὡρισμένον ὂν τὸ πρόβλημα, δύω ἔχεν ἐπιλύσεις μόνον.

### ΣΥΝΕΠΕΙΑ Αʹ.

§. 145. Ὡρισμένȣ μὲν ἄρα ὄντος τȣ̃ προβλήματος, τόσαι συνίςανται ἐξισώσεις, ὅσα τὰ ἄγνωςα· ἀορίςȣ δὲ, παρὰ μίαν τόσαι. ἑνὸς δὲ τῶν ἀγνώςων ἐν τοῖς ἀορίςοις καθ' ἀρέσκειαν ληφθέντος, τὰ λοιπὰ εὑρίσκονται.

### ΣΥΝΕΠΕΙΑ Βʹ.

§. 146. Ἡ ἐξίσωσεις ἄρα ἐμφαίνει ἐν τοῖς ὡρισμένοις προβλήμασιν ὅσα εἰσὶ τὰ διὰ τῆς τȣ̃ προβλήμαματος ἐπιλύσεως εὑρισκόμενα ἴσα τῷ ἀγνώςῳ. τόσα γάρ εἰσιν, ὅσαι αἱ μονάδες ἐν τῷ μεγίςῳ τȣ ἀγνώςȣ ἐκθέτῃ. ὅπερ ἐςὶν, ἑνὶ μὲν, ἐὰν τȣ πρώτȣ βαθμȣ ᾖ τὸ πρόβλημα· δυσὶ δὲ, ἐὰν τȣ δευτέρȣ· τρισὶν, ἐὰν τȣ τρίτȣ, καὶ ἑφεξῆς ὁμοίως.

## ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'.

§. 147. Ἡ ἐξίσωσις ἐμφαίνει καὶ τὸ πότερον, δυνατόν ἐςιν ἐπιλύσαι τὸ πρόβλημα, ἢ ἀδύνατον· καὶ τὸ πόσαι μὲν αἱ πραγματικαὶ ἐπιλύσεις αὐτȣ, πόσαι δὲ αἱ ἐπίπλαςοι, τȣτέςι πόσα τὰ ἴσα τῷ ἀγνώςῳ τὰ ὑπαρκτικὰ καὶ πραγματιώδη, πόσα δὲ τὰ ἀνύπαρκτα καὶ ἐπίπλαςα. ἐὰν μὲν γὰρ τὸ ἄγνωςον χ διὰ τῆς ἐξισώσεως ἴσον εὑρεθῇ ἐπιπλάςοις ἐκθέσεσιν, (ὅρα §. 44.) ἀνέφικτος ἡ τȣ προβλήματος ἐπίλυσις· ἐὰν δὲ, τισὶ μὲν ἐπιπλάςοις, τισὶ δὲ πραγματικαῖς, τόσαι μόνον αἱ τȣ προβλήματος ἐπιλύσεις, ὅσαι αἱ πραγματικαὶ ἐκθέσεις, αἱ αὐτῷ ἐξισȣμεναι τῷ ἀγνώςῳ.

## ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 148. Ἔςω Ἔλλειψις ἡ ΑΨΕΓ. (σχ. 3.) καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Χ, τῷ ὕπερθεν τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΑΓ, διαμέτρῳ δὲ ἐλάσσονι τῆς ἡμισείας αὐτῆς γεγράφθω κύκλος ὁ ΡΨΕΣ, τέμνων τὴν Ἔλλειψιν κατὰ τὰ Ψ, Ρ, Σ, Ε σημεῖα. προκειμένȣ ȣ̓ν δεῖν εὑρεῖν τὴν ἀπὸ τῆς κοινῆς τομῆς τȣ κύκλȣ καὶ τῆς Ἐλλείψεως ἀγομένην τῇ ΑΓ κάθετον, εἴτȣν τὴν ΨΚ, τȣ τετάρτȣ βαθμȣ ἔσεται ἡ προκύπτȣσα ἐξίσωσις. καὶ γὰρ τέσσαρας ἐνὸν εἶναι τὰς ἀπὸ τῆς κοινῆς τῶν καμπύλων διατομῆς ἀγομένας τῇ ΑΓ καθέτȣς. μίαν δὲ ζητȣ̃ντες, καὶ τὰς λοιπὰς διὰ τῆς ἐξισώσεως εὑρίσκομεν. ἐὰν δὲ ἡ τȣ κύκ-

κύκλȣ ἡμιδιάμετρος, τοσȣ̃τον μικροτέρα τῆς προτέρας ληφθῇ, ὥςε τὴν ἑαυτȣ̃ περιφέρειαν, τὴν ἐπὶ τὰ Ρ καὶ Σ μέρη τῆς Ἐλλείψεως, ἐντὸς πεσȣ̃σαν, μηδόλως αὐτὴν διατέμνειν, αἱ δύω κάθετοι ΡΠ, ΣΖ ἐκλείψεσιν, ὡσαύτως δὲ καὶ αἱ ΨΚ, ΓΦ, ἐὰν ἡ τȣ̃ κύκλȣ ἡμιδιάμετρος ἔτι μᾶλλον μικροτέρα ληφθῇ, καὶ ὅλος ὁ κύκλος ἐντὸς χωρήσῃ τῆς Ἐλλείψεως. ἐκ τȣ́των ἓν δῆλον, ὅτι ἐνδέχεται τὰ ἴσα τῷ ἀγνώςῳ ἢ ἅπαντα πραγματιώδη εἶναι, ἢ ἅπαντα ἐπίπλαςα, ἢ δύω μὲν πραγματιώδη, δύω δὲ ἐπίπλαςα. ὅπως δὲ ἕκαςα ἔχει, ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως ἐμφαίνεται. καὶ τȣ̃το δὲ ἐκ τῶν εἰρημένων δῆλον, ὅτι ἀρτιοάριθμα, καὶ ȣ̓δέποτε περιττοάριθμά εἰσι τὰ ἴσα τῷ ἀγνώςῳ ἐπίπλαςα.

## ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Γʹ.

§. 149. Ἐὰν πολλὰ τὰ διὰ τȣ̃ αὐτȣ̃ προβλήματος ζητȣ́μενα, πολλὰ ἔσονται καὶ τὰ ἄγνωςα. συγκροτηθεισῶν δὲ τῶν ἐξισώσεων, ὡς ἐν §. 146. διατέτακται, ἐκ τῶν πολλῶν μίαν δεῖ συςῆσαι, ἓν μόνον περιέχȣσαν ἄγνωςον. κανόνας δὲ διορίσαι περὶ τȣ̃ πῶς τȣ̃το γίνεται ȣ̓κ εὐμήχανον. ἕκαςον γὰρ τῶν προβλημάτων ἰδίας ἔχον συνθήκας, ἰδιαζȣ́σας ἔχει καὶ τὰς ὑπὲρ τῆς ἐπιλύσεως αὐτȣ̃ γινομένας ἐξισώσεις. διὸ τȣ́τῳ μόνῳ χρὴ ςοιχεῖν τῷ κανόνι, τῷ διὰ τῶν συςαθεισῶν ἐξισώσεων εὑρεῖν τὰ ἴσα τοῖς ἀγνώςοις, διὰ γνωςῶν καὶ ἀγνώςων ἐμφαινόμενα, τῇ τȣ́των δὲ παραθέσει ἐξισώσεις συνιςᾷν, ἕως ȣ̃ προκύψῃ ἡ ἓν μόνον ἄγνωςον περιέχȣσα ἐξίσωσις. ἡ τοιαύτη δὲ εὕρεσις ἀπὸ τῆς τȣ̃ ἐπιλύοντος τὸ πρόβλημα ἀγχινοίας ἤρτηται, καθάπερ καὶ ἡ τῶν ἐξισώσεων σύςασις. καὶ γὰρ ἄλλοτε μὲν διὰ πολλαπλασιασμȣ̃ πορίζεται, ἄλλοτε δὲ διὰ διαιρέσεως, καὶ ἄλλοτε διὰ προσθήκης ἢ ἀφαιρέσεως, ἐνίοτε δὲ διὰ τῆς τῶν ῥιζῶν ἐξαγωγῆς, ἢ διὰ τῆς

τῆς τῶν ἐκθέσεων ἐπὶ τὰς Δυνάμεις αὐτῶν ἐπάρσεως. ἑνὸς δὲ τῶν ἀγνώστων εὑρεθέντος διὰ τῆς αὐτὸ μόνον ἄγνωστον περιεχούσης ἐξισώσεως, τὰ λοιπὰ εὑρίσκονται, τιθεμένων ἐν ταῖς ἄλλαις ἐξισώσεσι τῶν γνωστῶν τῶν ἴσων τῷ εὑρεθέντι ἀγνώστῳ.

## ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 150. Προκείσθω δεῖν εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς συνεχῶς ἀναλόγους, ὧν τὸ μὲν ἑαυτῶν κεφάλαιον ἴσον 21, τὸ δὲ ἀπὸ τῶν τετραγώνων αὐτῶν, 189. ἔστωσαν οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ οἱ $\chi$, $y$, $\Omega$. οὐκοῦν ἐκ μὲν τῆς πρώτης συνθήκης ἡ ἐν τῷ Θ (o) ἀναλογία γίνεται, ἐξ ἧς ἡ ἐν τῷ Ι ἐξίσωσις· ἐκ δὲ τῆς δευτέρας, ἡ ἐν τῷ Κ· ἐκ δὲ τῆς τρίτης, ἡ ἐν τῷ Λ. ἐπαρθήτω ἐπὶ τὴν δευτέραν δύναμιν ἡ ἐν τῷ Κ ἐξίσωσις, καὶ ἐν τῇ κατὰ τὸ Μ προκυπτούσῃ ἐξισώσει, τῇ ἴσῃ τῇ κατὰ τὸ Ν, ἀντὶ μὲν τῶν $\chi^2+y^2+\Omega^2$ τεθήτω τὸ ἴσον αὐτοῖς, τὸ ἐν τῷ Λ· ἀντὶ δὲ τοῦ $\chi+\Omega$, τὸ ἴσον αὐτῷ, τὸ ἐν τῷ Ξ, ὃ γέγονεν ἐκ τῆς ἐν τῷ Κ ἐξισώσεως, ἀντὶ δὲ τοῦ $2\chi\Omega$ τὸ ἴσον αὐτῷ, τὸ κατὰ τὸ Ο, τὸ ἐκ τῆς ἐν τῷ Ι ἐξισώσεως γεγονός. οὐκοῦν προκύψει ἡ μόνον ἓν ἄγνωστον περιέχουσα ἐξίσωσις, ἡ κατὰ τὸ Π, ἐξ ἧς ἡ ἐν τῷ Ρ γίνεται. ἐξ αὐτῆς δὲ ἡ ἐν τῷ Σ, ἐξ ἧς δῆλον ὅτι τὸ $y=6$. διὸ τὸ $y^2=36$. ἐὰν οὖν ἐν τῇ κατὰ τὸ Ι ἐξισώσει ἀντὶ τοῦ $y^2$ ὁ 36 τεθῇ, προκύψει ἡ ἐν τῷ Τ ἐξίσωσις, ἐξ ἧς ἡ ἐν τῷ Υ γίνεται· τεθέντων οὖν ἐν τῇ κατὰ τὸ Κ ἐξισώσει ἀντὶ τοῦ $y$ καὶ $\Omega$ τῶν εὑρεθέντων αὐτοῖς ἴσων, ἡ ἐν τῷ Φ ἐξίσωσις γίνεται, ἐξ ἧς ἡ ἐν τῷ Χ· καὶ ἐξ αὐτῆς, τοῦ τετραγώνου πληρωθέντος, ἡ ἐν τῷ Ψ· ἐξ ἧς γίνεται ἡ ἐν τῷ Ω, τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἑκατέρωθεν ἐξαχθείσης. διὸ τὸ $\chi=12$. ἐν τῇ αὐτῇ οὖν

(o) Πίν. XX.

ἐν τῇ κατὰ τὸ K ἐξισώσει, ἀντὶ τῶν $\chi$ καὶ $y$ τεθέντων τῶν 12 καὶ 6, ἡ ἐν τῷ Λ γίνεται ἐξίσωσις· ἐξ ἧς δῆλον, ὅτι τὸ $\Omega = 3$, ὡς ἐν τῷ C ὁρᾶται. τὸ ἐπιλυθὲν τοῦτο πρόβλημα ὡρισμένον ἐστί. διὸ καὶ τόσαι ὑπὲρ τῆς ἐπιλύσεως αὐτοῦ γεγόνασιν ἐξισώσεις, ὅσα καὶ ἄγνωστα. Προκείσθω δὲ καὶ τόδε τὸ πρόβλημα· Πέρσαι καὶ Ἄραβες καὶ Αἰγύπτιοι τὸν ἀριθμὸν 30 ἐν βαλανείῳ εἰσελθόντες ἐλούθησαν· καὶ ἕκαστος μὲν τῶν πρώτων διπλάσια ἑκάστου τῶν δευτέρων ἔτισεν, ὁμοίως καὶ ἕκαστος τῶν δευτέρων ἑνὸς ἑκάστου τῶν τρίτων. ἦσαν δὲ ἅπαντα τὰ ὑπ' αὐτῶν καταβληθέντα νομίσματα τοῖς 40 ἰσάριθμα. ζητεῖται οὖν ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐξ ἑκάστου τούτων τῶν γενῶν λουθέντων ἀνθρώπων. Ἔστω δὴ ὁ μὲν τῶν Περσῶν $\chi$, ὁ δὲ τῶν Ἀράβων $y$, ὁ δὲ τῶν Αἰγυπτίων $\Omega$. οὐκοῦν ἐκ μὲν τῆς πρώτης συνθήκης, ἡ ἐν τῷ Α (π) ἐξίσωσις γίνεται. ἐπεὶ δὲ κατὰ τὴν δευτέραν συνθήκην ἕκαστος τῶν Περσῶν 2 κατέβαλε νομίσματα, πάντες ἄρα $2\chi$ κατέθεντο. 1 δὲ ἑκάστου τῶν Ἀράβων καταβαλόντος, ἅπαντα τὰ ὑπ' αὐτῶν κατατεθέντα νομίσματα τῷ $y$ ἰσάριθμα. πάντες δὲ οἱ Αἰγύπτιοι δόντες τὸ ἥμισυ τοῦ ὑπὸ τῶν Ἀράβων δοθέντος, $\frac{1}{2}\Omega$ δεδώκασιν. ἐκ τούτων οὖν ἡ ἐν τῷ Β προκύπτει ἐξίσωσις. καὶ ἐκ μὲν τῆς ἐν τῷ Α ἡ ἐν τῷ Γ γίνεται, ἐκ δὲ τῆς ἐν τῷ Β ἡ ἐν τῷ Δ. ἐξ ἑκατέρας δὲ τούτων ἡ ἐν τῷ Ε, ἐξ ἧς ἡ ἐν τῷ Ζ. κείσθω οὖν τὸ $\Omega = 2$. τὸ μὲν ἄρα $y$ ἴσον τοῖς ἐν τῷ Η, τὸ δὲ $\chi$, διὰ τὴν ἐν τῷ Α ἐξίσωσιν, τοῖς ἐν τῷ Θ. κείσθω τὸ $\Omega = 4$, οὐκοῦν τὸ μὲν $y$ ἴσον τοῖς ἐν τῷ Ι, τὸ δὲ $\chi$ τοῖς ἐν τῷ Κ. ἔστω τὸ $\Omega = 6$, ἄρα τὸ μὲν $y$ ἴσον τοῖς ἐν τῷ Λ, τὸ δὲ $\chi$ τοῖς ἐν τῷ Μ. Τόδε τὸ πρό-

βλη-

(π) Πίν. XXI.

βλημα ἀόριστόν ἐστι. διὸ ὑπὲρ τῆς ἑαυτοῦ ἐπιλύσεως παρὰ μίαν τοσαῦται γεγόνασιν ἐξισώσεις, ὅσα τὰ ἄγνωστα· (§. 146.) ἑνὸς δὲ αὐτῶν ὁρισθέντος, τὰ λοιπὰ εὕρηται. ὁμοίως δὲ μεθόδοις πολλῶν ὄντων τῶν ἀγνώστων ἐκ τῶν συντεθειμένων ἐξισώσεων μία γίνεται ἓν μόνον ἄγνωστον περιέχουσα.

### ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'.

§. 151. Ἰστέον, ὅτι οὐ πάντα τὰ ἀόριστα προβλήματα ἀπειροαρίθμους ἐπιδέχεται τὰς ἐπιλύσεις. ἐνίοτε γὰρ ἀριθμόν τινα ἐπιλύσεων οὐχ ὑπερβαίνει. τοῦτο δὲ διὰ τὸ προτεθὲν. ἐπεὶ γὰρ δεῖ τὸ κεφάλαιον τῶν ἐν κοινῷ ἀγνώστων τοῦ 20 μὴ ὑπερβαίνειν, ἢ τὸ καθ' ἑκάτερον ὁριζόμενον 12 τοιοῦτον εἶναι, ὥστε τῇ τριπλασίᾳ αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ 60 ἀφαιρεθέντος, τὸ λοιπὸν διὰ τοῦ 4 διαιρεθὲν, ὁλόκληρον ἀριθμὸν παρέχειν ἡλίκον· διὰ τοῦτο οὐκ ἀπειροαρίθμους ἐπιδέχεται τὰς λύσεις, συνεχῶν δὲ μόνον ἐπιλύεται.

### ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'.

§. 152. Εἰδέναι δὲ δεῖ, ὅτι ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν συντεθειμένων ἐξισώσεων καὶ τῶν ἀγνώστων ἐπιγινώσκομεν τὸ πότερον ὡρισμένον ἐστὶν, ἢ ἀόριστον τὸ προτεθὲν πρόβλημα. τῶν γὰρ συνθηκῶν μόνου ἀκριβῶν πολυπραγμονηθεισῶν, ἐὰν μὲν ἐξ αὐτῶν τόσαι πορίζονται ἐξισώσεις ὅσα τὰ ἄγνωστα, ὡρισμένον ἐστὶ τὸ πρόβλημα· ἐὰν δὲ παρὰ μίαν τόσαι, ἀόριστον.

## ΚΕΦ. ΙΖ'.

# Περὶ Ἀριθμητικῶν Σειρῶν.

### ΘΕΩΡΗΜΑ Α'.

§. 153. Ἕκαστος τῶν τῆς συνεχοῦς ἀριθμητικῆς Σειρᾶς ὅρων σύγκειται ἔκ τε τοῦ πρώτου ὅρου, καὶ τοῦ γι-

νο-

νομένῃ ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ὅρων, μονάδι ἐλαττωθέντος, καὶ τῆς διαφορᾶς αὐτῶν.

Ἔστω συνεχὴς ἀριθμητικὴ Σειρὰ ἡ ἐν τῷ Ν, ἧς πρῶτος μὲν ὅρος τὸ α, διαφορὰ δὲ τῶν ὅρων τὸ β, ὧν τὸν ἀριθμὸν ἐμφαινέτω τὸ ν. λέγω, ὅτι ἕκαστος τῶν ὅρων αὐτῆς ἴσος ἐστὶ τῷ $\alpha + \overline{\nu - 1}.\beta$.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ μὲν πρῶτος ὅρος τὴν διαφορὰν οὐ περιέχει, ἕκαστος δὲ τῶν λοιπῶν ἐκ τοῦ πρὸ αὐτοῦ σύγκειται καὶ τῆς διαφορᾶς, ἕκαστος ἄρα τῶν ὅρων ἐκ τοῦ πρώτου σύγκειται καὶ τῆς διαφορᾶς τοσάκις ληφθείσης, ὁσάκις ἡ μονὰς ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ὅρων, μονάδι ἐλαττωθέντος, περιέχεται. ἕκαστος ἄρα τῶν ὅρων σύγκειται ὑπὸ τοῦ πρώτου ὅρου καὶ τοῦ γινομένου ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ὅρων, μονάδι ἐλαττωθέντος, καὶ τῆς διαφορᾶς αὐτῶν. ἕκαστος ἄρα τῶν ὅρων ἴσος τῷ $\alpha + \overline{\nu - 1}.\beta$.

## ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 154. Ἐὰν ἄρα τὸν ἔσχατον ὅρον ἐμφαίνῃ τὸ Ε, προκύψει ἡ κατὰ τὸ Ξ ἐξίσωσις.

## ΘΕΩΡΗΜΑ Β΄.

§. 155. Τὸ κεφάλαιον πάντων τῶν ὅρων τῆς συνεχοῦς ἀριθμητικῆς Σειρᾶς ἴσον ἐστὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τοῦ κεφαλαίου τοῦ πρώτου καὶ τοῦ ἐσχάτου ὅρου καὶ τοῦ ἡμίσεως τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ὅρων.

Ἔστω ἀριθμητικὴ Σειρὰ ἡ αὐτή, ἡ ἐν τῷ Ν. καὶ ἐμφαινέτω τὸν μὲν ἔσχατον ὅρον τὸ Ε, τὸ δὲ Κεφάλαιον αὐτῆς, τὸ Κ. λέγω ὅτι τὸ $K = \overline{\alpha + E}.\frac{\nu}{2}$.

Ἐπειδὴ γὰρ ἐν τῇ συνεχεῖ ἀριθμητικῇ Σειρᾷ τὸ τῶν ὁποιωνοῦν ἄκρων κεφάλαιον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἑαυτῶν μέσου, ληφθέντος ἄρα τοῦ πρώτου καὶ τοῦ ἐσχάτου τοσάκις, ὁσάκις ἡ μονὰς περιέχεται ὑπὸ τοῦ ἡμί-

σεως

σεως τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ὅρων· ὅπερ ἐστὶ πολλαπλασιασθέντος τοῦ κεφαλαίου τοῦ πρώτου καὶ τοῦ ἐσχάτου ὅρου διὰ τοῦ ἡμίσεως τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ὅρων, τὸ γινόμενον ἔσται τὸ κεφάλαιον πάντων τῶν ὅρων. τὸ ἄρα $K = \alpha + \Pi . \frac{\nu}{2}$

## ΠΟΡΙΣΜΑ Α'.

§. 156. Ἐὰν ἄρα ἀντὶ τοῦ Π ἐν τῇ κατὰ τὸ Ο ἐξισώσει τεθῇ τὸ ἴσον αὐτῷ τὸ ἐν τῷ Ξ, ἔσται τῷ τῆς Σειρᾶς κεφάλαιον ἴσον τοῖς ἐν τῷ Π.

## ΠΟΡΙΣΜΑ Β'.

§. 157. Ἐκ τῶν εἰρημένων κατιδεῖν ῥᾴδιον, ὅτι ἐκ τῶν τεσσάρων, εἴτουν τοῦ πρώτου ὅρου, τοῦ ἐσχάτου, τοῦ κεφαλαίου, ἢ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ὅρων τῆς συνεχοῦς ἀριθμητικῆς Σειρᾶς, τριῶν δοθέντων, τὸ τέταρτον εὑρεθήσεται.

## ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 158. Ἔστω τὸ μὲν $\alpha = 1$, τὸ δὲ $\beta = 2$. εἶκοῦν τὴν ἐν τῷ Ν Σειρὰν ἡ ἐν τῷ Ρ ἐμφαίνει. καὶ τεθέντος τοῦ τῶν ὅρων ἀριθμοῦ, τουτέστι τοῦ $\nu = 6$, ἔσται ὁ μὲν ἔσχατος ὅρος ἴσος τοῖς ἐν τῷ Σ, τὸ δὲ κεφάλαιον τοῖς ἐν τῷ Τ.

## ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'.

§. 159. Τῶν ὁποιωνοῦν Δυνάμεων, τῶν ἀπὸ τῆς Φυσικῆς γινομένων Σειρᾶς εὑρεῖν τὸ κεφάλαιον.

Ἔστωσαν αἱ ἐν τῷ Υ Σειραὶ ἀπὸ τοῦ μηδενικοῦ χαρακτῆρος ἀρχόμεναι· ὧν ἡ μὲν πρώτη Σειρὰ μονάδων ἔστω· ἡ δὲ δευτέρα, ἡ Φυσική, εἴτουν ἡ τῶν πρώτων Δυνάμεων· ἡ δὲ τρίτη, ἡ τῶν δευτέρων, τῶν ἀπὸ τῆς Φυσικῆς γινομένων· ἡ δὲ τετάρτη, ἡ τῶν τρίτων, τῶν ἀπὸ τῆς αὐτῆς· ὁμοίως καὶ ἄλλαι Σειραὶ τῶν ἐφεξῆς Δυνάμεων. ἐμφαινέτω δὲ τῆς μὲν πρώτης Σειρᾶς ἕκαστον ὅρον

ὅρον τὸ $\nu^0$· (πᾶσα γὰρ ἔκθεσις τὸ 0 ἔχουσα ἐκθέτην μονάδα ἐμφαίνει. §. 31.) τῆς δὲ δευτέρας, τὸ $\nu^1$· τῆς δὲ τρίτης, τὸ $\nu^2$· τῆς δὲ τετάρτης, τὸ $\nu^3$. δεῖ δὴ οὖν τὸ κεφάλαιον εὑρεῖν ἑκάστης τῶν ἐν τῷ Υ Σειρᾶς.

Συνεστάτωσαν Σειραί, αἱ κατὰ τὸ Φ ἀπὸ τῆς μονάδος ἀρχόμεναι ταῖς κατὰ τὸ Υ ἰσάριθμοι, καὶ ἰσαρίθμους περιέχουσαι ὅρους, τὰς αὐτὰς ἐμφαίνοντας Δυνάμεις.

Καὶ ἐπεὶ ἕκαστον τῶν τῆς κατὰ τὸ Υ πρώτης Σειρᾶς ὅρων ἐμφαίνει τὸ $\nu^0$, τὸ ἄρα κεφάλαιον τῶν $\nu^0$, εἴτουν τὸ $K\nu^0$, τὸ τῶν ὅρων αὐτῆς κεφάλαιον δηλώσει. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ τὸ μὲν $K\nu^1$, τὸ κεφάλαιον δηλώσει τῶν τῆς δευτέρας Σειρᾶς ὅρων· τὸ δὲ $K\nu^2$, τῶν τῆς τρίτης· τὸ δὲ $K\nu^3$, τῶν τῆς τετάρτης· τὸ δὲ $K\,\overline{\nu+1}^0$, τῶν τῆς πρώτης, τῶν ἐν τῷ Φ· τὸ δὲ $K\,\overline{\nu+1}^1$, τῶν τῆς δευτέρας· τὸ δὲ $K\,\overline{\nu+1}^2$, τῶν τῆς τρίτης· τὸ δὲ $K\,\overline{\nu+1}^3$, τῶν τῆς τετάρτης. οὐκ ἔχουσι γὰρ αἱ Σειραὶ αὗται ἀντὶ πρώτου ὅρου τὸν μηδενικὸν χαρακτῆρα, ἀλλὰ τὴν μονάδα.

Ἄφελε τὸ κεφάλαιον ἑκάστης τῶν ἐν τῷ Υ Σειρᾶς ἀπὸ τοῦ κεφαλαίου τῆς ὁμοίας αὐτῇ, τῆς ἐν τῷ Φ. προκύψουσιν οὖν αἱ ἐν τοῖς Χ, Ψ, Ω, καὶ Λ ἐξισώσεις. καὶ ἐπεὶ τὸ $\overline{\nu+1}^2$ ἴσον τοῖς ἐν τῷ C, τοῦ κεφαλαίου ληφθέντος ἑκάστης ἐκθέσεως τῶν ἐν ταύτῃ τῇ ἐξισώσει, ἡ ἐν τῷ D ἐξίσωσις γίνεται (ἀντὶ τοῦ τῶν μονάδων κεφαλαίου ἐτέθη ἐν αὐτῇ τὸ $\nu+1$. τοῦτο γάρ ἐστι τὸ κεφάλαιον αὐτῶν, ὡς ἐκ τῆς πρώτης καὶ δευτέρας τῶν ἐν τῷ Φ Σειρῶν δῆλον. ἕκαστος γὰρ ὅρος τῆς δευτέρας ἴσος ὢν τῷ κεφαλαίῳ τῆς πρώτης,

 ἐμφαί-

ἐμφαίνεται ὑπὸ τῆ $\overline{\nu+1}$.) ἐξ ἧς ἡ ἐν τῷ O. ϗ τεθέντος ἀντὶ τῆ $K\overline{\nu+1}^2 - K\nu^2$ τῆ ἴσῃ αὐτῷ, τῆ κατὰ τὸ Ω, ἡ ἐν τῷ P ἐξίσωσις γίνεται, ἐξ ἧς ἡ ἐν τῷ Q, καὶ ἐξ αὐτῆς ἡ ἐν τῷ I., ἐξ ἧς γνωστὸν γίνεται τὸ $K\nu^1$, ἤτοι τὸ κεφάλαιον τῆς κατὰ τὸ Y δευτέρας Σειρᾶς.

Πάλιν ἐπεὶ τὸ $\overline{\nu+1}^3$ ἴσον τοῖς ἐν τῷ M, ληφθέντος τῆ κεφαλαίῳ ἑκάστης ἐκθέσεως, ἡ ἐν τῷ N ἐξίσωσις γίνεται, ἐξ ἧς ἡ ἐν τῷ Q· ἐξ αὐτῆς δὲ, τεθέντος ἀντὶ μὲν τῆ $K\overline{\nu+1}^3 - K\nu^3$ τῆ ἴσῃ αὐτῷ τῆ ἐν τῷ Λ, ἀντὶ δὲ τῆ $K\nu$ τῆ ἴσῃ αὐτῷ, τῆ ἐν τῷ I., ἡ ἐν τῷ R, ἐξ ἧς ἡ ἐν τῷ S. ἐξ αὐτῆς δὲ γνωστὸν τὸ $K\nu^2$, τουτέστι τὸ κεφάλαιον τῆς κατὰ τὸ Y τρίτης Σειρᾶς.

Τῷ αὐτῷ δὴ τρόπῳ εὑρεθήσεται καὶ τὸ $K\nu^3$, καὶ τὸ $K\nu^4$, καὶ τῶν ἐφεξῆς Δυνάμεων τὰ κεφάλαια.

## ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 160. Ἔστω ὁ ἀριθμὸς τῶν ὅρων τῆς κατὰ τὸ Y δευτέρας Σειρᾶς, ἤτοι τὸ $\nu = 4$, ὁμοίως καὶ ὁ τῆς τρίτης. ἐκεῖν τὸ μὲν τῆς δευτέρας κεφάλαιον, ἤτοι τὸ $K\nu$, ἴσον τοῖς ἐν τῷ N· τὸ δὲ τῆς τρίτης, ἤτοι τὸ $K\nu^2$, ἴσον τοῖς ἐν τῷ W.

## ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'.

§. 161. Δοθείσης ἀριθμητικῆς τινὸς Σειρᾶς εὑρεῖν τὰ κεφάλαια τῶν ἐξ αὐτῆς συνισταμένων Σειρῶν, ὅρους ἐχουσῶν, ὧν ἕκαστος ὑπὸ τῆ κεφαλαίῳ ἐμφαίνεται τῆς πρὸ αὐτῆ Σειρᾶς.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα ἀριθμητικὴ Σειρὰ (e) ἡ ἐν τῷ A. ἐκεῖν ὁ μὲν ἔσχατος αὐτῆς ὅρος ἔσται ὁ $\alpha + \nu - 1 . \beta$. (§. 154.)

(e) Πίν. XXII.

(§. 154.) τὸ δὲ κεφάλαιον, τὸ ἐν αὐτῷ τῷ Α ὁρώμενον. (§. 158.) τῦτο ὖν κατὰ τὴν τῦ προβλήματος συνθήκην ἐμφαίνει ἕκαςον τῶν ὅρων τῆς ἐξ αὐτῆς γινομένης Σειρᾶς, τυτέσι τῆς ἐν τῷ Β. τὸ δὲ κεφάλαιον τῶν ἐν αὐτῷ ἐκθέτων, ὅπερ ἐςὶ τὸ ἐν τῷ C ὁρώμενον, τὸ κεφάλαιόν ἐςαι πάντων τῶν ἐν αὐτῇ ὅρων. ἐὰν ὖν ἀντὶ τῦ Κν, ϗ τῦ Κν² τεθῶσι τὰ ἐν τῷ προλαβόντι προβλήματι (§. 159.) ἑυρεθέντα αὐτῶν ἴσα, ἔςαι τὸ ἐν τῷ Β ὁρώμενον, τὸ κεφάλαιον αὐτῆς τῆς ἐν τῷ Β Σειρᾶς. ὅπερ δὴ ἐμφαίνει ϗ ἕκαςον τῶν ὅρων τῆς ἐν τῷ Γ. ληφθέντος δὲ τῦ κεφαλαίῳ ἑκάςης τῶν ἐν αὐτῷ ἐκθέτων, ἑυρεθήσεται καθάπερ ϗ πρότερον τὸ τῆς ἐν τῷ Γ Σειρᾶς κεφάλαιον, ἐμφαῖνον ϗ ἕκαςον τῶν τῆς μετ' αὐτὴν Σειρᾶς ὅρων.

## ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 162. Ἔςω τὸ α = 1, ὡσαύτως ϗ τὸ β = 1. ἐκῶν ἡ μὲν ἐν τῷ Α Σειρὰ εἰς τὴν τῶν Φυσικῶν ἀριθμῶν μεταβάλλεται, τὴν κατὰ τὸ Δ· ἡ δὲ ἐν τῷ Β εἰς τὴν ἐν τῷ Ε, τὴν καλυμένην τριγωνικῶν ἀριθμῶν Σειράν· ἡ δὲ κατὰ τὸ Γ, εἰς τὴν κατὰ τὸ Ζ, τὴν τῶν πυραμικῶν ἀριθμῶν τῆς πρώτης τάξεως· ἐξ ἧς, κατὰ τὰ εἰρημένα, ἡ ἐν τῷ Η συνίςαται, ἡ τῶν πυραμικῶν ἀριθμῶν τῆς δευτέρας τάξεως. Ἐὰν δὲ τὸ μὲν α = 1, τὸ δὲ β = 2, ἡ μὲν πρώτη Σειρὰ ἐςιν ὅρων ἀριθμητικῶς ἀναλόγων, οἷα ἡ ἐν τῷ Θ· ἡ δὲ δευτέρα, ἡ ἐν τῷ Ι, τετραγώνων· ἡ δὲ τρίτη, ἡ ἐν τῷ Κ, πενταγώνων. πάντες δὲ οἱ ἀριθμοὶ ὗτοι Ἐσχηματισμένοι καλῦνται.

## ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'.

§. 163. Δοθέντος τοῦ ἀριθμοῦ τῶν κατὰ δυάδα, ἢ τετράδα, ἢ κατ' ἄλλον ὁποιονοῦν ἀριθμὸν, συζευχθησομένων ἐκθέσεων, τὸν ἀριθμὸν εὑρεῖν τῶν συζεύξεων.

Ἔςωσαν αἱ κατὰ δυάδα συζευχθησόμεναι ἐκθέσεις δύω μὲν αἱ κατὰ τὸ Λ, τρεῖς δὲ αἱ κατὰ τὸ Μ, τέσσαρες δὲ αἱ κατὰ τὸ Ν, πέντε δὲ αἱ κατὰ τὸ Ξ, καὶ ν αἱ κατὰ τὸ Ο.

## ΠΡΑΚΤΕΟΝ.

Τὸν ὁλόκληρον τῶν ἐκθέσεων ἀριθμὸν ἐφ' ἑαυτὸν μονάδι ἐλαττωθέντα πολλαπλασιασας, διὰ τοῦ 2 δίελε τὸ γινόμενον. λέγω δὴ οὖν, ὅτι τὸ προκύπτον πηλίκον τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν τῶν συζεύξεων δηλοῖ. οἷον ν ὄντος τοῦ τῶν ἐκθέσεων ἀριθμοῦ, ὁ ζητούμενος τῶν συζεύξεων ἀριθμὸς ἔςαι τὸ $\frac{\nu.\ \nu-1}{1.\ 2}$.

## ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐκ μὲν γὰρ τῶν κατὰ τὸ Λ συζεύξεων δῆλον, ὅτι μία γίνεται σύζευξις· ἐκ δὲ τῶν κατὰ τὸ Μ. 3· ἐκ δὲ τῶν κατὰ τὸ Ν, 6· ἐκ δὲ τῶν κατὰ τὸ Ξ, 10. εἰσὶ δὲ οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι, εἴτουν οἱ 1, 3, 6, 10, τῆς τῶν τριγωνικῶν ἀριθμῶν Σειρᾶς ὅροι. καὶ ὅτε μὲν 2 αἱ συζευχθησόμεναι ἐκθέσεις, ὁ πρῶτος τῆς εἰρημένης Σειρᾶς ὅρος ἐμφαίνει τὸν ἀριθμὸν τῶν ἑαυτῶν συζεύξεων· ὅτε δὲ τρεῖς, ὁ δεύτερος· ὅτε δὲ τέσσαρες, ὁ τρίτος· καὶ ἐπὶ τῶν ἐφεξῆς ὁμοίως. διὸ ἐὰν ὁ ἀριθμὸς τῶν συζευχθησομένων ἐκθέσεων ἴσος ᾖ ν, τὸ ν—1 ἐμφαίνει τὸν ὅρον τῆς διαληφθείσης Σειρᾶς, τὸν δηλοῦντα τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν τῶν συζεύξεων. ἐπεὶ δὲ ἕκαςος τῶν ὅρων αὐτῆς δηλοῦται ὑπὸ τοῦ $\frac{\nu.\ \nu+1}{1.\ 2}$, ὁ ζητούμενος ἄρα τῶν συζεύξεων ἀριθμὸς ἐμφαίνεται ὑπὸ τοῦ $\frac{\nu.\ \nu-1}{1.\ 2}$.

Ἐςω-

Ἔςωσαν αἱ ἀνὰ τρεῖς συζευχθησόμεναι ἐκθέσεις, τρεῖς μὲν αἱ κατὰ τὸ Π, τέσσαρες δὲ αἱ κατὰ τὸ Ρ. πέντε δὲ αἱ κατὰ τὸ Σ, καὶ ν αἱ κατὰ τὸ Τ. λέγω ὅτι τὸν ζητέμενον ἀριθμὸν τῶν συζεύξεων ἐμφαίνει τὸ $\frac{\nu.\overline{\nu-1}.\overline{\nu-2}}{1.2.3}$.

Τῶν μὲν γὰρ κατὰ τὸ Π δῆλον ὅτι μία γίνεται ἡ σύζευξις· τῶν δὲ κατὰ τὸ Ρ, 4· τῶν δὲ κατὰ τὸ Σ, 10. εἰσὶ δὲ οἱ ἀριθμοὶ, 1, 4, 10 τῆς τῶν πυραμικῶν τῆς πρώτης τάξεως Σειρᾶς ὅροι. καὶ ἐὰν μὲν τρεῖς αἱ συζευχθησόμεναι ἐκθέσεις, ὁ πρῶτος ὅρος τὸν ἀριθμὸν τῶν συζεύξεων αὐτῶν ἐμφαίνει· ἐὰν δὲ τέσσαρες, ὁ δεύτερος· ἐὰν δὲ πέντε, ὁ τρίτος. διὸ ἐὰν ὁ τῶν ἐκθέσεων ἀριθμὸς ᾖ ν, ὁ ὅρος τῆς εἰρημένης Σειρᾶς, ὁ ἐμφαίνων τὸν ἀριθμὸν τῶν συζεύξεων, ἔσεται ν — 2. ὗτος δὲ ὁ ὅρος ἐςὶν ὁ $\frac{\nu.\overline{\nu-1}.\overline{\nu-2}}{1.2.3}$. ὁ αὐτὸς ἄρα ἐμφαίνει τὸν ζητέμενον ἀριθμὸν τῶν συζεύξεων τῶν κατὰ τριάδα συζευχθησομένων ἐκθέσεων.

Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσεται, ὅτι ὁ μὲν ἀριθμὸς τῶν συζεύξεων κατὰ τετράδα ἐμφαίνεται ὑπὸ τῦ ὅρυ τῆς Σειρᾶς τῶν πυραμικῶν ἀριθμῶν τῆς δευτέρας τάξεως, τυτέςι τῦ $\frac{\nu.\overline{\nu-1}.\overline{\nu-2}.\overline{\nu-3}}{1.2.3.4}$· ὁ δὲ τῶν κατὰ πεντάδα, ὑπὸ τῦ $\frac{\nu.\overline{\nu-1}.\overline{\nu-2}.\overline{\nu-3}.\overline{\nu-4}}{1.2.3.4.5}$. καὶ τῶν ἑφεξῆς ὑπὸ τῶν ὁμοίων.

## ΚΕΦ. ΙΗ΄.

# Περὶ Γεωμετρικῶν Σειρῶν.

### ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄.

§. 164. Ἕκαςος τῶν τῆς Γεωμετρικῆς Σειρᾶς ὅρων, πλὴν τῦ πρώτυ, τὸ γινόμενόν ἐςιν ἐξ αὐτῦ τῦ πρώτυ, καὶ

καὶ τῆς Δυνάμεως, τῆς ἀπὸ τῦ ἐκθέτυ τῦ λόγυ, δείκτην ἐχέσης τὸν ἀριθμὸν, μονάδι ἐλαττωθέντα, τὸν ἐμφαίνοντα τὸν τῦ ὅρυ τόπον.

Ἔςω Γεωμετρικὴ συνεχὴς Σειρὰ (σ) ἡ ἐν τῷ Α, ἧς πρῶτος μὲν ὅρος τὸ α, ἐκθέτης δὲ τῦ λόγυ τὸ μ. λέγω, ὅτι ἕκαςος τῶν ὅρων αὐτῆς, πλὴν τῦ πρώτυ, τὸ γινόμενόν ἐςιν ἐξ αὐτῦ τῦ πρώτυ α, καὶ τῆς Δυνάμεως τῆς ἀπὸ τῦ ἐκθέτυ τῦ λόγυ, ἐπίσημον ἐχέσης τὸν ἀριθμὸν, μονάδι ἐλαττωθέντα, τὸν ἐμφαίνοντα τὸν τῦ ὅρυ τόπον, εἴτυν τῆς $\mu^{\nu-1}$.

Ἡ μὲν γὰρ Σειρὰ $1, \mu, \mu^2, \mu^3, \mu^4, \mu^5$, κτ, συνεχὴς Γεωμετρικὴ ἐςιν. (§. 29.) ἕκαςος δὲ τῶν ὅρων αὐτῆς, πλὴν τῦ πρώτυ, δύναμίς ἐςι τῦ ἐκθέτυ τῦ λόγυ ἐπίσημον ἔχυσα τὸν ἀριθμὸν τῦ τόπυ, μονάδι ἐλαττωθέντα. ἐὰν δὲ ἕκαςον τῶν ὅρων αὐτῆς διὰ τῦ α πολλαπλασιάσῃς, ἡ ἐν τῷ Α Σειρὰ γίνεται. ἐξ ὖ δῆλον, ὅτι ἕκαςος τῶν ὅρων αὐτῆς, πλὴν τῦ πρώτυ, τὸ γινόμενόν ἐςιν ἐξ αὐτῦ τῦ πρώτυ ὅρυ καὶ τῆς Δυνάμεως, τῆς ἀπὸ τῦ ἐκθέτυ, δείκτην ἐχέσης τὸν ἀριθμὸν, μονάδι ἐλαττωθέντα, τὸν ἐμφαίνοντα τὸν τῦ ὅρυ τόπον.

## ΠΟΡΙΣΜΑ Α'.

§. 165. Ἡ ἄρα μονὰς πρὸς τὴν ἀπὸ τῦ ἐκθέτυ τῦ λόγυ Δύναμιν, ἐξ ἧς ὅρος τὶς σύγκειται, λόγον ἔχει, ὃν ὁ πρῶτος ὅρος, πρὸς αὐτὸν τὸν εἰρημένον ὅρον, οἷον, ὡς $1 : \mu^2 :: \alpha : \mu^2 \alpha$.

## ΠΟΡΙΣΜΑ Β'.

§. 166. Ἕκαςος τῶν ὅρων ἐμφαίνεται διὰ τῦ $\mu^{\nu-1}\alpha$, τῦ ν τὸν τῦ ὅρυ τόπον ἐμφαίνοντος.

ΠΟ.

(σ) Πίν. XXIII.

## ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'.

§. 167. Ἐὰν ἄρα τὸ Ε τὸν ἔχατον ὅρον τῆς Γεωμετρικῆς συνεχῆς Σειρᾶς ἐμφαίνῃ, ἴσον ἔϛαι τοῖς ἐν τῷ Β.

## ΘΕΩΡΗΜΑ Β'.

§. 168. Τὸ κεφάλαιον πάσης τῆς γεωμετρικῆς συνεχῆς Σειρᾶς ἴσον ἐϛὶ τῷ γινομένῳ ἔκτε τῆ ἐχάτῃ ὅρῃ κ τῆ ἐκθέτῃ τῆ λόγῃ, μειωθέντι μὲν τὸν πρῶτον, διαιρεθέντι δὲ δι' αὐτῆ τῆ ἐκθέτῃ τῆ λόγῃ μονάδι ἐλαττωθέντος, εἴτην τῷ $\frac{E\mu-\alpha}{\mu-1}$.

Ἐπεὶ γὰρ ὡς ἓν τῶν ἡγημένων, πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, ὅτω πάντα τὰ ἡγέμενα, πρὸς πάντα τὰ ἑπόμενα· καὶ ὡς μὲν ἓν τῶν ἡγημένων, πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, ὅτως ἡ 1 : μ· (§. 165.) πάντα δὲ τὰ ἡγέμενα ἐν τῇ συνεχεῖ ἀναλογίᾳ ἴσα εἰσὶ τῷ κεφαλαίῳ τῶν ὅρων, πλὴν τῆ ἐχάτῃ, ὁμοίως καὶ τὰ ἑπόμενα πάντα ἴσα τῷ αὐτῷ κεφαλαίῳ, πλὴν τῆ πρώτῃ· τῆ ἄρα τῶν ὅρων κεφαλαίῃ διὰ τῆ Κ σημανθέντος, ἔσεται, ὡς 1 ; μ : : Κ—Ε : Κ—α. ἐκ ταύτης ὖν τῆς ἀναλογίας προκύπτει ἡ ἐν τῷ Λ ἐξίσωσις, ἐξ ἧς δῆλον τὸ προκείμενον.

## ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'.

§. 169. Ἐὰν ἀντὶ τῆ Ε τεθῇ ἐν τῇ κατὰ τὸ Λ ἐξισώσει τὸ εὑρεθὲν (§. 167.) αὐτῷ ἴσον, ἔϛαι τὸ τῶν ὅρων κεφάλαιον ἴσον τοῖς ἐν τῷ Μ.

## ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'.

§. 170. Ἐν τῇ Γεωμετρικῇ Σειρᾷ τριῶν δοθέντων ἐκ τῶν δε· τῆ πρώτῃ ὅρῃ, τῆ ἐχάτῃ, τῆ ἐκθέτῃ τῆ λόγῃ, τῆ ἀριθμῆ τῶν ὅρων, ἢ τῆ κεφαλαίῃ αὐτῶν, τὰ λοιπὰ ἐκ τῶν εἰρημένων εὑρεῖν ῥᾴδιον.

## ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 171. Δοθείσης γεωμετρικῆς τινὸς συνεχοῦς Σειρᾶς, εὑρεῖν τὰ κεφάλαια τῶν ἐξ αὐτῆς συνισταμένων Σειρῶν, ὅρους ἐχουσῶν, ὧν ἕκαστος ὑπὸ τοῦ κεφαλαίου ἐμφαίνεται τῆς πρὸ αὐτοῦ Σειρᾶς.

Ἔστω δοθεῖσα Σειρὰ, ἡ ἐν τῷ Α, ἧς τὸ κεφάλαιόν ἐστι τὸ $\frac{\mu^{\nu}\alpha-\alpha}{\mu-1}$. (§. 168.) τοῦτο οὖν κατὰ τὴν τοῦ προβλήματος συνθήκην ἐμφαίνει ἕκαστον τῶν τῆς κατὰ τὸ Γ Σειρᾶς ὅρων.

## ΠΡΑΚΤΕΟΝ.

Ἀνάλυσον τὴν ἐν τῷ Γ Σειρὰν εἰς τὴν ἐν τῷ Δ, καὶ εἰς τὴν ἐν τῷ Ε· ὧν ἡ μὲν γεωμετρική ἐστιν, ἡ δὲ ἀριθμητική. ἐκεῖνον τῆς μὲν πρώτης τὸ κεφάλαιόν ἐστι τὸ $\frac{\mu^{\nu+1}\alpha-\mu\alpha}{(\mu-1)^2}$ τῆς δὲ δευτέρας, τὸ $\frac{\nu\alpha}{\mu-1}$. (§. 155.) ἄφελε ἀπὸ τοῦ πρώτου τὸ δεύτερον, καὶ τὸ λοιπὸν, ὅπερ ἐστὶν αὐτὸ τὸ ἐν τῷ Γ ὁρώμενον, ἔσται τὸ ζητούμενον τῆς ἐν τῷ Γ Σειρᾶς κεφάλαιον.

## ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ γὰρ ἀπὸ ἑκάστου τῶν ὅρων τῆς κατὰ τὸ Γ Σειρᾶς ἀφελεῖν δεῖ ἕκαστον τῶν ἐν τῇ κατὰ τὸ Ε, ἐὰν ἄρα ἀπὸ τοῦ κεφαλαίου τῆς κατὰ τὸ Δ ἀφαιρεθῇ τὸ κεφάλαιον τῆς κατὰ τὸ Ε, τὸ λοιπὸν ἔσται τὸ ζητούμενον κεφάλαιον τῆς κατὰ τὸ Γ Σειρᾶς.

Πάλιν τὸ εὑρεθὲν κεφάλαιον τῆς ἐν τῷ Γ Σειρᾶς ἐμφαίνει, κατὰ τὴν τοῦ προβλήματος συνθήκην, ἕκαστον τῶν τῆς κατὰ τὸ Ζ Σειρᾶς ὅρων.

Ἀνάλυσον τὴν κατὰ τὸ Ζ Σειρὰν εἰς τὰς ἐν τοῖς Η, Θ, Ι. τούτων ἡ μὲν πρώτη γεωμετρική ἐστιν· αἱ δὲ δύω λοιπαὶ, ἀριθμητικαί. ἐκεῖνον τῆς μὲν κατὰ τὸ Η τὸ κεφάλαιόν ἐστι τὸ ἐν τῷ Ν· τῆς δὲ κατὰ τὸ Θ, τὸ ἐν τῷ Ξ·

τῆς

τῆς δὲ κατὰ τὸ Ι, τὸ ἐν Ο. ἐὰν οὖν τὰ κατὰ τὸ Ξ καὶ Ο ἀπὸ τοῦ ἐν τῷ Ν ἀφαιρεθῇ, λοιπὸν τὸ ἐν τῷ Κ τὸ κεφάλαιον ἔσαι τῆς κατὰ τὸ Ζ Σειρᾶς.

Ὁμοιοτρόπως δὲ καὶ τῶν ἐφεξῆς ὁμοίως συναθροισμένων Σειρῶν εὑρεθήσονται τὰ κεφάλαια.

## ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 172. Ἔσω τὸ μὲν $\alpha = 1$, τὸ δὲ $\mu = 2$. οὐκοῦν ἡ μὲν κατὰ τὸ Λ Σειρά, εἰς τὴν κατὰ τὸ Π μεταβληθήσεται· ἡ δὲ κατὰ τὸ Γ, εἰς τὴν κατὰ τὸ Ρ· ἡ δὲ κατὰ τὸ Ζ, εἰς τὴν κατὰ τὸ Σ.

## ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α΄.

§. 173. Οἱ τῶν Ρ καὶ Σ Σειρῶν ἀριθμοί, καὶ οἱ ἐφεξῆς κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εὑρισκόμενοι **Γεωμετρικοὶ ἀριθμοὶ ἐσχηματισμένοι** καλοῦνται. (*)

## ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β΄.

§. 174. Ἰσέον, ὅτι τὰ ἄχρι τοῦ νῦν ἐπιλυθέντα προβλήματα, οἷον θεμέθλιά εἰσι πάντων τῶν δι᾽ ἀριθμῶν ἐπιλυομένων προβλημάτων.

# ΚΕΦ. ΙΘ΄.

# Ἀριθμητικῶν τινῶν προβλημάτων ἐπίλυσις.

## ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄.

§. 175. Δοθέντων τοῦ πρώτου καὶ ἐσχάτου ὅρου καὶ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ὅρων τῆς Γεωμετρικῆς Σειρᾶς, τὸν τοῦ λόγου ἐκθέτην εὑρεῖν.

Ἔσω ὁ μὲν πρῶτος ὅρος $= \alpha$, ὁ δὲ δεύτερος $= \beta$, ὁ δὲ τῶν ὅρων ἀριθμὸς $= \nu$, ὁ δὲ ζητούμενος ἐκθέτης $= \chi$.

 Οὐκοῦν

(*) Περὶ τούτων μέτιθι τὴν τοῦ Ἱερωνύμου Ῥινάλδου βίβλον, τὴν περὶ μαθηματικῶν γυμνασμάτων, τὴν κατὰ τὸ Πατάβιον ἐντυπωθεῖσαν.