

Κ Ε Φ. Γ'.

Περὶ τῆς εὐρέσεως τῆς Φιλῆσης ἡμιδιαμέ-
τρῃ διὰ τῆς δοθείσης ἐξισώσεως, καὶ τῶν
ἄρτι εὐρεθεισῶν ἐκθέσεων.

Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α Α'.

§. 140. Δοθείσης τῆς κατὰ τὸ Α. (πίν. κα.) ἐξισώ-
σεως, τῆς καμπύλην ἐμφαινέσης διὰ τῆς ἄξονος γε-
γραμμένην, εὐρεῖν τὴν Φιλῆσαν ἡμιδιάμετρον.

Προκείθω ἔκθεσις τὴν Φιλῆσαν ἡμιδιάμετρον ἐμφαί-
νεσα ἢ κατὰ τὸ Β, (§. 135.) ἐν ἣ τὸ δχ ἀμετά-
βλητον ἐλογίθη. εἰλήφθω δὲ τὰ ἀπειροσὰ τῆς κατὰ
τὸ Α δοθείσης ἐξισώσεως. ἐκῆν προκύψει ἢ κατὰ τὸ
Γ ἐξίσωσις, ἐξ ἧς ἢ κατὰ τὸ Δ γίνεται. ἐπεὶ δὲ τὸ
δσ ἴσον τοῖς κατὰ τὸ Ε, τεθέντος ἀντὶ τῆς δχ² τῆς
ἴσῃ αὐτῶ, ἔσεται τὸ μὲν δσ ἴσον τοῖς κατὰ τὸ Ζ,
τὸ δὲ δσ³ τοῖς κατὰ τὸ Η. ληφθέντων δὲ τῶν ἀπει-
ροσῶν τῆς δευτέρας τάξεως τῆς κατὰ τὸ Γ ἐξισώ-
σεως, τῆς δχ ἀμεταβλήτης λογιθέντος, ἢ κατὰ τὸ
Θ ἐξίσωσις γίνεται, ἐξ ἧς ἢ κατὰ τὸ Ι, ἐξ αὐτῆς
δὲ καὶ τῆς κατὰ τὸ Γ, ἢ κατὰ τὸ Κ. ἐξ αὐτῆς δὲ
καὶ τῆς κατὰ τὸ Η, ἢ κατὰ τὸ Λ. ἐκῆν ἢ ζητη-
μένη Φιλῆσα ἡμιδιάμετρος ἴση τοῖς κατὰ τὸ Μ.

Προκείθω δὲ ἔκθεσις, τὴν Φιλῆσαν ἡμιδιάμετρον
σημαίνεσα, (§. 135.) ἢ κατὰ τὸ Ν, ἐν ἣ ἕδεν τῶν
ἀγνώστων ἀμετάβλητον ἐλογίθη. καὶ ἐπεὶ τὸ δσ ἴσον
τοῖς κατὰ τὸ Ε, τὸ δὲ δχ², τοῖς κατὰ τὸ Δ, ἔσε-
ται τὸ δσ² ἴσον τοῖς κατὰ τὸ Ξ. διὸ τὸ δγδσ² ἴσον
τοῖς κατὰ τὸ Ο. ληφθέντων δὲ τῶν ἀπειροσῶν τῆς
κατὰ τὸ Ζ ἐξισώσεως, ἔσεται τὸ δδσ. ἴσον τοῖς
κατὰ τὸ Π. διὸ ἐκ τῶν κατὰ τὸ Π καὶ Γ ἐξισώσεων

Σ

ἢ κατὰ τὸ Ρ γίνεται. ληφθέντων δὲ τῶν ἀπειροσῶν τῆς κατὰ τὸ Γ ἐξισώσεως, τῷ δχ μεταβλητῷ λογισθέντος, ἢ κατὰ τὸ Σ ἐξίσωσις γίνεται. ἐξ αὐτῆς δὲ καὶ τῆς κατὰ τὸ Ζ ἢ κατὰ τὸ Υ. ἐκ ταύτης δὲ καὶ τῆς κατὰ τὸ Ρ ἢ κατὰ τὸ Υ, ἐξ ἧς ἢ κατὰ τὸ Φ. ἐξ αὐτῆς δὲ καὶ τῆς κατὰ τὸ Ο, ἢ κατὰ τὸ Χ γίνεται, διὰ τὴν κατὰ τὸ Ν, ἢ κατὰ τὸ Ψ.

Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α Β'.

141. Δοθείσης τῆς κατὰ τὸ Ω ἐξισώσεως, τῆς καμπύλης ἐμφανέσης, διὰ τῆς Ἑσίας γεγραμμένην, τὴν Φιλῶσαν ἡμιδιάμετρον εὐρεῖν.

Προκείδω ἐκθεσις ἢ κατὰ τὸ α, ἐν ἣ τὸ δχ ἀμετάβλητον ἐλογίωθη (§. 137.) καὶ ἐπεὶ τὸ μὲν δσ ἴσον τοῖς κατὰ τὸ β, τὸ δὲ δχ² τοῖς κατὰ τὸ γ, διὰ τὴν κατὰ τὸ Ω ἐξίσωσιν, ἔσεται τὸ μὲν δσ ἴσον τοῖς κατὰ τὸ δ, τὸ δὲ δσ³ τοῖς κατὰ τὸ ε. διὸ τὸ δχδσ² ἴσον τοῖς κατὰ τὸ ζ. τῶν ἀπειροσῶν δὲ τῆς δευτέρας τάξεως τῆς κατὰ τὸ Ω ἐξισώσεως ληφθέντων, ἔσεται τὸ βεδγ ἴσον τοῖς κατὰ τὸ η. τὸ γὰρ δχ ὡς ἀμετάβλητον λογιστέον. (§. 136.) ἐξ ἧ δῆλον ὅτι καὶ τὸ γδχδδγ=ο. ἔκθεν τὸ Η ἴσον τοῖς κατὰ τὸ θ, ἢ τοῖς κατὰ τὸ ι.

Τῷ αὐτῷ δὲ τρόπῳ εὐρεθήσεται ἢ Φιλῶσα ἡμιδιάμετρος, ληφθείσης τῆς ἐκθέσεως, ἐν ἣ τὸ δγ, ἢ τὸ δσ ἀμετάβλητον ἐλογίωθη.

Κ Ε Φ. ΙΑ'.

Περὶ τῆς εὐρέσεως τῆς καμπῆς, ἔτιν. τῷ σημείῳ, ἐν ᾧ ἢ καμπύλη μεταβάλλει τὸ κοῖλον εἰς κυρτὸν, ἢ τὸ κυρτὸν εἰς κοῖλον.

ΣΗ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

142. Τὸ πάσης τεταγμένης ἀπειροσὸν τῆς δευτέρας τάξεως καταφατικὸν μὲν ἐστίν, εἰάν τὸ κυρτὸν τῆς καμπύλης ἐπὶ τὸν Ἄξονα, ἢ τὴν Ἐπίαν ἐγραμμένον ἢ ἀποφατικὸν δὲ, εἰάν τὸ κοῖλον. (ὄρα τὴν δειξ. τῆ δ. 126.) ἐπεὶ δὲ ἐδὲν ἴων μεγεθῶν ἐκ κατάφατικῆ ἀποφατικὸν γίνεται, ἢ τὸ ἀνάπαλιν, μὴ πρότερον ἢτοι τῷ μηδενί, ἢ ἀπείρῳ μεγέθει ἴσον γεόμενον, διαί τῆτο τὸ εἰρημένον τῆς δευτέρας τάξεως ἀπειροσὸν, πρὶν ἢ τὴν διαληφθῆσαι παθεῖν μεταβολὴν ἢτοι τῷ ἐδενί ἴσον γίνεται, ἢ μεγέθει ἀπείρῳ.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

143. Ἐντεῦθεν ἢ τῆς καμπῆς εὐρεσις πορίζεται. Μηθέντων γὰρ τῶν τῆς δευτέρας τάξεως ἀπειροσῶν τῆς δοθείσης ἐξισώσεως, τῆ δχ ἀμεταβλήτῃ λογιθέντος, τίθεται τὸ δδγ ἢτοι τὸ ο, ἢ τῷ οο ἴσον. ἑκατέρῃ δὲ τῆτων καμένῃ, τὰ ἴσα τῷ χ, εἴτεν τῆ ἀποτετμημένη πορίζονται. ἢ εἰάν μὲν τὰ ποριθέντα πραγματιώδη ᾧσι, τοσαύτας ἢ καμπύλη ἔχει καμπὰς, ὅσα τὰ εὐρεθέντα ἴσα τῷ χ· εἰάν δὲ ἐπίπλασα, δῆλον ὅτι ἐδεμίαν καμπὴν ἔχει καμπύλη.

Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α Α'.

144. Δοθείσης τῆς κατὰ τὸ κ ἐξισώσεως, τῆς ἐμφαινέσης καμπύλην διαί τῆ Ἄξονος γεγραμμένην, εὐρεῖν τὴν ἐν αὐτῇ καμπυλήν.

Εἰλήφθω τῆς δοθείσης ἐξισώσεως τὰ ἀπειροσὰ τῆς πρώτης τάξεως, τὰ κατὰ τὸ λ, ὁμοίως ἢ τὰ τῆς δευτέρας, τὰ κατὰ τὸ μ. κείθω δὲ τὸ δδγ = ο. ἐκῆν καὶ τὸ $-2αδχ^2 = ο$. διὸ τὸ $χ = ο$. κείθω πάλιν τὸ δδγ = οο. ἐκ τῆτε ἢ κατὰ τὸ ν ἐξίσωσις γίνεται, ἐξ ἢς ἢ κατὰ τὸ ζ. ἐν τῆ κατὰ τὸ κ ἐν ἐξισώσει τε-

θέντος ἀντὶ τῆς χ τῆς ἴσης αὐτῶν, ἢ κατὰ τὸ οἰσώσις γίνεται

Ἐάν ἔν ἡ ΖΚΔ καμπύλη γραφῆ, (πίν. κ. χ. 5.) ἢ ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ κ ἐξισώσεως ἐμφαινομένη, (παραβολὴ γὰρ ἐστὶ τρίτε βαθμῆ, §. 299. τῆς 1. βιβλ. εἰν γὰρ τεθῆ $y - a = z$, καὶ $\chi - a = \Phi$ εἰς τὴν κατὰ τὸ π μεταβάλλεται.) (πίν. κα.) ληφθεῖσα δὲ ἡ ΓΚ = $\chi = a$, ἀχθῆ ἢ ΓΑ = $y = a$, καὶ ἡ ΛΕ τῆς ΘΙ παράλληλος, ληφθεῖ δὲ ἡ ΛΒ = ΓΚ, ἢ ἀπὸ τῆς Β ἀγομένη τῆς ΓΑ παράλληλος, εἴτεν ἡ ΒΚ ἔσεται ἴση τῶν y . διὸ τὸ Κ σημεῖον ἐστὶν ἡ ζητεμένη καμπή. κατ' αὐτὸ γὰρ ἡ ΔΚ καμπύλη καμφθεῖσα μεταβάλλει τὸ κοῖλον εἰς κυρτόν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'.

§. 145. Τὴν ἔκθεσιν εὐρεῖν, δι' ἧς τὸ τῆς καμπῆς σημεῖον πορίζεται ἐν ταῖς διατῆς Ἐσίας γραφεύσαις καμπύλαις.

Ἐσω ἡ ΔΕ καμπύλη ὁποιαῖεν, διατῆς Α (πίν. κ. χ. 6.) Ἐσίας γεγραμμένη. ἀπὸ δὲ τῶν ἐγγυτάτων σημείων Δ, Ε ἐπεξεύχθωσαν μὲν ἐπὶ τὸ Α αἱ ΔΑ, ΕΑ, ἢ χθωσαν δὲ τῆς καμπύλης ἐφαπτόμεναι αἱ ΔΒ, ΕΓ. καὶ ἀπὸ τῆς Α σημείων ἢ χθω ἢ μὲν ΑΓ πρὸς ὀρθὰς τῆς ΑΕ, ἢ δὲ ΑΒ τῆς ΑΔ. καὶ κέντρων μὲν τῶν Α, διαστήμασι δὲ τοῖς ΑΔ, ΑΒ τόξα κύκλων γεγράφθω τὰ ΔΚ, ΒΦ. καὶ ἔσω ἡ μὲν ΑΔ = y , τὸ δὲ τόξον ΔΚ = $\delta\chi$. ἔκθεν ἡ ΚΕ = δy .

Καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΔΚ ὡς ὀρθὴ λογίζεται, ἢ ἄρα ΑΔΒ σὺν τῆς ΚΔΕ μιᾷ ὀρθῆ ἴση. (ἢ ΔΕ ὡς εὐθεῖα τῆς ΒΔ συνεχιζομένη ἐκλαμβάνεται διατὴν ἑαυτῆς σμικρότητα) ἀλλ' ἡ ΑΔΒ σὺν τῆς ΑΒΔ μιᾷ ὀρθῆ ἴση, ἢ ἄρα ΑΒΔ = ΕΔΚ. ὁμοῖα ἄρα τὰ ΕΚΔ, ΔΑΒ τρίγωνα. ἐπεὶ δὲ καὶ τὸ ΕΑΒ ὁμοῖον ἑκατέρῳ τῶν ΕΚΔ, ΒΦΟ, ἄρα καὶ τὰ ΕΚΔ,

ΕΚΔ, ΒΦΟ ὁμοιά εἰσιν. ἔκ᾽ ὡς ΕΚ : ΚΔ :: ΔΑ :
 ΑΒ, ἥτοι ὡς δγ : δχ :: γ : ΑΒ. ἡ ἄρα ΑΒ = $\frac{\gamma\delta\chi}{\delta\gamma}$.

ἔσι δὲ καὶ ὡς ΑΔ : ΔΚ :: ΑΒ : ΒΦ, (διὰ τὴν τῶν
 ΛΔΚ, ΑΒΦ τομέων ὁμοιότητα) ἥτοι ὡς γ : δχ :: $\frac{\gamma\delta\chi}{\delta\gamma}$:

ΒΦ, ἡ ἄρα ΒΦ = $\frac{\delta\chi^2}{\delta\gamma}$. ἐπεὶ δὲ καὶ ὡς ΕΚ : ΚΔ ::

ΒΦ : ΦΟ, ἥτοι δγ : δχ :: $\frac{\delta\chi^2}{\delta\gamma}$: ΦΟ. διὸ ἡ ΦΟ =

$\frac{\delta\chi^3}{\delta\gamma^2}$. εἰάν ᾖν τὰ ἀπειροσὰ ληφθῆ τῆς ἄρτι εὐρεθεί-

σης ἐκθέσεως, τῆς τὴν ΑΒ ἐμφαινέσης, τῶ δχ ἀμε-
 ταβλήτε λογιθέντος, ἔσεται ἡ ΓΦ ἴση τοῖς κατὰ
 τὸ Α. (πίν. κβ.) διὸ ἡ ΓΟ ἴση τοῖς κατὰ τὸ Β.

Ἔσι δὲ ἡ ΓΟ, ἡ ὑπὸ τῶν ἐγγυτάτων ἐφαπτομέ-
 ρων ΕΓ, ΔΒ περαιτεμένη καταφατική μὲν, εἰάν τὸ
 τῆς καμπύλης κοῖλον ἐπὶ τὴν Ἐσίαν Α ἐςραμμένον ἢ
 ἀποφατική δὲ, εἰάν τὸ κυρτόν. ἵνα δὲ ἐκ καταφατι-
 κῆς ἀποφατικῆ γένηται, ἥτοι τῶ ἔδενι, ἢ τῶ ἀπεί-
 ρω πρότερον ἐξισῶται. ἔσιν ἄρα ἡ κατὰ τὸ Β ἐκθε-
 σις ἡ ζητημένη, δι᾽ ἧς τὸ τῆς καμπῆς σημεῖον πορί-
 ζεται.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 146. Ἐυρεθήσεται τὸ τῆς καμπῆς σημεῖον, εἰάν
 ἡ δοθεῖσα ἐκθεσις ἡ κατὰ τὸ Β ἴση τῶ ἔδενι ἢ τῶ
 ἀπείρῳ τεθῆ, ληφθέντων δὲ τῶν ἀπειροσῶν τῆς δο-
 θεύσης ἐξισώσεως, τὰ ἴσα τῶ δχ, δγ, καὶ δδγ ἐν
 αὐτῇ τῇ ἐκθέσει τεθῆ.

Λ Η Μ Μ Λ.

§. 147. Ἐστω κύκλος τόξον τὸ (πίν. κ. χ. 7.) ΑΓΔ, ἔκέντρον μὲν τὸ Β, ἡμιδιάμετρος δὲ ἡ ΒΛ. νενοήθω δὲ καὶ καμπύλη ἡ ΑΦΚ τοιαύτη, ὥστε ἀχθείσης ἡμιδιαμέτρους τινὸς, οἷον τῆς ΒΕ, εἶναι τὸ ἀπὸ τῆς ΕΦ, τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπὸ τῶν δύο καμπύλων, τετράγωνον ἴσον ὀρθογωνίῳ Γαῶ ὑπὸ τινος εὐθείας γνωστῆς καὶ ἑτέρας ἴσης τῷ ΑΕ τόξῳ. ἔστω δὲ ἡ μὲν ΒΛ = ΒΕ = α, ἡ δὲ ΒΦ = γ, τὸ δὲ τόξον ΑΕ = Ζ, ἡ δὲ βηθεῖσα γνωστὴ εὐθεῖα ἴση β. ἔκῃν ἡ ΕΦ = α - γ. διὸ τὸ Βκ ἴσον τοῖς κατὰ τὸ Γ. (πίν. κβ.)

Ἡ ἐξίσωσις ἐν αὐτῇ τὴν ΑΦΚ καμπύλην ἐμφαίνει, τὴν ἀναγραφθεῖσομένην διὰ τῆς κέντρος Β ὡς δι' ἑξείας.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'.

148. Δοθείσης τῆς κατὰ τὸ Γ ἐξισώσεως, εὐρεῖν τὴν καμπὴν ἐν τῇ καμπύλῃ τῇ ὑπ' αὐτῆς ἐμφαινόμενη.

Τῶν αὐτῶν κειμένων, τῶν καὶ ἐν τῷ προλαβόντι λήματι, ἤχθω ἡ Βε ἔγγισα τῆς ΒΕ. καὶ κέντρον μὲν τῷ Β, διαστήματι δὲ τῷ ΒΦ τόξον κύκλου γεγράφθω τὸ ΦΖ, ὃ κείθω ἴσον τῷ δχ. καὶ εἰλείφθω τὰ ἀπειροσὰ τῆς κατὰ τὸ Γ ἐξισώσεως. ἔκῃν ἔσειαι τὸ δκ = Εε, ἴσον τοῖς κατὰ τὸ Δ. ἐπεὶ δὲ ὡς ΒΕ : ΒΦ :: Εε : ΦΖ, (διὰ τὴν τῶν ΒΕε, ΒΦΖ τομέων ὁμοιότητα) ἦτοι ὡς α : γ :: $\frac{2\gamma\delta\gamma}{\beta} - 2\alpha\delta\gamma$: δχ. τὸ

ἄρα δχ ἴσον τοῖς κατὰ τὸ Ε. ληφθέντων ἐν τῶν ἀπειροσῶν τῆς δευτέρας τάξεως τῆς κατὰ τὸ Ε ἐξισώσεως, τῆς δχ ἀμεταβλήτης λογιθέντος, ἡ κατὰ τὸ Ζ προκύπτει ἐξίσωσις. ἐξ ἧς πορίζομεθα τὸ $\frac{2\gamma\delta\gamma}{\beta}$ ἴσον τοῖς κατὰ τὸ Η. κείθω ἡ εὐρεθεῖσα ἔκθεσις (§. 145.)

ἴση

ἴση τῷ ἔδενι, (δ. 146.) ὡς ἐν τῷ Θ ὁράται. ἐν ταύτης δὲ τῆς ἐξισώσεως ἢ κατὰ τὸ I γίνεται, ἐν ἣ τεθέντος ἀντὶ μὲν τῷ $\delta\chi^2$ τῷ ἴσθ αὐτῷ, τῷ ἐκ τῆς κατὰ τὸ E ἐξισώσεως περιζομένης, ἀντὶ δὲ τῷ $\gamma\delta\gamma$ τῷ ἴσθ αὐτῷ τῷ ἐν τῷ Η, ἢ κατὰ τὸ K γίνεται ἐξίσωσις, ἐξ ἧς ἢ κατὰ τὸ Λ, ἐξ αὐτῆς δὲ ἢ κατὰ τὸ M, πέμπτη βαθμὴ ἔσα. δι' αὐτῆς ἐν εὐρεθέντος τῷ ἀγνώστῳ γ , (135. τῷ 1. βιβλ.) γνωθῆσεται ἢ ΒΦ. ἐξ ἧς δῆλον γίνεται τὸ τῆς καμπῆς σημεῖον. Ταῦτα μὲν δὴ τὰ τῆς Ἀναλύσεως σοιχεῖα ἱκανὰ τοῖς πρωτοπέρις. ὁ δὲ ἀπαρτίναι ἑαυτὸν βεβλόμενος, καὶ ἐπὶ τὸ τελειότερον προαγαγεῖν, τὸς περὶ αὐτῆς συγγράψαντας μετερχέσθω, ἰδίῳ πόνῳ καὶ μελέτῃ τὰ ὑπ' αὐτῶν προτιθέμενα ἐπιλύων προβλήματα. τῷτο γὰρ ἀπάντων τῶν γυμνασμάτων συμφωρότερον, καὶ ἴξιν μαθηματικῆς ἑμπειῆσαι δυνάμενον ἐπιστήμης.

Τ Ε Λ Ο Σ.

