τὸ ἄγνωϛον, ὅπως ἂν ἐκλείψῃ ἡ ἔκθεσις ἡ περιέχȣσα τὸ ἄγνωϛον τὸ τὴν μονάδα ἐκθέτην ἔχον, ὅπερ ἐϛὶ τὸ σκοπȣ́μενον.) ἔσεται τὸ $\mu \pm \Lambda = 0$. διὸ δὴ τὸ $\mu = \mp \Lambda$. ȣ̓κȣ̃ν ἐὰν τεθῇ τὸ $\chi = y \mp \Lambda$, ἔσεται τὸ μὲν $\chi^2 = y^2 \mp 2\Lambda y + \Lambda^2$, τὸ δὲ $\pm 2\Lambda\chi = \pm 2\Lambda y - 2\Lambda^2$. διὸ ἡ ἐν τῷ Ε ἐξίσωσις εἰς τὴν ἐν τῷ Ρ μεταβληθήσεται, ἥτις ἡ αὐτή ἐϛι τῇ ἐν τῷ Σ, ἐξ ἧς ἡ ἐν τῷ Τ γίνεται. ἐξαχθείσης δὲ ἑκατέρωθεν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης, ἡ ἐν τῷ Υ προκύπτει. ἐπεὶ δὲ τὸ $y \mp \Lambda = \chi$, τὸ ἄρα $y = \chi \pm \Lambda$. ἐὰν ȣ̃ν ἀντὶ τȣ̃ y τεθῇ τὸ $\chi \pm \Lambda$ ἐν τῇ κατὰ τὸ Υ ἐξισώσει, ἡ ἐν τῷ Φ γίνεται, ἐξ ἧς ἡ ἐν τῷ Χ. ἐξ ἧς δῆλον, ὅτι τὸ χ ἴσον εὕρηται τῇ ἀνωτέρω εὑρεθείσῃ ἐκθέσει, τῇ κατὰ τὸ Θ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 124. Ἵνα ȣ̃ν ἡ προκειμένη ἐξίσωσις εἰς ἑτέραν μεταβληθῇ, ἐν ᾗ ȣ̓κ ἔϛιν ἡ ἔκθεσις ἡ περιέχȣσα τὸ ἄγνωϛον, τὸ ἐκθέτην ἔχον τὴν μονάδα, τιθέναι δεῖ τὸ τῆς προκειμένης ἐξισώσεως ἄγνωϛον ἴσον ἑτέρῳ ἀγνώϛῳ σὺν τῷ ἡμίσει τȣ̃ συμπράκτορος τȣ̃ ἀγνώϛȣ τȣ̃ τὴν μονάδα ἐκθέτην ἔχοντος, μετὰ σημείȣ ἐναντίȣ, οἷον τὸ ἐν τῇ κατὰ τὸ Ε ἐξισώσει $\chi = y \mp \Lambda$ τιθέναι δεῖ.

ΚΕΦ. ΙΓ΄.

Περὶ τῆς μεθόδȣ τȣ̃ εὑρίσκειν τὸ ἄγνωϛον ἐν ταῖς τȣ̃ τρίτȣ βαθμȣ̃ ἐξισώσεσι.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Α΄.

§. 125. Εὑρεῖν τὸ ἄγνωϛον τὸ ἔχον τὴν τριάδα ἐκθέτην ἐν πάσαις ταῖς ἐκθέσεσι τῆς κατὰ τὸ Α ἐξισώσεως. (φ)

ΠΡΑΚ-

(φ) Πίν. XIV.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

Α'. Ποίησον ὅσα ἐν τῷ §. 117 διατέτακται. ὁκοῦν προκύψει ἡ ἐν τῷ Β ἐξίσωσις.

Β. Ἐξήχθω ἡ κυβικὴ ῥίζα ἑκατέρου τῶν μερῶν τῆς κατὰ τὸ Β ἐξισώσεως. ὁκοῦν τὸ χ ἴσον τῇ ἐν τῷ Γ ἐκθέσει.

Γ. Διὰ τῶν τῆς μονάδος κυβικῶν ῥιζῶν τὴν ἐν τῷ Γ ἔκθεσιν, τὴν τῷ χ ἴσην, πολλαπλασίασον. τρεῖς τοιγαροῦν αἱ τοῦ χ ῥίζαι, ἡ ἐν τῷ Δ, ἡ ἐν τῷ Ε, καὶ ἡ ἐν τῷ Ζ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'.

§. 126. Τὸ ἐν τῇ κατὰ τὸ Η δοθείσῃ τοῦ τρίτου βαθμοῦ ἐξισώσει ἄγνωστον, τὸ διαφόρους ἔχον ἐκθέτας, εὑρεῖν.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

Α'. Μεταβληθήτω ἡ ἐξίσωσις εἰς ἑτέραν, μὴ περιέχουσαν τὸ ἄγνωστον τὸ ἔχον τὴν δυάδα ἐκθέτην. §. 123. τεθέντος τοῦ Φ ἴσου τοῖς ἐν τῷ Θ, τὸ μὲν Φ^2 ἴσον ἔσεται τοῖς ἐν τῷ Ι, τὸ δὲ Φ^3 τοῖς ἐν τῷ Κ. ἐξ ὧν προκύπτει ἡ ἐν τῷ Λ ἐξίσωσις. τεθεισῶν δὲ τῶν ἐκθέσεων τῶν τῷ χ^2 περιεχουσῶν τῷ μηδενὶ ἴσων, ὡς ἐν τῷ Μ ὁρᾶται, εὑρίσκεται τὸ $\pm\mu$ ἴσον τῷ ἐν τῷ Ν. ὁκοῦν ἐν τῇ κατὰ τὸ Θ ἐξισώσει ἀντὶ τοῦ $\pm\mu$ τεθέντος τοῦ $-\frac{\alpha}{3}$, ἡ ἐν τῷ Ξ προκύψει ἐξίσωσις. ἐξ ἧς ἡ ἐν τῷ Ο γίνεται, καὶ διὰ τὴν ἐν τῷ Η, ἡ ἐν τῷ Π γίνεται. καὶ τῶν ἐν τῷ Ρ καὶ Σ ἐξισώσεων εὐχερείας χάριν συσταθεισῶν, ἡ ἐν τῷ Τ προκύψει ἐξίσωσις, εἰς ἣν ἡ ἐν τῷ Η μεταβίβληται.

Β'. Κείσθω τὸ χ ἴσον δυσὶν ἀγνώστοις, ὡς ἐν τῷ Υ ὁρᾶται. ὁκοῦν τὸ μὲν χ^3 ἴσον τοῖς ἐν τῷ Φ, ἤ τοῖς ἐν τῷ Χ, τεθέντος ἀντὶ τοῦ $y+\Omega$ τοῦ ἴσου αὐτοῖς χ·

ἐξ

ἐξ ὧ προκύπτει ἡ ἐν τῷ Ψ ἐξίσωσις, ἐξ αὐτῆς δὲ ἡ ἐν τῷ Ω διὰ τὴν ἐν τῷ Τ.

Γ΄. Κείσθω τὰς τὸ ἄγνωςον χ περιεχέσας ἐκθέσεις ἴσας εἶναι τῷ μηδενὶ, ὡς ἐν τῷ Λ ὁρᾶται. (χ) ὀκῶν τὸ μὲν y ἴσον τῷ ἐν τῷ Β, τὸ δὲ y^3 τῷ ἐν τῷ Γ. τὰ δὲ λοιπὰ τῆς ἐν τῷ Ω ἐξισώσεως (ψ) ἴσα τοῖς ἐν τῷ Δ. ἐὰν ὧν ἐν τῇ κατὰ τὸ Δ (ω) ἐξισώσει ἀντὶ τῷ y^3 τεθῇ τὸ ἴσον αὐτῷ, τὸ ἐν τῷ Γ, προκύψει ἡ ἐν τῷ Ε ἐξίσωσις, ἐξ ἧς ἡ ἐν τῷ Ζ γίνεται.

Δ΄. Προσκείσθω ἑκατέρωθεν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῷ ἡμίσεως τῷ συμπεράσματος τῷ Ω^3, εἴτων τὸ ζ^2. (ἐπεὶ γὰρ οἱ τῷ ἀγνώςω ἐκθέται, ἤτοι ὁ 6 καὶ 3, λόγον ἔχωσι πρὸς ἀλλήλως, ὃν ὁ 2 : 1, τῷ δευτέρω βαθμῷ ἐςὶν ἡ προκειμένη ἐξίσωσις, καὶ τῷ $\Omega^6 - 2\zeta\Omega^3$ λείπει τὸ ζ^2, πρὸς τὸ γενέσθαι τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῷ $\Omega^3 - \zeta$.) ὀκῶν προκύψει ἡ ἐν τῷ Η ἐξίσωσις.

Ε΄. Ἐξήχθω ἑκατέρωθεν ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα. προκύψει ἄρα ἡ ἐν τῷ Θ ἐξίσωσις.

ϛ΄. Ἐξήχθω ἑκατέρω τῆς ἐξισώσεως μέρως ἡ κυβικὴ ῥίζα. ἔςαι δὴ ὧν τὸ Ω ἴσον τοῖς ἐν τῷ Ι.

Ζ΄. Ἀντὶ τῷ Ω^3 τεθήτω ἐν τῇ κατὰ τὸ Δ ἐξισώσει τὸ ἴσον αὐτῷ, τὸ ἐν τῷ Θ. ὀκῶν ἔςαι τὸ y ἴσον τοῖς ἐν τῷ Κ..

Η΄. Ἐν τῇ κατὰ τὸ Υ ἐξισώσει, (α) ἀντὶ τῷ y καὶ Ω τεθήτωσαν τὰ ἴσα αὐτοῖς, τὰ ἄρτι ὡς εὑρεθέντα. τὸ ἄρα χ ἴσον ἔςαι τοῖς ἐν τῷ Λ. (β)

Θ΄. Ἐν τῇ κατὰ τὸ Ξ ἐξισώσει (Πίν. XIV.) τεθήτω ἀντὶ τῷ χ τὸ ἄρτι εὑρεθὲν αὐτῷ ἴσον. ὀκῶν τὸ Φ ἴσον ἔςαι τοῖς ἐν τῷ Μ. (β) εὕρηται ἄρα τὸ ζητέμενον Φ διὰ

γνω-

(χ) Πίν. XV. (ψ) Πίν. XIV. (ω) Πίν. XV. (α) Πίν. XIV. (β) XV.

γνωστῶν ἐμφαινόμενον. ἐὰν δὲ εὐχερείας χάριν τὰ εὑρεθέντα αὐτῷ ἴσα τεθῇ ἴσα, τοῖς ἐν τῷ Σ, τούτων διὰ τῶν τῆς μονάδος κυβικῶν ῥιζῶν πολλαπλασιαθέντων, τὸ Φ ἴσον ἔσαι τοῖς ἐν τῷ Τ, ἢ τοῖς ἐν τῷ Υ, ἢ τοῖς ἐν τῷ Φ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 127. Ἔςω τὸ μὲν $\alpha = 2$, τὸ δὲ $\gamma = 3$, τὸ δὲ $\beta = 10$, οὐκοῦν τὸ μὲν ν διὰ τὴν ἐν τῷ Ρ (γ) ἐξίσωσιν ἴσον ἔςαι τοῖς ἐν τῷ Ν· (δ) τὰ δὲ 2ζ διὰ τὴν ἐν τῷ Σ, (ε) ἴσα τοῖς ἐν τῷ Ξ. (Πίν. XV.) ἐξ οὗ δῆλον, ὅτι τὸ ζ ἴσον τῷ ἐν τῷ Ο. τὸ ἄρα Φ ἴσον τοῖς ἐν τῷ Π. ἐπεὶ δὲ ἡ μὲν $\sqrt[3]{\frac{100}{27} - \frac{17}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}} = \frac{4}{3} - \sqrt{\frac{1}{3}}$, ἡ δὲ $\sqrt[3]{\frac{100}{27} + \frac{17}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}} = \frac{4}{3} + \sqrt{\frac{1}{3}}$, τὸ ἄρα Φ ἴσον ἔςαι τοῖς ἐν τῷ Ρ, ὅπερ ἐςὶν ἴσον τῷ 2. ἵνα δὲ εὕρῃς ταύτας τὰς κυβικὰς ῥίζας, ἐξάγαγε τὴν κυβικὴν ῥίζαν τοῦ ἐν τῷ $\frac{100}{27}$ μεγίςου κύβου, ἥτις ἐςὶ τὸ $\frac{4}{3}$ ἢ ἐγγὺς δηλονότι. αὕτη δὴ ἔσεται τὸ πρῶτον τῆς ζητουμένης κυβικῆς ῥίζης μέρος, τὸ δὲ δεύτερόν ἐςι τὸ $\sqrt{\frac{1}{3}}$. ἕξεις οὖν τὴν ζητουμένην κυβικὴν ῥίζαν ἴσην τῷ $\frac{4}{3} + \sqrt{\frac{1}{3}}$ καὶ τῷ $\frac{4}{3} - \sqrt{\frac{1}{3}}$. ἀλλὰ καὶ ἄλλως τὸ αὐτὸ πορίσασθαι ἔνεςιν. ἐπεὶ γὰρ τὸ μὲν $\frac{100}{27} = \frac{64}{27} + \frac{36}{27}$, τὸ δὲ $\frac{17}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{51}{9}\sqrt{\frac{1}{3}}$, τὸ δὲ $\frac{51}{9}\sqrt{\frac{1}{3}}, = \frac{48}{9}\sqrt{\frac{1}{3}} + \frac{3}{9}\sqrt{\frac{1}{3}}$ πάντα ἄρα τὰ μέρη τοῦ κύβου $\frac{100}{27} + \frac{17}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{64}{27} + \frac{48}{9}\sqrt{\frac{1}{3}} + \frac{36}{27} + \frac{3}{9}\sqrt{\frac{1}{3}}$. καὶ ἐπεὶ ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ $\frac{64}{27}$ ἴση $\frac{4}{3}$ ἐςίν, ἐὰν διὰ τοῦ τριπλασίου τοῦ τετραγώνου τούτου τοῦ πρώτου εὑρεθέντος μέ-

---

(γ) Πίν. XIV. (δ) Πίν. XV. (ε) Πίν. XIV.

μέρους, ἤτουν τοῦ $\frac{48}{9}$ διέλῃς τὸ $\frac{48}{9}\sqrt{\frac{1}{3}}$, (§. 90.) τὸ πηλίκον $\sqrt{\frac{1}{3}}$ ἔσαι τὸ δεύτερον μέρος τῆς ζητουμένης κυβικῆς ῥίζης. Εὑρεθήσεται δὲ ἡ ἔκθεσις $\sqrt{\zeta^2 - \frac{\nu^3}{27}} = \frac{17}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}$ οὕτως· τεθέντων τῶν εἰρημένων ἀριθμῶν ἀντὶ τῶν γραμμάτων, ἔσεται $\sqrt{\zeta - \frac{\nu^3}{27}} = \sqrt{\frac{10000}{27\cdot 27} - \frac{2197}{27\cdot 27}} = \sqrt{\frac{7803}{27\cdot 27}} = \sqrt{\frac{289}{27}} = \sqrt{\frac{289}{9}\cdot\frac{1}{3}}$· ἐπεὶ δὲ τοῦ μὲν $\frac{289}{9}$ τετραγωνικὴ ῥίζα ἐσὶν ὁ $\frac{17}{3}$ τοῦ δὲ $\frac{1}{3}$, ἄρρητος, ἐξαχθείσης τῆς τοῦ $\frac{289}{9}$ ῥίζης, ἔσεται $\sqrt{\frac{289}{9}\cdot\frac{1}{3}} = \frac{17}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}$. αἱ δὲ κυβικαὶ ῥίζαι τῶν προκειμένων κυβικῶν ῥιζῶν εὑρεθήσονται οὕτως· ὡς κύβου λογισθέντος τοῦ $\frac{100}{27} - \frac{17}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}$, ἢ τοῦ πρώτου μέρους, ἤτουν τοῦ $\frac{100}{27}$ προσεχὴς κυβικὴ ῥίζα ἐσὶν ὁ $\frac{4}{3}$. ἐὰν οὖν διὰ τοῦ τριπλασίου τοῦ τετραγώνου αὐτῆς, τουτέσι τοῦ $\frac{16}{9}\cdot 3 = \frac{16}{3}$ διέλῃς τὸ δεύτερον μέρος, ἤτοι τὸ $\frac{17}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}$, (§. 90.) τὸ προσεχὲς πηλίκον, ὅπερ ἐσὶ τὸ $\sqrt{\frac{1}{3}}$ ἔσαι τὸ δεύτερον μέρος τῆς ζητουμένης ῥίζης. διὸ ὅλη ἡ ζητουμένη κυβικὴ ῥίζα ἴση ἐσὶ $\frac{4}{3} - \sqrt{\frac{1}{3}}$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'.

§. 128. Ἐκ τῆς πρώτης πράξεως δῆλον, ὅτι πρὸς τὸ μεταβαλεῖν τὴν τοῦ τρίτου βαθμοῦ ἐξίσωσιν εἰς ἑτέραν, ἐν ᾗ οὐκ ἔσιν ἔκθεσις περιέχουσα τὸ ἄγνωσον τὸ ἐκθέτην ἔχον τὴν δυάδα, τιθέναι δεῖ τὸ τῆς προκειμένης ἐξισώσεως ἄγνωσον ἴσον, ἤτοι τῇ διαφορᾷ ἑτέ-

ρου

ρου ἀγνώστου καὶ τοῦ τριτημορίου τοῦ συμπράκτορος τοῦ ἀγνώστου, τοῦ ἐν τῇ προκειμένῃ ἐξισώσει τὴν δυάδα ἐκθέτην ἔχοντος, ὡς δὴ καὶ εὕρηται $\Phi = \chi - \frac{a}{3}$, ἢ τῷ κεφαλαίῳ, τουτέστι τὸ $\Phi = \chi + \frac{a}{3}$. καὶ τοῦτο μὲν τίθεται ἀποφατικῆς οὔσης τῆς ἐκθέσεως, τῆς περιεχούσης τὸ ἀπὸ τοῦ ἀγνώστου τετράγωνον, ἤτουν τὸ τὴν δυάδα ἐκθέτην ἔχον ἄγνωστον· ἐκεῖνο δὲ, καταφατικῆς οὔσης, ὡς ἐν τῷ προκειμένῳ ὑποδείγματι.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Β'.

§. 129. Ἐν τῇ δευτέρᾳ πράξει εἴρηται, κείσθω τὸ χ ἴσον δυσὶν ἀγνώστοις. ἰστέον οὖν, ὅτι ἐὰν μὲν ἀποφατικὴ ᾖ ἡ ἔκθεσις ἡ περιέχουσα τὴν πρώτην τοῦ ἀγνώστου δύναμιν, ὥσπερ ἡ ἐν τῇ κατὰ τὸ Γ ἐξισώσει, (ζ) τότε τιθέναι δεῖ τὸ ἄγνωστον ἴσον τῷ κεφαλαίῳ δύω ἀγνώστων, καθὰ δὴ καὶ ἐτέθη· ἐὰν δὲ ἡ ῥηθεῖσα ἔκθεσις καταφατικὴ ᾖ, ὥσπερ ἡ ἐν τῇ κατὰ τὸ Λ (η) ἐξισώσει, (εἰς ἣν μεταβέβληται ἡ ἐν τῷ Χ, (πίν. XV.) τεθέντος τοῦ Φ ἴσου τοῖς ἐν τῷ Ψ.) ἴσον τῇ διαφορᾷ δύω ἀγνώστων. τεθέντος γὰρ τοῦ χ ἴσου τοῖς ἐν τῷ Β, ἡ ἐν τῷ Γ προκύπτει ἐξίσωσις. καὶ τῶν ἐν τῷ Δ καὶ Ε συσταθεισῶν ἐξισώσεων, εὑρίσκεται τὸ μὲν Ω ἴσον τοῖς ἐν τῷ Ζ, τὸ δὲ Ω^3 τοῖς ἐν τῷ Η. ἐξ ὧν ἡ ἐν τῷ Θ γίνεται ἐξίσωσις διὰ τὴν ἐν τῷ Ε. ἐκ δὲ τῆς ἐν τῷ Θ ἡ ἐν τῷ Ι, ἐξ ἧς ἡ ἐν τῷ Κ, ἐξ αὐτῆς δὲ ἡ ἐν τῷ Λ, ἐξ ἧς ἡ ἐν τῷ Μ. ἐξ αὐτῆς δὲ διὰ τὴν ἐν τῷ Ε, ἡ ἐν τῷ Ν προκύπτει. διὸ δὴ τὸ μὲν y ἴσον τοῖς ἐν τῷ Ξ, τὸ δὲ Ω τοῖς ἐν τῷ Ο. οὐκοῦν τὸ μὲν χ ἴσον τοῖς ἐν τῷ Π· τὸ δὲ Φ, τοῖς ἐν τῷ Ρ, ἤτουν τῷ 3.

ΣΗ-

(ζ) Πίν. XIV. (η) Πίν. XVI.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Γ'.

§. 130. Εἰδέναι δὲ δεῖ, ὅτι οὐκ ἔστι γενικὴ αὕτη ἡ μέθοδος. οὐδὲ γὰρ εὕρηται ἄχρι τοῦ νῦν γενικὸς τοῦ ἐπιλύειν τὰ τοῦ τρίτου βαθμοῦ προβλήματα κανὼν, κἂν ἅπασι τοῦτο τοῖς μαθηματικοῖς περισπούδαστον. ἐκ τούτου γὰρ τῶν ἀνωτέρων βαθμῶν τὰ προβλήματα τὴν λύσιν πορίζεται. ὅρα δὲ, ὅτι τὸ ὑπὸ τῆς $\sqrt[3]{\frac{748}{27}+\frac{7}{3}\sqrt{141}}$ ἐμφαινόμενον ἄῤῥητόν ἐστιν, ὁμοίως καὶ τὸ ὑπὸ τῆς $\sqrt[3]{-\frac{748}{27}+\frac{7}{3}\sqrt{141}}$. καὶ γὰρ τὴν κυβικὴν αὐτῶν εὑρεῖν ῥίζαν διὰ τῶν γνωστῶν μεθόδων ἀμήχανον. (θ) ἡ δὲ $\frac{11}{6}+\frac{1}{6}\sqrt{141}$ καὶ ἡ $-\frac{11}{6}+\frac{1}{6}\sqrt{141}$, ἐξ ὧν ἐγνώσθη τὸ χ, εὕρηνται, γνωστοῦ ληφθέντος τοῦ Φ, ὡς δῆλον ἐκ τῆς ἐν τῷ Χ ἐξισώσεως, τῆς ἐν τῷ XV πίνακι. τοῦ γὰρ Φ ἴσου ὄντος τῷ 3, τὸ $\chi = 3+\frac{2}{3}$, ὅθεν τὸ $\chi = \frac{11}{3}$, ὡς ἐκ τῆς κατὰ τὸ Ψ ἐξισώσεως δῆλον. ἐπεὶ δὲ τέθειται (ι) τὸ $\chi = y - \Omega$, ἄρα καὶ τὸ $y - \Omega = \frac{11}{6}$ καὶ ἐπεὶ τὸ Ω ἴσον τοῖς ἐν τῷ Ζ, ἡ ἐν τῷ Α (κ) προκύπτει ἐξίσωσις, ἐξ ἧς ἡ ἐν τῷ Β γίνεται. καὶ ἐξ αὐτῆς ἀπαρτισθέντος τοῦ τετραγώνου, ἡ ἐν τῷ Γ· ἐξ ἧς ἡ ἐν τῷ Δ. διὸ τὸ μὲν y ἴσον τοῖς ἐν τῷ Ε· τὸ δὲ Ω, τοῖς ἐν τῷ Ζ. τῷ αὐτῷ δὴ τρόπῳ τιθεμένου τοῦ $\Phi = 2$, εὑρίσκεις τὰς ἐν τῷ (§. 127.) κυβικὰς ῥίζας.

ΚΕΦ.

(θ) Ἣν ὁ Οὔολφιος παραδίδωσι, (προβλ. 169. §. 360. τῆς Ἀλγ.) λίαν ἀτελής. καταντᾷ γὰρ πάλιν εἰς ζήτησιν ἐπιλύσεως προβλήματος τρίτου βαθμοῦ.

(ι) Πίν. XVI. (κ) Πίν. XVII.

ΚΕΦ. ΙΑ'.

Περὶ τῆς μεθόδου τοῦ εὑρίσκειν τὸ ἄγνωστον ἐν ταῖς τοῦ τετάρτου βαθμοῦ ἐξισώσεσι.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'.

§. 131. Τὸ ἐν τῇ κατὰ τὸ Η τοῦ τετάρτου βαθμοῦ ἐξισώσει ἄγνωστον, τὸ ἐν πάσαις ταῖς ἐκθέσεσι τὴν τετράδα ἐκθέτην ἔχον εὑρεῖν.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

Α'. Γεγονέτω ἅπαντα ὅσα ἐν §. 117. εἴρηται. οὐκοῦν ἡ ἐν τῷ Θ προκύψει ἐξίσωσις.

Β'. Ἐξήχθω ἑκατέρων τῶν τῆς ἐξισώσεως μερῶν ἡ τῆς τετάρτης δυνάμεως ῥίζα. τὸ ἄρα ἄγνωστον χ ἴσον τοῖς ἐν τῷ Ι.

Γ'. Πολλαπλασιασθήτω ἡ ῥίζα διὰ τῶν μοναδικῶν ῥιζῶν τῆς τετάρτης δυνάμεως. οὐκοῦν τὸ χ ἴσον ἔσται τοῖς κατὰ τὰ Κ, Λ, Μ, καὶ Ν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'.

§. 132. Τὸ ἐν τῇ κατὰ Ξ δοθείσῃ τοῦ τετάρτου βαθμοῦ ἐξισώσει ἄγνωστον, τὸ διαφόρους ἔχον ἐκθέτας εὑρεῖν.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

Α'. Τοῦ Φ ἴσου τεθέντος τοῖς ἐν τῷ Ο, μεταβεβλήσθω ἡ ἐξίσωσις εἰς τὴν ἐν τῷ Π, ᾗ λείπει ἡ ἔκθεσις ἡ τὸν κύβον τὸν ἀπὸ τοῦ ἀγνώστου περιέχουσα, ἐξ ἧς γίνεται ἡ ἐν τῷ Ρ. εὐχερείας δὲ χάριν συσταθεισῶν τῶν ἐξισώσεων τῶν ἐν τοῖς Σ, Τ, Υ, ἡ ἐν τῷ Ρ εἰς τὴν ἐν τῷ Φ μεταβληθήσεται, ἐξ ἧς ἡ ἐν τῷ Χ γίνεται.

Β'. Κείσθω τὴν ἐν τῷ Χ ἐξίσωσιν τὸ γινόμενον εἶναι τῶν δύο ἐξισώσεων τῶν ἐν τοῖς Ψ καὶ Ω. τὴν ἑτέραν δὲ διὰ τῆς ἑτέρας πολλαπλασιάσας, ἕξεις τὴν ἐν τῷ A ἐξίσωσιν. ἐκεῖν οἱ μὲν τοῦ χ^2 συμπεράκτορες ἴσοι ἔσονται τῷ εν τῷ C· οἱ δὲ τοῦ χ, τῷ ἐν τῷ D· τὸ δὲ πy, τῷ ἐν τῷ e, διὰ τὸ εἶναι δῆθεν τὴν ἐν τῷ A ἴσην τῇ ἐν τῷ X. προκύψει ἂν ἐκ μὲν τῆς ἐν τῷ C ἐξισώσεως ἡ ἐν τῷ F· ἐκ δὲ τῆς ἐν τῷ D ἡ ἐν τῷ G.

Γ'. Τὴν ἐν τῷ y ἐξίσωσιν, ἤτοι τὰ μέρη αὐτοῖς, τοῖς μέρεσι τοῖς ἐν τῷ F πρόσθες, εἶτα ἄφελε. ἐκεῖν προκύψουσιν αἱ ἐν τῷ L καὶ M ἐξισώσεις. τῆς ἑτέρας δὲ διὰ τῆς ἑτέρας πολλαπλασιασθείσης, ἡ ἐν τῷ N προκύψει. ἐξ ἧς, διὰ τὴν ἐν τῷ O, ἡ ἐν τῷ Q γίνεται. ἐξ αὐτῆς δὲ ἡ ἐν τῷ R

Ἐπεὶ ἐν ἡ ἐξίσωσις αὕτη τοῦ τρίτου βαθμοῦ ἐστίν, εὑρεθήσεται τὸ ἐν αὐτῇ ἄγνωστον Ω διὰ τῶν εἰρημένων ἐν §. 126. διὰ δὲ τὰς ἐν τῷ L καὶ M ἐξισώσεις γνωστὰ ἔσονται καὶ τὰ π, y· ἐξ ὧν καὶ τὸ χ γνωσθήσεται διὰ τὰς ἐν τοῖς Ψ καὶ Ω τοῦ δευτέρου βαθμοῦ ἐξισώσεις, ἐξ οὗ δῆλον ὅτι καὶ τὸ Φ, διὰ τὴν ἐν τῷ O ἐξίσωσιν.

ΣΥΝΕΠΕΙΑ

§. 133. Ἐκ τῶν ἐν τῇ Γ πράξει εἰρημένων δῆλον, ὅτι ἡ τῶν τοῦ τετάρτου βαθμοῦ προβλημάτων ἐπίλυσις ἀπὸ τῆς τοῦ τρίτου ἤρτηται.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'.

§. 134. Τέσσαρες εὑρεθήσονται αἱ τοῦ χ ῥίζαι, δύω δι' ἑκατέρας τῶν ἐν τοῖς Ψ καὶ Ω τοῦ δευτέρου βαθμοῦ ἐξισώσεων. τούτων δὲ ἤτοι δύω μὲν πραγματικαί, δύω δὲ ἐπίπλαστοί εἰσιν, ἢ ἅπασαι πραγματικαί, ὡς ἐν τῷ ἑξῆς ιβ. κεφαλαίῳ δείκνυται.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'.

§. 135. Ὁμοίᾳ μεθόδῳ εὑρεῖν ἔνεστι τὸ ἄγνωστον ἐν ταῖς τῶν ἀνωτέρων βαθμῶν ἐξισώσεσι. τίθεται γὰρ τὴν

τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν γινόμενον εἶναι δύω ἐξισώσεων, ὧν ἡ μὲν τοῦ δευτέρου βαθμοῦ ἐστίν, ἡ δὲ βαθμοῦ ἐμφαινομένου ὑπὸ τοῦ λοιποῦ ἀριθμοῦ τοῦ μεγίστου ἐκθέτου τοῦ ἀγνώστου, τοῦ ἐν τῇ δοθείσῃ ἐξισώσει, τῆς δυάδος ἀφαιρεθείσης. οἷον, ἐὰν ὁ μέγιστος τοῦ ἀγνώστου ἐκθέτης ἐν τῇ δοθείσῃ ἐξισώσει ᾖ ὁ 7, τίθεται τὴν μὲν τῶν ἐξισώσεων τοῦ δευτέρου βαθμοῦ εἶναι, τὴν δὲ βαθμοῦ 7 — 2, ὅπερ ἐστὶ βαθμοῦ πέμπτου. συμπράκτορες δὲ τῶν ἀγνώστων οἱ αὐτοὶ τίθενται ἐν ἑκατέρᾳ τῶν ἐξισώσεων, ἀλλ' ἐν θατέρᾳ μὲν καταφατικοί, ἐν τῇ ἑτέρᾳ δὲ ἀποφατικοί. τούτου γὰρ κειμένου ἐκλείπει τὸ ἄγνωστον τὸ ἔχον τὸν μείζονα ἐκθέτην μετὰ τὸν μέγιστον. ἑκάστης δὲ ἐκθέσεως τοῦ ἐκ τῶν ἐξισώσεων τούτων γινομένου παρατιθεμένης ἑκάστῃ τῶν τῆς δοθείσης ἐξισώσεως, αἱ ἐξισώσεις γίνονται, ἐξ ὧν ἡ τοῦ ζητουμένου ἀγνώστου πορίζεται εὕρεσις, ὡς ἐν §. 132. εἴρηται.

ΚΕΦ. ΙΕ'.

Περὶ τῆς τῶν μοναδικῶν ῥιζῶν εὑρέσεως.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'.

§. 136. Τὰς τετραγωνικὰς τῆς μονάδος εὑρεῖν ῥίζας.

Κείσθω τὸ $\chi^2 = 1$. τὸ ἄρα $\chi = 1$. διὸ καὶ τὸ $\chi^2 - 1 = 0$, καὶ τὸ $\chi - 1 = 0$. οὐκοῦν καὶ τὸ $\frac{\chi^2 - 1}{\chi - 1} = 0$.

ἀλλὰ τὸ $\frac{\chi^2 - 1}{\chi - 1} = \chi + 1$. (ἐὰν γὰρ διέλῃς τὸ $\chi^2 - 1$ διὰ τοῦ $\chi - 1$, τὸ πηλίκον ἔσται $\chi + 1$.) ἄρα καὶ τὸ $\chi + 1 = 0$. τὸ ἄρα $\chi = -1$. οὐκοῦν δύω αἱ τετραγωνικαὶ τῆς μονάδος ῥίζαι, ἡ $+1$, καὶ ἡ -1.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'.

§. 137. Τὰς κυβικὰς τῆς μονάδος εὑρεῖν ῥίζας. Κεί-

Κείσθω τὸ $\chi^3=1$. τὸ ἄρα $\chi=1$. διὸ τό, τε $\chi^3-1=0$, καὶ τὸ $\chi-1=0$. οὐκοῦν καὶ τὸ $\frac{\chi^3-1}{\chi-1}=0$. ἀλλὰ τὸ $\frac{\chi^3-1}{\chi-1}=\chi^2+\chi+1$. ἄρα καὶ τὸ $\chi^2+\chi+1=0$. ἄρα καὶ τὸ $\chi^2+\chi=-1$. οὐκοῦν τοῦ τετραγώνου πληρωθέντος, ἔσεται τὸ $\chi^2+\chi+\frac{1}{4}=-\frac{3}{4}$. τὸ ἄρα $\chi=-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-3}$. τρεῖς ἄρα αἱ κυβικαὶ τῆς μονάδος ῥίζαι, αἱ ἐν τῷ S ὁρώμεναι.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'.

§. 138. Τὰς μοναδικὰς τῆς τετάρτης δυνάμεως ῥίζας εὑρεῖν.

Κείσθω τὸ $\chi^4=1$. τὸ ἄρα $\chi^2=\pm1$. διὸ τὸ $\chi=\sqrt{\pm1}$. τέσσαρες ἄρα αἱ μοναδικαὶ τῆς τετάρτης Δυνάμεως ῥίζαι, αἱ ἐν τῷ U ὁρώμεναι.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'.

§. 139. Τὰς μοναδικὰς ῥίζας τῆς πέμπτης Δυνάμεως εὑρεῖν.

Κείσθω τὸ $\chi^5=1$. ἄρα τὸ $\chi=1$. διὸ τό, τε $\chi^5-1=0$, καὶ τὸ $\chi-1=0$. οὐκοῦν καὶ τὸ $\frac{\chi^5-1}{\chi-1}=0$. ἀλλὰ τὸ $\frac{\chi^5-1}{\chi-1}=\chi^4+\chi^3+\chi^2+\chi+1$. τὸ ἄρα $\chi^4+\chi^3+\chi^2+\chi+1=0$. κείσθω τὴν ἐξίσωσιν ταύτην τὸ γινόμενον εἶναι τῶν ἐν τῷ Α ἐκθέσεων. (λ) οὐκοῦν προκύψει ἡ ἐν τῷ Β ἐξίσωσις. ἐξ ἧς δῆλον, ὅτι τά, τε $\kappa+\varphi=1$, καὶ τὰ $2+\varphi\kappa=1$. διὸ τὸ μὲν $\kappa=1-\varphi$, τὸ δὲ $\varphi\kappa=-1$. ἀντὶ δὲ τοῦ κ ἐν ταύτῃ τῇ ἐξισώσει τεθέντος τοῦ $1-\varphi$, ἔσεται τὸ $\varphi-\varphi^2=-1$,

ἤτουν

(λ) Πίν. XVIII.

ὄντων τὸ $\phi^2 - \phi = 1$. καὶ τοῦ τετραγώνου πληρωθέντος, προκύψει ἡ ἐν τῷ Γ ἐξίσωσις, ἐξ ἧς δῆλον ὅτι τὸ μὲν φ ἴσον τοῖς ἐν τῷ Δ, τὸ δὲ κ τοῖς ἐν τῷ Ε. τεθέντων οὖν ἐν ταῖς κατὰ τὸ Λ ἐκθέσεσιν ἀντὶ τῶν φ καὶ κ τῶν ἄρτι εὑρεθέντων αὐτοῖς ἴσων, αἱ ἐν τῷ Ζ καὶ Η ἐξισώσεις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ γίνονται. διὸ διὰ μὲν τῆς κατὰ τὸ Ζ τὸ χ ἴσον εὑρίσκεται τοῖς ἐν τῷ Θ· διὰ δὲ τῆς κατὰ τὸ Η, τοῖς ἐν τῷ Ι. πέντε ἄρα αἱ μοναδικαὶ τῆς πέμπτης Δυνάμεως ῥίζαι, αἱ ἐν τῷ Κ ὁρώμεναι.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε΄.

§. 140. Τὰς μοναδικὰς ῥίζας τῆς ἕκτης Δυνάμεως εὑρεῖν.

Κείσθω τὸ $\chi^6 = 1$. τὸ ἄρα $\chi^3 = \pm 1$. ἀλλ᾽ αἱ μὲν τοῦ $+1$ κυβικαὶ ῥίζαι εἰσὶν αἱ ἐν τῷ Λ ὁρώμεναι· αἱ δὲ τοῦ -1, αἱ ἐν τῷ Μ. ἓξ ἄρα εἰσὶν αἱ μοναδικαὶ τῆς ἕκτης Δυνάμεως ῥίζαι, αἱ ἐν τοῖς Λ, καὶ Μ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ϛ΄.

§. 141. Τὰς μοναδικὰς ῥίζας τῆς ἑβδόμης Δυνάμεως εὑρεῖν.

Κείσθω τὸ $\chi^7 = 1$, τὸ ἄρα $\chi = 1$. διὸ τότε $\chi^7 - 1 = 0$, καὶ τὸ $\chi - 1 = 0$. οὐκοῦν καὶ τὸ $\frac{\chi^7 - 1}{\chi - 1} = 0$. ἀλλὰ τὸ $\frac{\chi^7 - 1}{\chi - 1} = \chi^6 + \chi^5 + \chi^4 + \chi^3 + \chi^2 + \chi + 1$. τὸ ἄρα $\chi^6 + \chi^5 + \chi^4 + \chi^3 + \chi^2 + \chi + 1 = 0$. κείσθω τὴν ἔκθεσιν ταύτην τὸ γινόμενον εἶναι τῶν ἐν τοῖς Ν καὶ Ξ ἐκθέσεων. οὐκοῦν τῆς ἑτέρας διὰ τῆς ἑτέρας πολλαπλασιασθείσης, προκύψει ἡ ἐν τῷ Ο ἐξίσωσις· ἐξ ἧς γίνονται αἱ ἐν τῷ Π καὶ Ρ, καὶ Σ. καὶ ἐκ μὲν τῆς ἐν τῷ Π, ἡ ἐν τῷ Τ γίνεται, ἐκ δὲ τῆς ἐν τῷ Ρ, ἡ ἐν τῷ Υ. ἐν τῇ οὖν κατὰ τὸ Σ ἀντὶ τοῦ α καὶ β^2 τεθέντων τῶν ἴσων αὐτοῖς, τῶν ἐν ταῖς ἐξισώσεσι Τ καὶ Υ, ἡ ἐν τῷ Φ προκύπτει, ἐξ ἧς ἡ ἐν τῷ Χ γίνεται, ἡ αὐτὴ ὖσα τῇ ἐν τῷ Ψ. δι' αὐτῆς ὖν τρεῖς εὑρεθήσονται αἱ τῦ Φ ῥίζαι. (§. 126.) ἑκάστης δὲ αὐτῶν ἀντὶ τῦ Φ τεθείσης ἐν τῇ κατὰ τὸ Ν τῦ δευτέρε βαθμῦ ἐξισώσει, τρεῖς τῦ αὐτῦ βαθμῦ ἐξισώσεις συναχθήσονται, δι' ἑκάστης δὲ αὐτῶν δύω τῦ χ ῥίζαι εὑρεθήσονται. καὶ ὕτως ἑπτὰ ἔσονται αἱ μοναδικαὶ τῆς ἑβδόμης Δυνάμεως ῥίζαι, ἓξ μὲν αἱ διὰ τῶν εἰρημένων τριῶν ἐξισώσεων προκύπτυσαι, μία δὲ ἡ ἤδη εὑρεθεῖσα, ἤτοι ἡ 1.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ζ'.

§. 142. Τὰς μοναδικὰς ῥίζας τῆς Δυνάμεως ν εὑρεῖν.

Κείσθω τὸ $\chi^\nu = 1$. τὸ ἄρα $\chi = 1$. διὸ τό,τε $\chi^\nu - 1 = 0$, καὶ τὸ $\chi - 1 = 0$. ὅθεν καὶ τὸ $\frac{\chi^\nu - 1}{\chi - 1} = 0$.

κείσθω τὸ τῆς ἐκθέσεως ταύτης πηλίκον τὸ γινόμενον εἶναι τῆς ἐν τῷ Ω καὶ τῆς ἐν τῷ Α ἐκθέσεως, ἐὰν τὸ ν περιττὸν ἐμφαίνῃ ἀριθμόν· τῆς ἐν τῷ Ω δὲ καὶ τῆς ἐν τῷ C, ἐὰν τὸ ν ἄρτιον σημαίνῃ. (ὕτω δὲ τὰς ἐν τῷ Α καὶ C ἐκθέσεις κατασκευάζειν χρὴ, ὥστε τὸ μὲν ἔχατον αὐτῶν μέρος, τὸ πρὸ τῆς μονάδος, τὸ ἄγνωστον περιέχειν, ἐκθέτην ἔχον τὴν μονάδα· ὅπερ γίνεται, ἐπειδὰν $\nu - 6 = 1$, ἢ $\nu - 5 = 1$· τὺς δὲ τῦ ἀγνώστυ συμπράκτορας, μετὰ τὸ τὸν μέσον τόπον ἐπέχον μέρος, ἐπαναλαμβάνειν, ὅπερ ἐστὶ τὺς αὐτὺς τιθέναι, ὓς τὰ πρὸ τῦ μέσυ μέρυς ἔχυσιν ἄγνωστα.) ἑτέρας δὲ, τῆς ἐν τῷ Ω, διὰ τῆς ἑτέρας, τῆς μὲν ἐν τῷ Α, ἐὰν τὸ ν περιττὸν δηλοῖ ἀριθμὸν, τῆς δὲ ἐν τῷ C, ἐὰν ἄρτιον, πολλαπλασιασθείσης, καὶ διὰ τῆς παραθέσεως τῶν συμπρακτόρων τῶν μερῶν τῦ γινομένυ, καὶ τῦ πηλίκυ τῦ $\frac{\chi^\nu - 1}{\chi - 1}$

συγκροτηθεισῶν τῶν δευσῶν ἐξισώσεων, ἐξίσωσις προκύψει, ἐν ᾗ ὁ μέγισος τῦ ἀγνώσυ φ ἐκθέτης ἔσεται $\frac{\nu-1}{2}$, ἐὰν τὸ ν περιττὸν ἐμφαίνῃ ἀριθμὸν, $\frac{\nu}{2}$ δὲ ἐὰν ἄρτιον. ὅθεν αἱ τῦ φ ῥίζαι εὑρεθήσονται ἤτοι ἴσαι τὸν ἀριθμὸν τῦ $\frac{\nu-1}{2}$, ἢ τῦ $\frac{\nu}{2}$. ἑκάσης δὲ τύτων ἐν τῇ κατὰ τὸ Ω ἐκθέσει τεθείσης ἀντὶ τῦ φ, αἱ τῦ χ ῥίζαι εὑρεθήσονται ἰσάριθμοι τῷ ν.

ΚΕΦ. ΙϚ'.

Περὶ προβλημάτων.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'.

§. 143. Δύω τὰ τῶν προβλημάτων εἴδη· **Ἀόριςα**, τὰ ἀπειροαρίθμυς ἐπιδεχόμενα ἐπιλύσεις· καὶ **Ὡρισμένα**, ὧν ὁ τῶν ἐπιλύσεων ἀριθμὸς ὡρισμένος ἐςί.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 144. Προκείσθω δεῖν εὑρεῖν δύω μεγέθη, λόγον ἔχοντα πρὸς ἄλληλα, ὃν τὸ α : β. Ἔςω δὴ ὖν τὸ μὲν τῶν μεγεθῶν, χ, τὸ δὲ, y. ὐκῦν ἔςαι ὡς α : β : : χ : y. ἐκκείσθωσαν ὖν δύω εὐθεῖαι, (μ) αἱ ΑΒ, ΒΓ, γωνίαν τυχῦσαν τὴν ΑΒΓ περιέχυσαι· καὶ ἔςω ἡ μὲν ΑΒ = α, ἡ δὲ ΒΓ = β, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΓ. ἐὰν ὖν ληφθῇ ἡ ΑΔ = χ, ἔςαι ἡ ΔΕ, ἡ ἀπὸ τῦ Δ σημείυ ἀγομένη παράλληλος τῇ ΒΓ, ἴση τῷ y. ἔςι γὰρ ὡς ΑΒ : ΒΓ : : ΑΔ : ΔΕ. πάλιν ληφθείσης τῆς ΑΖ = χ, ἔςαι ἡ ΖΗ, ἡ τῇ ΒΓ παράλληλος, ἴση τῷ y. ὁμοίως ἐκβληθεισῶν κατὰ τὸ συνεχὲς τῶν ΑΒ, ΑΓ, καὶ ληφθεί-

(μ) Πιν. XIX. χ. 1.