ΚΕΦ. Ι'.

Περὶ Ἐξισώσεως.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 93. Ἐξίσωσίς ἐςιν ἡ δύω ἴσων, εἴτε διὰ τῶν αὐτῶν, εἴτε διὰ διαφόρων γραμμάτων παριςαμένων, παράθεσις.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 94. Οἷον, κειμένυ τῦ α ἴσυ εἶναι τῷ β καὶ γ, καὶ παρατιθεμένυ τῦ α τοῖς β, γ, γίνεται ἡ ἐξίσωσις $\alpha = \beta + \gamma$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'.

§. 95. Παντὸς ἀριθμητικῦ τε καὶ γεωμετρικῦ προβλήματος ἡ λύσις διὰ τῆς ἐξισώσεως πορίζεται. ταύτης γὰρ συςαθείσης, ῥᾷον διὰ τῶν κανόνων ἔνεςιν εὑρεῖν τὸ ζητέμενον.

ΟΡΟΣ.

§. 96. Τὰς ἐπίλυσιν προβλήματος εὑρεῖν ἐθέλοντας, πρῶτον κατανοῆσαι δεῖ ἀκριβῶς ὁποῖον μὲν τὸ ζητέμενον, τίνα δὲ τὰ δοθέντα· εἶτα τῦ ζητεμένυ δι' ἑνὸς τῶν ἐχάτων ςοιχείων σημειωθέντος, τὸν νῦν πάσαις ταῖς τῦ προβλήματος ἐπιςήσαντας συνθήκαις, ἐξ αὐτῶν δύω τινὰ ἴσα συγκροτῆσαι, ἐκ πάντων τῶν δοθέντων ἢ τῦ ζητεμένυ συγκείμενα, τῇ τέτων δὲ παραθέσει συςῆσαι τὴν ἐξίσωσιν.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 97. Προκείσθω παράδειγμα τόδε τὸ πρόβλημα. α μὲν ὀβολὰς, ἔφη τὶς πρὸς ἕτερον, δεδωκότος μυ σήμερον τοῖς πένησιν, οἱ λοιποὶ ὀβολοὶ ἦσαν κ· β δὲ, οἱ λοιποὶ ἦσαν ζ. πόσοι ὖν ἄρα οἱ ἐλεηθέντες; πρῶτον ὖν σκέπτομαι, ὅτι τὸ μὲν ζητέμενον, ὃ καλῶ χ, ἐςὶν ὁ τῶν ἐλεηθέντων πενήτων ἀριθμός· τὰ δὲ δοθέντα εἰσὶν οἷτε οἵτε διανεμηθέντες ὀβολοὶ, καὶ οἱ αὐτῷ καταλειφθέντες. εἶτα τὰς τοῦ προβλήματος ἀναλογισάμενος συνθήκας, φημὶ, εἰ ἑνὶ τῶν πενήτων δέδωκεν ὀβολοὺς α, πᾶσιν ἄρα ὁμοῦ δέδωκεν $\alpha\chi$. ὡς γὰρ $1 : \alpha :: \chi : \alpha\chi$. ἀλλὰ δεδωκότος αὐτοῦ ἑνὶ ἑκάστῳ α, τὸ λοιπὸν ἦν κ, τὸ ἄρα $\alpha\chi$ σὺν τῷ κ, ἤτοι τὸ $\alpha\chi + \kappa$, τὸν ἀριθμὸν δηλοῖ τῶν ὀβολῶν τοῦ ἐλεήσαντος τοὺς πένητας. πάλιν ἐπειδὴ, φησὶν, ἑνὶ ἑκάστῳ τῶν πενήτων δέδωκε β, πᾶσιν ἄρα ὁμοῦ δέδωκε $\beta\chi$. ἐπεὶ δὲ δόντος αὐτοῦ ἑκάστῳ β, τὸ λοιπὸν ἦν ζ, ὅλος ἄρα ὁ τῶν ὀβολῶν, ὧν εἶχεν, ἀριθμὸς ἐμφαίνεται καὶ διὰ τοῦ $\beta\chi + \zeta$. ἰδοὺ οὖν δύω ἴσα, τὸ $\alpha\chi + \kappa$, καὶ $\beta\chi + \zeta$ (ἑκάτερον γὰρ τὸν αὐτὸν ἐμφαίνει τῶν ὀβολῶν ἀριθμὸν) συγκεκρότηται ἐκ πάντων τῶν δοθέντων καὶ τοῦ ζητουμένου συγκείμενα. ἐξ ὧν γίνεται ἡ ἐν τῷ Τ ἐξίσωσις. Τοῦ αὐτοῦ δὲ προβλήματος καὶ ἄλλως ἔνεστι τὴν λύσιν πορίσασθαι δι᾽ ἄλλης ἐξισώσεως. ἐπεὶ γὰρ ὁ ζητούμενος τῶν πενήτων ἀριθμὸς γνωστὸς καθίσταται, τοῦ τῶν ὀβολῶν ἀριθμοῦ γνωσθέντος, κείσθω οὗτος ἴσως τῷ y. ἐπεὶ οὖν ὅλος ὁ τῶν ὀβολῶν ἀριθμός ἐστιν y, λοιπὸς δὲ, ὁ μετὰ τὴν χορηγίαν ἦν κ, τὸ ἄρα $y - \kappa$ τοὺς ὀβολοὺς ἐμφαίνει τοὺς πᾶσι δοθέντας τοῖς πένησιν. ἐπεὶ δὲ οἱ ἑνὶ τῶν πενήτων δοθέντες ὀβολοὶ, πρὸς πάντας τοὺς δοθέντας λόγον ἔχουσιν, ὃν εἷς τῶν πενήτων πρὸς πάντας τοὺς πένητας, εἴτουν ἐστὶν ὡς $\alpha : y - \kappa :: 1 : \frac{y-\kappa}{\alpha}$, τὸ ἄρα $\frac{y-\kappa}{\alpha}$ τὸν ἀριθμὸν ἐμφαίνει πάντων τῶν ἐλεηθέντων πενήτων. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ $\frac{y-\zeta}{\alpha}$ τὸν αὐτὸν τῶν πενήτων ἐμφαίνει ἀριθμόν. ἐξ οὗ προκύπτει ἡ ἐν τῷ Υ ἐξίσωσις. πῶς δὲ ὁ ζητούμενος τῶν πενήτων

ἀριθ.

ἀριθμὸς χ, ἢ ὁ τῶν ὀβολῶν y, τουτέστι πῶς τὰ ἄγνωστα στοιχεῖα χ καὶ y, γνωστὰ γίνεται, κατωτέρω ἐροῦμεν.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β΄.

§. 98. Πρώτου μὲν βαθμοῦ ἡ ἐξίσωσις λέγεται, ἐὰν τὸ ἐν αὐτῇ ἄγνωστον γράμμα τὴν μονάδα ἔχῃ ἐκθέτην, ὡς ἡ ἐν τῷ Τ, καὶ ἡ ἐν τῷ Υ· δευτέρου δὲ, ἐὰν τὴν δυάδα, ὡς ἡ ἐν τῷ Φ, ἢ τὸ μὲν τὴν δυάδα, τὸ δὲ τὴν μονάδα, ὡς ἡ ἐν τῷ Χ· τοῦ τρίτου δὲ, ἐὰν τὴν τριάδα, ὡς ἡ ἐν τῷ Ψ, ἢ τὸ μὲν τὴν τριάδα, τὸ δὲ τὴν δυάδα, τὸ δὲ τὴν μονάδα, ὡς ἡ ἐν τῷ Ω· ὁμοίως τοῦ τετάρτου, ἐὰν τὴν τετράδα, καὶ τὰ ἑφεξῆς ὡσαύτως. συνίσταται δὲ καὶ ἐξίσωσις, ἐν ᾗ πολλὰ τὰ ἄγνωστα, οἷα ἡ ἐν τῷ Α. (λ)

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄.

§. 99. Τὰ ἰδιώματα εὑρεῖν τῆς τοῦ δευτέρου βαθμοῦ ἐξισώσεως.

Ἔστω τὸ $\chi = \gamma$, καὶ τὸ $\chi = \beta$, καὶ ἀπὸ μὲν τῆς πρώτης ἐξισώσεως ἀφαιρεθέντος ἑκατέρωθεν τοῦ γ, ἔσται $\chi - \gamma = 0$· ἀπὸ δὲ τῆς δευτέρας τοῦ β, ἔσται $\chi - \beta = 0$. ἑτέρας δὲ διὰ τῆς ἑτέρας πολλαπλασιασθείσης, τὸ γινόμενον ἔσται τὸ ἐν τῷ Β. οὐκοῦν τὰ ἰδιώματα τῆς τοῦ δευτέρου βαθμοῦ ἐξισώσεως εἰσὶ τὰ ἑξῆς.

Α΄. Τοσαῦται εἰσιν αἱ ῥίζαι, αἱ τῷ ἀγνώστῳ χ ἴσαι, ὅσαι αἱ μονάδες, αἱ ἐν τῷ μεγίστῳ αὐτοῦ ἐκθέτῃ. ὁ μὲν γὰρ μέγιστος ἐκθέτης τοῦ χ ἐν τῇ προκειμένῃ ἐξισώσει ἐστὶν ὁ 2· ἔχει δὲ τὸ χ δύο γνωστὰς ῥίζας, τὸ γ, καὶ β.

Β΄. Ὁ τοῦ δευτέρου μέρους συμπράκτωρ τὸ κεφάλαιόν ἐστι τῶν ῥιζῶν, σημεῖον ἔχον ἐναντίον. αἱ μὲν γὰρ ῥίζαι εἰσὶν αἱ $+\gamma$, καὶ $+\beta$, ὁ δὲ συμπράκτωρ τοῦ δευτέρου τῆς ἐξισώσεως μέρους τὸ $-\gamma$, καὶ $-\beta$.

Γ΄.

(λ) Πίν. Χ.

Γ'. Τὸ τῆς ἐξισώσεως τρίτον μέρος, εἴτουν τὸ $+\beta\gamma$, τὸ γινόμενόν ἐστιν ἐκ τῶν ῥιζῶν $+\gamma$, $+\beta$ σὺν τῷ ἰδίῳ σημείῳ.

Δ'. Ἐὰν ἀντὶ τοῦ χ ὁποτέραν θῇς τῶν ῥιζῶν, τὰ τῆς ἐξισώσεως μέρη ἐκλείψουσι, θατέρου ὑπὸ τοῦ ἑτέρου ἀναιρουμένου. οἷον, ἐὰν μὲν τὸ β ἀντὶ τοῦ χ τεθῇ, ἡ ἐξίσωσις εἰς τὴν ἐν τῷ Γ μεταβληθήσεται· ἐὰν δὲ τὸ γ, εἰς τὴν ἐν τῷ Δ. ἑκατέρας δὲ τούτων τὰ μέρη ἀναιροῦσιν ἄλληλα.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Γ'.

§. 100. Τὰ αὐτὰ μὲν ἰδιώματα ἔχει ἡ τοῦ δευτέρου βαθμοῦ ἐξίσωσις, κἂν ἀποφατικὴ ᾖ ἑκατέρα τῶν ῥιζῶν, ἤτοι κἂν τὸ $\chi = -\gamma$, καὶ τὸ $\chi = -\beta$, καταφατικὰ δέ εἰσιν ἅπαντα τὰ τῆς ἐξισώσεως μέρη, ὥσπερ τὰ τῆς ἐν τῷ Ε.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Δ'.

§. 101. Ἐὰν δὲ ἡ μὲν τῶν ῥιζῶν καταφατικὴ ᾖ, ἡ δὲ ἀποφατικὴ, οἷον ἐὰν τὸ $\chi = \gamma$, καὶ τὸ $\chi = -\beta$, τὰ αὐτὰ ἔχει ἰδιώματα ἡ ἐξίσωσις, οἷον ἡ ἐν τῷ Ζ. τὸ δὲ δεύτερον μέρος αὐτῆς καταφατικὸν μὲν ἔσται, ἐὰν ἡ ἀποφατικὴ $-\beta$ μείζων ᾖ τῆς καταφατικῆς γ· ἀποφατικὸν δὲ, ἐὰν ἡ καταφατικὴ γ μείζων τῆς ἀποφατικῆς $-\beta$. ἡ μὲν γὰρ καταφατικὴ γ μεταφερομένη, ἀποφατικὴ γίνεται, ἡ δὲ ἀποφατικὴ β, καταφατική. τὸ δὲ τρίτον τῆς ἐξισώσεως μέρος ἀποφατικόν ἐστι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 102. Ἐὰν οὖν καταφατικὴ μεν ᾖ ἑκατέρα τῶν ῥιζῶν, τὰ σημεῖα τῶν τῆς ἐξισώσεως μερῶν εἰσὶ τὰ ἐν τῷ Η· ἐὰν δὲ ἀποφατικὴ, τὰ ἐν τῷ Θ· ἐὰν δὲ θατέρα μὲν καταφατικὴ, ἡ ἑτέρα δὲ ἀποφατικὴ, τὰ ἐν τῷ Ι· ἤτοι τὰ ἐν τῷ Κ, ἐὰν ἡ ἀποφατικὴ μείζων τῆς

τῆς καταφατικῆς· ἢ τὰ ἐν τῷ Λ, ἐὰν ἡ καταφατικὴ μείζων τῆς ἀποφατικῆς.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'.

§. 103. Τὰ ἰδιώματα τῆς τȣ̃ τρίτȣ βαθμȣ̃ ἐξισώσεως εὑρεῖν. Ἔϛω $\chi = \alpha$. ἑκατέρωθεν δὲ τȣ̃ α ἀφαιρεθέντος, ἔϛαι $\chi - \alpha = o$. τῆς ἐξισώσεως ταύτης διὰ τῆς ἐν τῷ Β πολλαπλασιασθείσης, ἡ ἐν τῷ Μ προκύψει τȣ̃ τρίτȣ βαθμȣ̃ ἐξίσωσις, ἧς ἰδιώματα τὰ ἑξῆς.

Α'. Τοσαῦται εἰσιν αἱ ῥίζαι, ὅσαι αἱ μονάδες ἐν τῷ τȣ̃ χ μεγίϛῳ ἐκθέτῃ. τρεῖς γὰρ ἐν αὐτῷ αἱ μονάδες, τρεῖς δὲ εἰσι καὶ αἱ ῥίζαι, ἤτȣν, γ, β, α.

Β'. Ὁ τȣ̃ δευτέρȣ μέρȣς συμπεράκτωρ τὸ τῶν ῥιζῶν κεφάλαιόν ἐϛι, σημεῖον ἔχον τῶν ῥιζῶν ἐναντίον.

Γ'. Ὁ τȣ̃ τρίτȣ μέρȣς συμπεράκτωρ τὸ κεφάλαιόν ἐϛι τῶν γινομένων ἐκ τῶν ῥιζῶν, ἀνὰ δύω πολλαπλασιασθεισῶν, τὸ τῶν ῥιζῶν ἔχον σημεῖον.

Δ'. Τὸ τῆς ἐξισώσεως τέταρτον μέρος τὸ γινόμενόν ἐϛιν ἐκ πασῶν τῶν ῥιζῶν μετὰ ἐναντίȣ σημείȣ.

Ε'. Μιᾶς τῶν ῥιζῶν ὁποιασȣ̃ν ἀντὶ τȣ̃ χ ἐν τῇ ἐξισώσει τεθείσης, ἐκλείψȣσιν ἅπαντα αὐτῆς τὰ μέρη, θατέρȣ ὑπὸ τȣ̃ ἑτέρȣ ἀναιρȣμένȣ. τȣ̃ μὲν γὰρ γ τεθέντος ἀντὶ τȣ̃ χ, ἡ ἐξίσωσις εἰς τὴν ἐν τῷ Ν μεταβάλλεται· τȣ̃ β δὲ, εἰς τὴν ἐν τῷ Ξ· τȣ̃ α δὲ, εἰς τὴν ἐν τῷ Ο.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'.

§. 104. Τὰ αὐτὰ μὲν ἔχει ἰδιώματα ἡ ἐξίσωσις, ἐὰν ἅπασαι αἱ ῥίζαι ἀποφατικαὶ ὦσιν, ἤτȣν ἐὰν τὸ $\chi = -\gamma$, καὶ τὸ $\chi = -\beta$, καὶ τὸ $\chi = -\alpha$, τὰ δὲ τῶν μερῶν αὐτῆς σημεῖα καταφατικά εἰσιν ἅπαντα, ὡς τὰ τῆς ἐν τῷ Π.

ΣΗ-

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β΄.

§. 105. Ἐὰν ἡ μὲν τῶν ῥιζῶν, οἷον ἡ γ καταφατικὴ ᾖ, αἱ δύω λοιπαὶ, α καὶ β ἀποφατικαὶ, τοῦ μὲν δευτέρου μέρους τῆς ἐξισώσεως, τῆς ἐν τῷ Ρ, τὸ σημεῖον, ἤτοι καταφατικὸν ἐστιν ἢ ἀποφατικόν. καταφατικὸν μὲν ἐὰν ἡ καταφατικὴ ῥίζα γ ἐλάττων ᾖ τοῦ κεφαλαίου τῶν ἀποφατικῶν, ἤτοι ἐὰν τὸ $\gamma < \alpha\ \beta$. ἀποφατικὸν δὲ, ἐὰν μείζων, ἤτοι ἐὰν τὸ $\gamma > \alpha - \beta$. καὶ γὰρ αἱ ἀποφατικαὶ μεταφερόμεναι, καταφατικαὶ γίνονται, ἡ δὲ καταφατικὴ, ἀποφατικὴ, ὡς ἐκ τῆς προκειμένης ἐξισώσεως δῆλον. ὡσαύτως καὶ τὸ τοῦ τρίτου μέρους σημεῖον καταφατικὸν μὲν ἔσται, ἐὰν τὸ $\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} > \gamma$. ἀποφατικὸν δὲ, ἐὰν τὸ $\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} < \gamma$. ἐπεὶ γὰρ ὁ τοῦ τρίτου μέρους συμπράκτωρ ἐστὶ τὸ $\alpha\beta - \alpha\gamma - \beta\gamma$, δῆλον ὅτι ἐὰν μὲν τὸ $\alpha\beta > -\alpha\gamma - \beta\gamma$, τὸ σημεῖον καταφατικὸν ἔσται, ἐὰν δὲ τὸ $\alpha\beta < -\alpha\gamma - \beta\gamma$, ἀποφατικόν. ἔστι δὲ τὸ $\alpha\beta - \alpha\gamma - \beta\gamma = \alpha\beta + \alpha + \beta . - \gamma$. ταυτὸν δέ ἐστιν ἀφελεῖν ἀπὸ τοῦ $\alpha\beta$ τὸ γινόμενον ἐκ τῶν $\alpha + \beta$ καὶ γ, τῷ ἀφελεῖν ἀπὸ τοῦ $\alpha\beta$, διαιρεθέντος διὰ τοῦ $\alpha + \beta$, τουτέστιν ἀπὸ τοῦ $\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$ μόνον τὸ γ. ἡ γὰρ διαφορὰ ἡ αὐτή ἐστιν, ὡς καὶ ἐκ τῆς ἀριθμητικῆς δῆλον. τὸ δὲ τοῦ τετάρτου τῆς ἐξισώσεως μέρους σημεῖον ἀποφατικόν ἐστιν.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Γ΄.

§. 106. Ἐὰν δὲ ἡ μὲν τῶν ῥιζῶν, οἷον ἡ $-\gamma$ ἀποφατικὴ ᾖ, αἱ δὲ δύω λοιπαὶ, α καὶ β, καταφατικαὶ, τὸ τὸ μὲν τοῦ δευτέρου μέρους σημεῖον ἤτοι καταφατικὸν, ἢ ἀποφατικὸν ἔσαι· καταφατικὸν μὲν, ἐὰν τὸ τῶν καταφατικῶν κεφάλαιον ἔλαττον ᾖ τῆς ἀποφατικῆς, εἴτουν ἐὰν τὸ $\alpha + \beta < - \gamma$· (ὅρα τὴν ἐν τῷ Σ ἐξίσωσιν) ἀποφατικὸν δὲ, ἐὰν μεῖζον, ἤτοι ἐὰν $\alpha + \beta > \gamma$. ὡσαύτως τὸ τοῦ τρίτου, καταφατικὸν μὲν, ἐὰν τὸ $\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} > \gamma$· ἀποφατικὸν δὲ, ἐὰν τὸ $\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} < \gamma$. τοῦ δὲ τετάρτου τὸ σημεῖον καταφατικόν.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 107. Οὐκοῦν καταφατικῶν μὲν οὐσῶν ἁπασῶν τῶν ῥιζῶν τῆς τοῦ τρίτου βαθμοῦ ἐξισώσεως, τὰ τῶν μερῶν αὐτῆς σημεῖά εἰσι τὰ ἐν τῷ Τ· ἀποφατικῶν δὲ, τὰ ἐν τῷ Υ. ἐὰν δὲ ἡ μὲν καταφατική, αἱ δὲ δύω ἀποφατικαί, τὰ ἐν τῷ Φ. ἐξ ὧν γίνονται τὰ μὲν ἐν τῷ Χ, ἐὰν τὸ $\gamma < - \alpha - \beta$, καὶ τὸ $\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} > \gamma$· τὰ δὲ ἐν τῷ Ψ, ἐὰν τὸ $\gamma > - \alpha - \beta$, καὶ τὸ $\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} < \gamma$· τὰ δὲ ἐν τῷ Ω, ἐὰν τὸ μὲν $\gamma > - \alpha - \beta$, τὸ δὲ $\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} > \gamma$· τὰ δὲ ἐν τῷ Λ, (μ) ἐὰν τὸ $\gamma < - \alpha - \beta$, τὸ δὲ $\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} < \gamma$· ἐὰν δὲ ἡ μὲν τῶν ῥιζῶν ἀποφατικὴ ᾖ, αἱ δὲ δύω καταφατικαί, τὰ τῶν μερῶν τῆς ἐξισώσεως σημεῖα ἔσονται τὰ ἐν τῷ Β. ἐξ ὧν γίνονται τὰ μὲν ἐν τῷ Γ, ἐὰν τὸ

Δ $\alpha+\beta$

(μ) Πίν. XI.

$\alpha+\beta < -\gamma$, καὶ τὸ $\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} > \gamma$· τὰ δὲ ἐν τῷ Δ, ἐὰν τὸ μὲν $\alpha+\beta > \gamma$, τὸ δὲ $\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} < \gamma$· τὰ δὲ ἐν τῷ Ε, ἐὰν τὸ μὲν $\alpha+\beta > -\gamma$, τὸ δὲ $\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} > \gamma$· τὰ δὲ ἐν τῷ Ζ, ἐὰν τὸ $\alpha+\beta < -\gamma$, καὶ τὸ $\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} < -\gamma$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Δ'.

§. 108. Ἐὰν τεθῇ τὸ $\chi=\delta$, καὶ ἑκατέρωθεν τοῦ δ ἀφαιρεθέντος, πολλαπλασιασθῇ τὸ $\chi-\delta=0$ διὰ τῆς ἐν τῷ Μ ἐξισώσεως, (ν) τὸ δὲ γινόμενον πάλιν διὰ τοῦ $\chi-\epsilon=0$ πολλαπλασιασθῇ, καὶ ἐφεξῆς ὁμοίως, ἐπιγνώσεται ἕκαστος ἰδίᾳ παρατηρήσει, ὅτι ἐν πάσῃ ἐξισώσει, αἱ μὲν ῥίζαι τοσαῦται εἰσίν, ὅσαι αἱ μονάδες ἐν τῷ μεγίστῳ τοῦ ἀγνώστου ἐκθέτῃ· ὁ δὲ συμπράκτωρ τοῦ δευτέρου αὐτῆς μέρους, τὸ κεφάλαιον πασῶν τῶν ῥιζῶν· ὁ δὲ τοῦ τρίτου μέρους συμπράκτωρ, ἅπαντα τὰ ἐκ τῶν ῥιζῶν γινόμενα, ἀνὰ δύω πολλαπλασιασθεισῶν· ὁ δὲ τοῦ τετάρτου, τὰ ἐξ ἀνὰ τριῶν τῶν ῥιζῶν γινόμενα, οἱ δὲ ἐφεξῆς συμπράκτορες κατὰ τὸν αὐτὸν συνίστανται λόγον· τὰ δὲ τῶν συμπρακτόρων σημεῖά εἰσιν, ἅπερ εἴρηται (§. 107.) ἀνωτέρω.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ε'.

§. 109. Τὰ αὐτὰ δὲ ἰδιώματα ἔχουσιν αἱ ἐξισώσεις, ἐὰν αἱ ῥίζαι πλασματικαὶ ὦσι.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'.

§. 110. Τὴν ἐν τῷ Η δοθεῖσαν ἐξίσωσιν (ξ) εἰς ἑτέραν μεταβαλεῖν, ἐν ᾗ αἱ ῥίζαι μείζονες.

ΠΡΑΚ-

(ν) Πίν. Χ. (ξ) Πίν. ΧΙ.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

Α΄. Κείσθω τὸ $y = \chi + \mu$. ἑκατέρωθεν ἄρα ἀφαιρεθέντος τοῦ μ, ἔσεται $\chi = y - \mu$.

Β΄. Ὅσαι αἱ τοῦ χ Δυνάμεις ἐν τῇ προκειμένῃ ἐξισώσει, τοσαῦται γινέσθωσαν καὶ αἱ τοῦ $y - \mu$. ἐκεῖν ἔσεται τὸ μὲν $\chi^2 = y^2 - 2\mu y + \mu^2$, τὸ δὲ $\alpha\chi = \alpha y - \alpha\mu$.

Γ΄. Θὲς ἐν τῇ προκειμένῃ ἐξισώσει ἀντὶ τοῦ χ^2, καὶ τοῦ $\alpha\chi$ τὰ εὑρεθέντα αὐτοῖς ἴσα. ἐκεῖν ἡ ἐν τῷ Η μεταβληθήσεται εἰς τὴν ἐν τῷ Θ, ἐν ᾗ αἱ ῥίζαι μείζονες. Ἐπεὶ γὰρ $y = \chi + \mu$, ἐξ ὑποθέσεως, τὸ χ ἄρα ἔλαττον ἐστὶ τοῦ y, ἐξ οὗ δῆλον τὸ προκείμενον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ΄.

§. 111. Τὴν ἐν τῷ Η δοθεῖσαν ἐξίσωσιν εἰς ἑτέραν μεταβαλεῖν, ἐν ᾗ αἱ ῥίζαι ἐλάσσονες.

Κείσθω τὸ $\chi - \mu = y$. τῶν ἄρα ἀνωτέρω (§. 110.) εἰρημένων πραχθέντων, ἡ ἐν τῷ Η μεταβληθήσεται εἰς τὴν ἐν τῷ Ι, ἐν ᾗ αἱ ῥίζαι ἐλάσσονες, ὡς ἐκ τῆς ὑποθέσεως δῆλον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε΄.

§. 112. Τὴν ἐν τῷ Η δοθεῖσαν ἐξίσωσιν εἰς ἑτέραν μεταβαλεῖν, ἐν ᾗ αἱ ῥίζαι πολλαπλάσιοι.

Κείσθω τὸ $\frac{\chi}{\mu} = y$. ἐκεῖν τῶν εἰρημένων (§. 110.) πραχθέντων, ἡ προκειμένη ἐξίσωσις εἰς τὴν ἐν τῷ Κ μεταβληθήσεται, ἐν ᾗ δῆλον ὅτι αἱ ῥίζαι πολλαπλάσιοι. ἐπεὶ γὰρ $\frac{\chi}{\mu} = y$, τὸ ἄρα $\chi = \mu y$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ϛ΄.

§. 113. Τὴν ἐν τῷ Η δοθεῖσαν ἐξίσωσιν εἰς ἑτέραν μεταβαλεῖν, ἐν ᾗ αἱ ῥίζαι ὅμοια μέρη ταῖς ἐν τῇ δοθείσῃ.

Κείσθω τὸ $\chi = \frac{y}{\mu}$. ἐὰν οὖν ὅσα ἀνωτέρω εἴρηται (§. 110.) ποιήσῃς, ἡ προκειμένη εἰς τὴν ἐν τῷ Λ μεταβληθήσεται, ἐν ᾗ αἱ ῥίζαι ὅμοια μέρη ταῖς ἐν τῇ προκειμένῃ. ἔστι γὰρ ἐξ ὑποθέσεως $\chi = \frac{y}{\mu}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ζ'.

§. 114. Τὴν ἐν τῷ Η δοθεῖσαν ἐξίσωσιν εἰς ἑτέραν μεταβαλεῖν, ἐν ᾗ αἱ ῥίζαι ἀνάλογοι τῶν ἐν τῇ δοθείσῃ.

Κείσθω τὸ $y=\sqrt{\mu\chi}$. οὐκοῦν τὸ $y^2=\mu\chi$. καὶ τὸ $\chi=\frac{y^2}{\mu}$. διὸ τὸ μὲν $\chi^2=\frac{y^4}{\mu^2}$, τὸ δὲ $\alpha\chi=\frac{\alpha y^2}{\mu}$. ἡ ἄρα προκειμένη ἐξίσωσις εἰς τὴν ἐν τῷ Μ μεταβληθήσεται, ἐν ᾗ αἱ ῥίζαι μέσαι ἀνάλογοι τῶν ἐν τῇ κατὰ τὸ Η. ἐπεὶ γὰρ $y=\sqrt{\mu\chi}$, ὡς ἄρα $\mu : y :: y : \chi$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Η'.

§. 115. Τὴν ἐν τῷ Η ἐξίσωσιν εἰς ἑτέραν μεταβαλεῖν, ἐν ᾗ αἱ ῥίζαι λόγον ἔχουσιν ἀντιπεπονθότα τῶν ἐν τῇ δοθείσῃ.

Κείσθω τὸ $\chi=\frac{1}{y}$. οὐκοῦν τὸ μὲν $\chi^2=\frac{1}{y^2}$, τὸ δὲ $\alpha\chi=\frac{\alpha}{y}$. ἡ ἄρα ἐν τῷ Η ἐξίσωσις εἰς τὴν ἐν τῷ Ν μεταβληθήσεται, ἐν ᾗ αἱ ῥίζαι ταῖς ἐν τῇ δοθείσῃ ἀντιπεπόνθασιν. ἐπεὶ γὰρ $\chi=\frac{1}{y}$, ἔστιν ἄρα ὡς $\chi : 1 :: 1 : y$.

ΣΗ-

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 116. Συντελᾶσιν αἱ προδιαληφθεῖσαι μεταβολαὶ τῇ τῶν ῥιζῶν εὑρέσει. ἀμηχανᾶντες γὰρ πολλάκις τὰς ἐν τῇ προκειμένῃ ἡμῖν ἐξισώσει ῥίζας εὑρεῖν, διά τινος τῶν εἰρημένων μεταβολῶν αὐτὰς εὑρίσκομεν.

ΚΕΦ'. ΙΑ'.

Περὶ τῆς μεθόδυ τῦ ἐν ταῖς ἐξισώσεσι τῦ πρώτυ βαθμῦ εὑρεῖν τὸ ἴσον τῷ ἀγνώςῳ διὰ γνωςῶν ἐμφαινόμενον, ὅπερ ἐςὶ γνῶναι τὸ ἄγνωςον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'.

§. 117. Τὸ ἐν τῇ δοθείσῃ τῦ πρώτυ βαθμῦ ἐξισώσει, τῇ κατὰ τὸ Ξ, ἄγνωςον χ εὑρεῖν.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

Α'. Ἐὰν κλάσματα περιέχῃ ἡ ἐξίσωσις, πολλαπλασιαζήτω ἕκαςον τῶν μερῶν αὐτῆς δι ἑκάςυ τῶν ὀνομαςῶν τῶν ἐν αὐτῇ κλασμάτων. ὀκῦν διὰ μὲν τῦ β πολλαπλασιαθέντος ἑκάςυ τῶν μερῶν, προκύπτει ἡ ἐν τῷ Ο ἐξίσωσις· διὰ δὲ τῦ δ, ἡ ἐν τῷ Π· διὰ δὲ τῦ α, ἡ ἐν τῷ Ρ. τῶν γὰρ ἴσων διὰ τῶν αὐτῶν πολλαπλασιαθέντων τὰ γινόμενα ἴσα εἰσίν.

Β'. Ὅσαι ἐν τῇ ἐξισώσει ἐκθέσεις τὸ ἄγνωςον περιέχυσιν ἐπὶ τὸ ἕτερον τῶν μερῶν αὐτῆς μετενεχθήτωσαν, ὅσαι δὲ ἐκ γνωςῶν σύγκεινται ἐπὶ τὸ ἕτερον, μεταβληθέντων τῶν σημείων τῶν μετενεχθέντων, τῶν καταφατικῶν εἰς ἀποφατικὰ, καὶ τῶν ἀποφατικῶν εἰς καταφατικά. ὅπερ ταυτόν ἐςι τῷ τὰς μετενεχθείσας ἐκθέσεις ἀπὸ τῶν τῆς ἐξισώσεως μερῶν ἀφελεῖν. προκύψει τοιγαρῦν (ο) ἡ ἐν τῷ Σ, ἐξίσωσις.

(ο) Κατὰ τὸ γ'. Ἀξ. τῆς ἡμετ. Γεωμ.

Γʹ. Δίελε ἅπαντα τὰ τῆς ἐξισώσεως μέρη διὰ τῶν τȣ͂ ἀγνώςȣ πολλαπλασιαςῶν. ϗ ἐπεὶ ἡ ἐν τῷ Σ ἡ αὐτή ἐςι τῇ ἐν τῷ Τ, προκύψει, (π) ἡ ἐν τῷ Υ ἐξίσωσις.

Τὸ ἄρα ἄγνωςον χ εὕρηται διὰ γνωςῶν ἐμφαινόμενον.

Τῷ αὐτῷ δὴ τρόπῳ τῆς μὲν ἐν τῷ Φ ἐξισώσεως (ὅρα §. 97.) τὸ ἄγνωςον χ εὑρεθήσεται ἴσον, ὡς ἐν τῷ Χ ὁρᾶται· τῆς δὲ ἐν τῷ Ψ τὸ ἄγνωςον y, ὡς ἐν τῷ Ω. ὁμοίως δὲ ϗ πάσης ἄλλης τȣ͂ πρώτȣ βαθμȣ͂ ἐξισώσεως εὑρεθήσεται τὸ ἄγνωςον.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 118. Ἔςω ἐν μὲν τῇ ἐξισώσει, τῇ ἐν τῷ Υ τὸ μὲν $\alpha = 5$, τὸ δὲ $\beta = 2$, τὸ δὲ $\gamma = 15$, τὸ δὲ $\delta = 4$, ϗ τὸ $\varepsilon = 9$. ἐκεῖν τὸ $\chi = 4$, ὡς ἐν τῷ Α (ρ) ὁρᾶται· ἐν δὲ τῇ κατὰ τὸ Φ, (Πίν. XI.) καὶ ἐν τῇ κατὰ τὸ Ψ ἐξισώσει ἔςω τὸ μὲν $\alpha = 2$, τὸ δὲ $\kappa = 60$, τὸ δὲ $\beta = 6$, τὸ δὲ $\zeta = 20$. ἐκεῖν τὸ μὲν χ, εἴτȣν ὁ ζητȣ́μενος τῶν πενήτων ἀριθμὸς ἴσος 10, ὡς ἐν τῷ Β ὁρᾶται· (ρ) τὸ δὲ y, ἤτοι ὁ τῶν ὀβολῶν ἀριθμὸς τȣ͂ ἐλεήσαντος τȣ̀ς πένητας ἴσος 80, ὡς ἰδεῖν ἐςὶν ἐν τῷ Γ.

ΚΕΦʹ. ΙΒʹ.

Περὶ τῆς μεθόδȣ τȣ͂ γνῶναι τὸ ἄγνωςον ἐν ταῖς τȣ͂ δευτέρȣ βαθμȣ͂ ἐξισώσεσι.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Αʹ.

§. 119. Τὸ ἐν τῇ δοθείσῃ ἐξισώσει τȣ͂ δευτέρȣ βαθμȣ͂, τῇ κατὰ τὸ Δ, ἄγνωςον διὰ γνωςῶν εὑρεῖν ἐμφαινόμενον.

ΠΡΑΚ-

(π) κατὰ τὸ η. Ἀξ. τȣ͂ ι. Βιβ.
(ρ) Πίν. XII.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

Α΄. Α῞παντα ὅσα ἐν τῷ προλαβόντι εἴρηται προβλήματι (§. 117.) πεπράχθω. ἐκεῖν τοῦ μὲν πρώτου τελεσθέντος, προκύψει ἡ ἐν τῷ Ε ἐξίσωσις· τοῦ δὲ δευτέρου, ἡ ἐν τῷ Ζ, ἡ αὐτὴ οὖσα τῇ ἐν τῷ Η· τοῦ δὲ τρίτου, ἡ ἐν τῷ Θ.

Β΄. Ἐκατέρωθεν ἐξαχθεῖσα ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα, διὰ τῶν τῆς μονάδος τετραγωνικῶν ῥιζῶν πολλαπλασιασθήτω. (§. 85.) ἐκεῖν τὸ χ ἴσον ἐστὶν, ὡς ἐν τῷ Ι ὁρᾶται, ἡ ὡς ἐν τῷ Κ. §. 87.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄.

§. 120. Τὸ ἐν τῇ δοθείσῃ, τοῦ δευτέρου βαθμοῦ ἐξισώσει, τῇ κατὰ τὸ Λ, ἄγνωστον, τὸ διαφόρους ἔχον ἐκθέτας, εὑρεῖν.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

Α΄. Πεπράχθω ὅσα προείρηται. (§. 117.) ἐκεῖν τοῦ μὲν πρώτου τελεσθέντος, προκύψει ἡ ἐν τῷ Μ ἐξίσωσις· τοῦ δευτέρου δὲ, ἡ ἐν τῷ Ν, ἡ αὐτὴ οὖσα τῇ ἐν τῷ Ξ.

Β΄. Δίελε ἕκαστον τῶν τῆς ἐξισώσεως μερῶν διὰ τῶν πολλαπλασιαστῶν τοῦ ἀγνώστου, τοῦ ἐκθέτην ἔχοντος τὴν δυάδα. τούτου οὖν γενομένου, προκύψει ἡ ἐν τῷ Ο ἐξίσωσις.

Γ΄. Τὸ τετράγωνον, τὸ ἀπὸ τοῦ ἡμίσεως τοῦ συμπράκτορος τοῦ ἀγνώστου χ, τοῦ τὴν μονάδα ἐκθέτην ἔχοντος, εἴτουν τὸ $\overline{\dfrac{\alpha^2\beta^2\gamma^2}{2\alpha\gamma-2\beta\gamma}}^2$ προσκείσθω ἐφ' ἑκάτερα τῆς ἐξισώσεως τὰ μέρη. τούτου δὲ γενομένου, ἡ ἐν τῷ Π ἐξίσωσις συσταθήσεται.

Δ΄. Ἐξαχθείσης τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τῶν ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη τῆς ἐξισώσεως ἐκθέσεων, πολλαπλασιασθήτω ἡ τὸ τῆς ῥίζης σημεῖον ἔχουσα ἔκθεσις διὰ τῶν τῆς

τῆς μονάδος ῥιζῶν. (§. 85.) οὐκοῦν προκύψει ἡ ἐν τῷ Α ἐξίσωσις. (σ)

Ε'. Μετενεχθήτω ἡ μὴ τὸ ἄγνωστον περιέχουσα ἔκθεσις εἰς ὃ μέρος ἡ ῥίζα κεῖται, μεταβληθέντος τοῦ ἑαυτῆς σημείου, ὅπερ ἐστὶν, ἀφῃρήσθω ἑκατέρωθεν ἡ μὴ τὸ ἄγνωστον περιέχουσα ἔκθεσις. ἔσται δὴ ἓν τὸ ζητούμενον χ ἴσον, ὡς ἐν τῇ κατὰ τὸ Β ἐξισώσει ὁρᾶται.

Ἐκ δὲ τῆς ἐν τῷ Β ἐξισώσεως δύω προκύπτουσιν, ἥτε ἐν τῷ Γ, καὶ ἡ ἐν τῷ Δ. ἐξ ὧν δῆλον, ὅτι δύω αἱ ἐν τῇ προκειμένῃ ἐξισώσει ῥίζαι.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'.

121. Εὐχερείας χάριν μετὰ τὴν πρώτην καὶ δευτέραν πρᾶξιν ὁ τοῦ ἀγνώστου χ συμπεράκτωρ, οἷον ὁ ἐν τῷ Ο, (τ) ἐὰν ἐκ πολλῶν συγκέηται γραμμάτων, ἑνὶ μόνῳ ἴσος τίθεται, ὁμοίως καὶ αἱ λοιπαὶ τῆς ἐξισώσεως ἐκθέσεις, οἷον τίθεται τὸ μὲν $\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha\gamma-\beta\gamma} = \pm 2A$· τὸ δὲ $\frac{\beta\gamma^3 - 3\beta\alpha^3}{\alpha\gamma - \beta\gamma} = \pm B^2$. τούτου δὲ κειμένου, δῆλον ὅτι ἡ ἐν τῷ Ο ἐξίσωσις, εἰς τὴν ἐν τῷ Ε μεταβάλλεται. (υ) προστεθέντος δὲ ἑκατέρωθεν τοῦ A^2 τετραγώνου, τοῦ ἀπὸ τοῦ ἡμίσεως τοῦ συμπεράκτορος τοῦ χ, ἡ ἐν τῷ Ζ ἐξίσωσις γίνεται. τῆς ῥίζης δὲ ἑκατέρωθεν ἐξαχθείσης, ἡ ἐν τῷ Η, ἐξ ἧς ἡ ἐν τῷ Θ, ἐξ αὐτῆς δὲ ἥτε ἐν τῷ Ι, καὶ ἡ ἐν τῷ Κ. ἐν αἷς τεθέντων ἀντὶ τοῦ Α καὶ Β τῶν ἴσων αὐτοῖς, προκύψουσιν αἱ πρότερον εὑρεθεῖσαι, τουτέστιν αἱ ἐν τοῖς Γ καὶ Δ κείμεναι.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'.

§. 122. Ἰστέον, ὅτι τὸ ἀπὸ τοῦ ἡμίσεως τοῦ συμπεράκτορος τοῦ χ τετράγωνον προστιθέναι δεῖ ἐφ' ἑκατέ-

τε-

(σ) Πίν. XIII. (τ) Πίν. XII. (υ) Πίν. XIII.

τερα τῆς ἐξισώσεως τὰ μέρη, καθάπερ διατέτακται, πρὸς ἀναπλήρωσιν τοῦ ἀπὸ τῆς διμεροῦς ἐκθέσεως $\chi \pm \Lambda$ τετραγώνου. τὸ μὲν γὰρ $\chi^2 \pm 2\Lambda\chi$, καὶ πᾶσα ἄλλη ὁμοία ἔκθεσις, τὸ τετράγωνόν ἐστι, τὸ ἀπὸ τοῦ πρώτου μέρους χ, καὶ τὸ δὶς ὀρθογώνιον τὸ ἐκ τοῦ πρώτου χ καὶ τοῦ δευτέρου $\pm \Lambda$. οὐκοῦν λείπει αὐτῷ πρὸς τὸ γενέσθαι τὸ ἀπὸ τοῦ $\chi \pm \Lambda$ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τοῦ δευτέρου μέρους τετράγωνον, τουτέστι τὸ Λ^2. (§. 80.) τοῦ οὖν Λ^2 προστεθέντος ἐφ' ἑκάτερα τῆς ἐξισώσεως τὰ μέρη, (ἡ ἑκατέρωθεν προσθήκη γίνεται διὰ τὴν τῆς ἐξισώσεως διατήρησιν.) τὸ ἀπὸ τοῦ $\chi \pm \Lambda$ τετράγωνον ἀπαρτίζεται. ἐξ οὗ ἐξαχθείσης τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης, τὸ ἴσον τῷ χ διὰ γνωστῶν ἐμφαίνεται γραμμάτων. κἂν ὁποιοσοῦν δὲ ᾖ ὁ τοῦ χ συμπράκτωρ, τὸ ἀπὸ τοῦ ἡμίσεως αὐτοῦ τετράγωνον προσθετέον, ἐφ' ἑκάτερα τῆς ἐξισώσεως τὰ μέρη. οἷον ἐν τῇ κατὰ τὸ Λ ἐξισώσει, ἐπεὶ ἡ μονάς ἐστιν ὁ τοῦ χ συμπράκτωρ, προστίθεται τὸ ἀπὸ τοῦ ἡμίσεως αὐτῆς τετράγωνον, εἴτουν τὸ $\frac{1}{4}$. οὕτω μὲν γὰρ ἡ ἐν τῷ Μ γίνεται ἐξίσωσις, ἐξ ἧς ἡ ἐν τῷ Ν, τῆς τετραγωνικῆς ἐξαχθείσης ῥίζης· ἐξ αὐτῆς δὲ, ἡ ἐν τῷ Ξ, ἡ αὐτὴ οὖσα τῇ ἐν τῷ Ο.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Γ'.

§. 123. Εἰδέναι δεῖ, ὅτι καὶ ἄλλως ἐν ταῖς τοιαύταις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ ἐξισώσεσιν εὑρεῖν ἔνεστι τὸ ἴσον τῷ ἀγνώστῳ, μεταβαλλομένης δηλαδὴ τῆς ἐξισώσεως εἰς ἑτέραν, ἐν ᾗ οὐκ ἔστιν ἡ ἔκθεσις ἡ περιέχουσα τὸ ἄγνωστον τὸ τὴν μονάδα ἐκθέτην ἔχον. κείσθω μὲν γὰρ τὸ χ, τὸ ἐν τῇ κατὰ τὸ Ε ἐξισώσει, ἴσον $y + \mu$, οὐκοῦν τὸ μὲν $\chi^2 = y^2 + 2\mu y + \mu^2$, τὸ δὲ $\pm 2\Lambda\chi = \pm 2\Lambda y \pm 2\Lambda\mu$. ἡ ἄρα ἐν τῷ Ε ἐξίσωσις εἰς τὴν ἐν τῷ Π μεταβληθήσεται. τεθέντος δὲ τοῦ $2\mu y \pm 2\Lambda y = 0$, (τούτου γὰρ κειμένου μανθάνομεν τίνι ἴσον δεῖ γενέσθαι τὸ τὸ ἄγνωςον, ὅπως ἂν ἐκλείψῃ ἡ ἔκθεσις ἡ περιέχουσα τὸ ἄγνωςον τὸ τὴν μονάδα ἐκθέτην ἔχον, ὅπερ ἐςὶ τὸ σκοπέμενον.) ἔσεται τὸ $\mu \pm \Lambda = 0$. διὸ δὴ τὸ $\mu = \mp \Lambda$. ἐκῶν ἐὰν τεθῇ τὸ $\chi = y \mp \Lambda$, ἔσεται τὸ μὲν $\chi^2 = y^2 \mp 2\Lambda y + \Lambda^2$, τὸ δὲ $\pm 2\Lambda\chi = \pm 2\Lambda y - 2\Lambda^2$. διὸ ἡ ἐν τῷ Ε ἐξίσωσις εἰς τὴν ἐν τῷ Ρ μεταβληθήσεται, ἥτις ἡ αὐτή ἐςι τῇ ἐν τῷ Σ, ἐξ ἧς ἡ ἐν τῷ Τ γίνεται. ἐξαχθείσης δὲ ἑκατέρωθεν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης, ἡ ἐν τῷ Υ προκύπτει. ἐπεὶ δὲ τὸ $y \mp \Lambda = \chi$, τὸ ἄρα $y = \chi \pm \Lambda$. ἐὰν ἂν ἀντὶ τῦ y τεθῇ τὸ $\chi \pm \Lambda$ ἐν τῇ κατὰ τὸ Υ ἐξισώσει, ἡ ἐν τῷ Φ γίνεται, ἐξ ἧς ἡ ἐν τῷ Χ. ἐξ ἧς δῆλον, ὅτι τὸ χ ἴσον εὕρηται τῇ ἀνωτέρω εὑρεθείσῃ ἐκθέσει, τῇ κατὰ τὸ Θ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 124. Ἵνα ἂν ἡ προκειμένη ἐξίσωσις εἰς ἑτέραν μεταβληθῇ, ἐν ᾗ ἐκ ἔςιν ἡ ἔκθεσις ἡ περιέχυσα τὸ ἄγνωςον, τὸ ἐκθέτην ἔχον τὴν μονάδα, τιθέναι δεῖ τὸ τῆς προκειμένης ἐξισώσεως ἄγνωςον ἴσον ἑτέρῳ ἀγνώςῳ σὺν τῷ ἡμίσει τῦ συμπράκτορος τῦ ἀγνώςυ τῦ τὴν μονάδα ἐκθέτην ἔχοντος, μετὰ σημείυ ἐναντίυ, οἷον τὸ ἐν τῇ κατὰ τὸ Ε ἐξισώσει $\chi = y \mp \Lambda$ τιθέναι δεῖ.

ΚΕΦ ΙΓ'.

Περὶ τῆς μεθόδυ τῦ εὑρίσκειν τὸ ἄγνωςον ἐν ταῖς τῦ τρίτυ βαθμῦ ἐξισώσεσι.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Α'.

§. 125. Εὑρεῖν τὸ ἄγνωςον τὸ ἔχον τὴν τριάδα ἐκθέτην ἐν πάσαις ταῖς ἐκθέσεσι τῆς κατὰ τὸ Λ ἐξισώσεως. (φ)

ΠΡΑΚ-

(φ) Πίν. XIV.