ἡ δὲ ΓΒ $= \sqrt{\alpha\chi - \chi^2}$, ἡ δὲ ΑΒ $= \sqrt{\alpha\chi}$. διὸ τὸ ΑΒ. ΒΓ ἴσον τῇ κατὰ τὸ Ν ἐκθέσει, (πίν. ιθ.) ἧς τὸ ἀπειροςὸν τὸ κατὰ τὸ Ξ. τεθέντος δὲ τȣ̃ ἀριθμητȣ̃ ἴσȣ τοῖς κατὰ τὸ Ο (§. 115) ἡ κατὰ τὸ π ἐξίσωσις γίνεται, ἐξ αὐτῆς δὲ ἡ κατὰ τὸ Ρ, ἐξ ἧς δῆλον, ὅτι ἐὰν ληφθῇ ἡ ΑΓ $= \frac{2}{3}$ τῆς ΑΔ διαμέτρȣ, ἀχθῇ δὲ πρὸς ὀρθὰς ἀπὸ τȣ̃ Γ τῇ ΑΔ ἡ ΓΒ, ꙃ ἐπιζευχθῇ ἡ ΑΒ, ὁ ἐκ τȣ̃ ΑΓΒ τριγώνȣ γινόμενος κῶνος ἐςὶν ὁ ζητȣ́μενος.

ΚΕΦ. Θ'.

Περὶ τῶν τῆς δευτέρας ꙃ τρίτης τάξεως ἀπειροςῶν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'.

§. 120. Τὰς εὐθείας εὑρεῖν, τὰς τὰ ἀπειροςὰ τῆς δευτέρας καὶ τρίτης τάξεως ἐμφαινȣ́σας.

Ἐμφαινέτω ἡ ΑΚΓ γραμμὴ καμπύλης ὁποιασȣ̃ν ςοιχείον, (πίν. ΙΗ. χ. 6.) εἴτȣν ἀπειροςὸν τῆς πρώτης τάξεως. ꙃ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Α ꙃ Γ σημείων ἐφαπτόμεναι τῆς ΑΚΓ καμπύλης αἱ ΑΔ, ΓΔ, συμβάλλȣσαι ἀλλήλαις κατὰ τὸ Δ. ἐπιζευχθείσης δὲ τῆς ΑΓ ἤχθω πρὸς ὀρθὰς αὐτῇ ἡ ΔΒ. καὶ τῶν ΑΚ, ΓΚ ἐπιζευχθεισῶν, ἐκβεβλήσθω ἡ ΔΓ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Γ, διαςήματι δὲ τῷ ΓΒ ἡμικύκλιον γεγράφθω τὸ ΖΒΕ. λέγω δὴ, ὅτι ἡ μὲν ΒΔ ἀπειροςόν ἐςι τῆς δευτέρας τάξεως, ἡ δὲ ΔΖ τῆς τρίτης.

Ἐπὶ γὰρ ἡ ΑΚΓ ἀπειροςόν ἐςι τῆς πρώτης τάξεως, καὶ γωνία ἄρα ἡ ΑΓΔ ἀπειροςόν ἐςιν ἑκατέρα τῶν

τῶν ΔΒΓ, ΒΔΓ παραβαλλομένη. καὶ τὸ ἡμίτονον ἄρα τῆς ΑΓΔ, εἴτουν τῆς ΒΓΔ, ἀπειροστόν ἐστι τοῖς τῶν ΔΒΓ, ΒΔΓ παρατιθέμενον. καὶ ἡ ΒΔ ἄρα ἀπειροστόν ἐστι τῇ τῆς ΔΓ παραθέσει. (τὰ γὰρ τῶν γωνιῶν ἡμίτονα ταῖς ταῖς γωνίαις ὑποτεινούσαις πλευραῖς ἀνάλογον.) ἀλλ' ἡ ΔΓ ἀπειροστὸν τῆς πρώτης τάξεώς ἐστιν· ἀπειροστὸν γὰρ τῆς πρώτης τάξεως καὶ ἡ ΑΚΓ. ἡ ἄρα ΔΒ ἀπειροστὸν τῆς δευτέρας τάξεως. (§. 9.) ἐπεὶ δὲ ὡς ΕΔ : ΔΒ :: ΔΒ : ΔΖ, (ρ) ἔστι δὲ ἡ ΔΒ ἀπειροστὸν τῇ τῆς ΕΔ παραθέσει, καὶ ἡ ΔΖ ἄρα τῇ τῆς ΔΒ. ἀλλ' ἡ ΔΒ ἀπειροστὸν δέδεικται τῆς δευτέρας τάξεως, ἡ ἄρα ΔΖ τῆς τρίτης τάξεως (§. 9.) ἀπειροστόν ἐστι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 121. Ἡ ΑΓ ὑπερέχει τῆς ΒΓ τῷ τῆς τρίτης τάξεως ἀπειροστῷ ΔΖ. ἡ ΚΓ ἄρα χορδή, ἡ μεταξὺ τῶν ΑΓ, ΒΓ ὑπερέχει τῆς ΓΒ ἀπειροστῷ ἐλάσσονι τῆς ΔΖ. ἐπεὶ δὲ ἡ ΚΓ χορδὴ ὡς ἴση τῇ ΚΓ καμπύλῃ ἐκλαμβάνεται, ἅτε δὴ μικροῦ δεῖν ταυτιζομένη αὐτῇ, καὶ ἡ ΚΓ ἄρα καμπύλη ὑπερέχει τῆς ΒΓ ἀπειροστῷ ἐλάσσονι τῆς ΔΖ, εἴτουν ἀπειροστῷ ἐλάσσονι τοῦ τῆς τρίτης τάξεως ἀπειροστοῦ ΔΖ. ἐκλαμβάνειν ἄρα ἔξεστιν ἀντὶ τῆς ΚΓ καμπύλης, ἢ τῆς ΑΓ ἐφαπτομένης τὴν ΒΓ. (§. 21.) καὶ ἀντὶ τῆς ΑΚΓ καμπύλης, ἢ τοῦ κεφαλαίου τῶν ΑΔ, ΔΓ ἐφαπτομένων, τὴν ΑΓ χορδήν.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 122. Ἐὰν νῆμα τῇ ΨΕΔ καμπύλῃ ἰσομῆκες ἐφηρμοσμένον αὐτῇ ὄν, (πίν. ΙΙΙ. σχ. 7.) κατὰ μικρὸν ἀπ' αὐτῆς ἀποχωρίζοιτο, τὸ μὲν ὑπὸ τοῦ νήματος γραφόμενον σχῆμα ΨΑΒ,

(ρ) Ὅρα τὴν λζ΄. προτ. τοῦ γ΄. βιβλ. τῆς Γεωμετρ.

ΨΑΒ, ἐκτετυλιγμένη καλεῖται καμπύλη, ἡ δὲ ΨΕΔ ἐντετυλιγμένη, τὸ δὲ νῆμα ΑΕΔ, ἡμιδιάμετρος φιλοῦσα.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 123. Τὸ νῆμα τῆς ἐντετυλιγμένης ἐκτυλισσόμενον, ἐφαπτομένη αὐτῆς γίνεται κατὰ διάφορα σημεῖα, οἷον τὰ Γ, Δ. διὸ τὸ τῆς συμπτώσεως τῶν νημάτων σημεῖον, οἷον τὸ Γ, ὡς σύμπτωσις τῶν τῆς ἐντετυλιγμένης ἐφαπτομένων ἐκλαμβάνεται.

ΘΕΩΡΗΜΑ Α'.

§. 124. Πᾶσα καμπύλη οἷον ἐξ ἀπειροστῶν κύκλου τόξων σύγκειται, γραφέντων ἀποστήματι μὲν μιᾷ τῶν φιλουσῶν ἡμιδιαμέτρων, κέντρῳ δὲ τῇ ἑαυτῶν συμπτώσει.

Ἔστω γὰρ ἐντετυλιγμένη μὲν ἡ ΨΕΔ, ἐκτετυλιγμένη δὲ ἡ ΨΖ, φιλοῦσαι δὲ ἡμιδιάμετροι ἔγγιστα ἀλλήλων, καὶ τῆς ΨΕΔ ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΕ, ΒΔ. ἐκβεβλήσθω δὲ ἡ ΑΕ, καὶ κέντρῳ μὲν τῇ συμπτώσει Γ, διαστήματι δὲ τῇ φιλούσῃ ἡμιδιαμέτρῳ ΓΒ τόξον κύκλου γεγράφθω τὸ ΒΦ.

Καὶ ἐπειδὴ τὸ $ΒΔ = ΑΕ + ΕΔ$, (§. 122.) ἔστι δὲ τὸ αὐτὸ $ΒΔ = ΒΓ + ΓΔ = ΦΓ + ΓΔ$, τὸ ἄρα $ΦΓ + ΓΔ = ΑΕ + ΕΔ$. ἀλλὰ τὸ $ΦΓ = ΦΕ + ΕΓ$. τὸ ἄρα $ΦΕ + ΕΓ + ΓΔ = ΑΕ + ΕΔ$. διὸ τὸ $ΕΓ + ΓΔ - ΕΔ = ΑΕ - ΦΕ$. ἀλλὰ τὸ $ΑΕ - ΦΕ = ΑΦ$. τὸ ἄρα $ΕΓ + ΓΔ - ΕΔ = ΑΦ$. ἔστι δὲ ἡ ὑπεροχή, καθ' ἣν αἱ ἐφαπτόμεναι ΕΓ, ΓΔ τῆς καμπύλης ΕΔ ὑπερέχουσιν, ὅπερ τὸ $ΕΓ + ΓΔ - ΕΔ$, ἔλαττον ἀπειροστοῦ τῆς τρίτης τάξεως (§. 121.) ἡ ἄρα ΑΦ ἴση οὖσα τῇ εἰρημένῃ ὑπεροχῇ ἐλάσσων ἐστὶν ἀπειροστοῦ τρίτης τάξεως. τὸ ἄρα ΒΦ τόξον τῇ ΒΑ καμπύλῃ μικρȣ̃ δεῖν ταυτίζεται. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ τὰ λοιπὰ τῆς ΨΖ καμπύλης μέρη τοῖς ὁμοίως ἀναγεγραμμένοις κύκλων τόξοις ταυτίζεται· ἐκ τȣ́τȣ ȣ̃ν δῆλον τὸ προκείμενον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'.

§. 125. Τὴν ἔκθεσιν εὑρεῖν, τὴν ἐμφαίνȣσαν τὸ τόξον, τὸ ὑποτεῖνον γωνίαν περιεχομένην ὑπό τε ἐφαπτομένης καμπύλης ἀπειροςῆς τῆς πρώτης τάξεως, καὶ τῆς χορδῆς αὐτῆς.

Ἔςω ἀπειροςὸν πρώτης τάξεως ὁποιασȣ̃ν καμπύλης ἡ ΑΖΒ, (πίν. ΙΗ. σχ. 8.) ἧς ἐφαπτομένη μὲν ἡ ΑΨ, χορδὴ δὲ ἡ ΑΒ· τόξον δὲ κύκλȣ τὸ ΒΨ ἀναγεγραμμένον κέντρῳ τῷ Α διαςήματι δὲ τῷ ΑΒ. δεῖ δὴ ȣ̃ν εὑρεῖν τὴν ἔκθεσιν τὴν ἐμφαίνȣσαν τὸ ΒΨ τόξον, τὸ ὑποτεῖνον τὴν ΨΑΒ γωνίαν.

Ἤχθω δὴ ἀπὸ τȣ̃ Β ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης ἡ ΒΔ τῇ ΑΨ συμβάλλȣσα κατὰ τὸ Δ. καὶ πρὸς ὀρθὰς ταῖς ΑΔ, ΔΒ ἤχθωσαν αἱ ΑΓ, ΒΓ. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Δ, διαςήματι δὲ τῷ ΔΒ τόξον κύκλȣ γεγράφθω τὸ ΒΕ. καὶ ἔςω ἡ μὲν ΑΓ $=$ η, ἡ δὲ ΑΖΒ $=$ δσ, τὸ δὲ ΒΨ $=$ Τ.

Καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΖΒ καμπύλη ὡς τόξον κύκλȣ ἐκλαμβάνεται, (§. 124) αἱ δὲ ΑΓ, ΒΓ πρὸς ὀρθάς εἰσι ταῖς ἐφαπτομέναις ΑΔ, ΒΔ, ἐπ' αὐταῖς ἄρα, (σ) ἔτȣν ἐπὶ τῷ τῆς συμπτώσεως αὐτῶν σημείῳ Γ τὸ κέντρον ἐςὶ τȣ̃ ΑΖΒ τόξȣ. διὸ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν αἱ μὲν ΑΓ, ΓΒ, ὡς ἀπὸ τȣ̃ κέντρȣ, αἱ δὲ ΑΔ, ΒΔ ὡς ἀπὸ τȣ̃ αὐτȣ̃ σημείȣ ἀχθεῖσαι ἐφαπτόμεναι (τ) ἐπεὶ δὲ τȣ̃

(σ) Ὅρα τὴν ιθ'. Προτ. τȣ̃ γ'. βιβλ. τῆς Γεωμετρ. (τ) Κατὰ τὴν β. Συνέπ. τῆς λς'. τȣ̃ αὐτ. βιβλ.

τοῦ ΔΑΓΒ τετραπλεύρου ὀρθή ἐστιν ἑκατέρα τῶν ΓΑΔ, ΓΒΔ γωνιῶν, δυσὶν ὀρθαῖς ἄρα ἴσαι ἔσονται αἱ ΑΓΒ, ΑΔΒ. ἐξ οὗ δῆλον, ὅτι ἡ ΑΓΒ $=$ ΒΔΕ, διὸ ὁμοιοί εἰσιν οἱ ΓΑΖΒ, ΔΒΕ τομεῖς. ἐπεὶ δὲ αἱ ΑΔ $+$ ΔΒ $=$ ΑΕ, αἱ δὲ ΑΔ $+$ ΔΒ ὑπερέχουσι τῆς ΑΒ ἔλαττον ἀπειροστοῦ τρίτης τάξεως, (§. 121.) καὶ ἡ ΑΕ ἄρα ὑπερέχει τῆς ΑΒ ἔλαττον ἀπειροστοῦ τρίτης τάξεως. ἔστι δὲ ἡ ὑπεροχὴ αὐτὴ ἡ ΨΕ. ἡ ἄρα ΨΕ ἐλάσσων ἀπειροστοῦ τρίτης τάξεως. τὸ ἄρα ΒΕ μικροῦ δεῖν ταυτίζεται τῷ ΒΨ. ἀντ' ἐκείνου ἄρα τοῦτο λαβεῖν ἔξεστιν. ἐπεὶ δὲ ὡς ΑΓ : ΑΖΒ :: ΔΒ : ΒΕ, διὰ τὴν τῶν τῶν ΓΑΖΒ, ΔΒΕ τομέων ὁμοιότητα, ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ΑΓ : ΑΖΒ :: ΔΒ : ΒΨ, εἴτουν ὡς $\eta : \delta\sigma :: \frac{1}{2}\delta\sigma : T$ ἡ γὰρ $\Delta B = \frac{1}{2} AZB = \frac{1}{2}\delta\sigma$. (§. 121.) διὸ τὸ ζητούμενον τόξον $B\Psi = T = \frac{\delta\sigma^2}{2\eta}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ΄.

§. 126. Τὴν ἔκθεσιν εὑρεῖν, τὴν στοιχεῖον δευτέρας τάξεως ἐμφαίνουσαν ὁποιασοῦν τεταγμένης καὶ καμπύλης.

Ἔστω καμπύλη ὁποιαοῦν διὰ τοῦ ἄξονος ΑΔ. γεγραμμένη, ἡ ΑΕΚ. (πίν. ΙΗ. σχ. 9.) καὶ εἰλήφθω ἀπειροστὰ τῆς πρώτης τάξεως ἴσα, τὰ ΒΓ, ΓΔ, καὶ τετάχθωσαν αἱ ΒΕ, ΓΦ, ΔΚ. καὶ ἀπὸ τῶν Ε καὶ Φ σημείων ἤχθωσαν αἱ ΕΜ, ΦΛ τῇ ΑΔ παράλληλοι. ἐπεζεύχθωσαν δὲ αἱ ΕΦ, ΦΚ, ὧν ἡ ΕΦ ἐκβληθεῖσα, συμβαλλέτω τῇ ΔΚ ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ Ζ. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Φ, διαστήματι δὲ τῷ ΦΚ τόξον κύκλου γεγράφθω τὸ ΚΓ. καὶ ἔστω ἡ μὲν ΒΕ $= y$, ἡ δὲ ΑΕ $= \sigma$.

Οὐκοῦν ἡ μὲν ΕΦ $= \delta\sigma$, ἡ δὲ ΦΜ $= \delta y$. ἐπεὶ δὲ ἡ μὲν γωνία ΕΜΦ $=$ ΦΛΖ, ἡ δὲ ΦΕΜ $=$ ΖΦΛ, ἡ δὲ

$ΕΜ = ΦΛ$, ἄρα καὶ ἡ $ΦΜ = ΖΛ$, καὶ $ΕΦ = ΦΖ$. διὸ ἡ $ΚΖ = ΚΛ - ΖΛ = ΚΛ - ΦΜ = -\delta\delta y$. τουτέστιν ἡ ΚΖ, ἡ ὑπεροχὴ τῶν ΦΓ, ΚΔ τεταγμένων ἀπειροστόν ἐστι τῆς δευτέρας τάξεως. ὅπερ ἀποφατικὸν μέν ἐστιν, ἐὰν τὸ τῆς καμπύλης κοῖλον ἐπὶ τὸν ἄξονα ἐστραμμένον ᾖ, οἷον τὸ εὑρεθὲν $ΚΖ = -\delta\delta y$· καταφατικὸν δέ, (σχ. 10.) ἐὰν τὸ κυρτόν, οἷον τὸ $ΚΖ = \delta\delta y$.

Ἐπεὶ δὲ ἡ $ΡΖ = ΦΡ - ΦΖ = ΦΚ - ΕΦ$, ἡ ἄρα τῶν χορδῶν ΕΦ, ΦΚ ὑπεροχὴ ἴση τῇ ΡΖ. ἀλλ' ἡ τῶν χορδῶν ὑπεροχὴ ἡ αὐτή ἐστι τῇ τῶν ΕΦ, ΦΚ καμπύλων, (§. 121.) ἡ ἄρα τῶν ΕΦ, ΦΚ καμπύλων ὑπεροχὴ ἡ ΡΖ ἐστίν. ἀλλὰ ἡ τούτων ὑπεροχὴ ἀπειροστῶν ἴσων τῆς πρώτης τάξεως ἀπειροστὸν δευτέρας τάξεώς ἐστιν, ἡ ἄρα $ΡΖ = \delta\delta\sigma$. οὐκοῦν τὸ $-\delta\delta\sigma$ ἀπειροστὸν στοιχεῖον δευτέρας τάξεως ὁποιασοῦν καμπύλης σημαίνει.

Ἐὰν δὲ ἄνισα ᾖ τὰ ἀπειροστά, ΒΓ, ΓΔ, γεγονέτω μὲν ἡ αὐτὴ κατασκευή, (σχ. 11.) εἰλήφθω δὲ ἡ $ΦΝ = ΕΜ$, καὶ ἤχθω ἀπὸ μὲν τοῦ Ν ἡ ΝΨ παράλληλος τῇ ΖΔ, ἀπὸ δὲ τοῦ Ψ ἡ ΨΥ τῇ ΑΔ. οὐκοῦν διὰ τὰ προειρημένα ἡ $ΕΦ = ΦΨ$, καὶ ἡ $ΦΚ = ΦΟ$. διὸ ἡ $ΨΟ = ΦΟ - ΦΨ = ΦΚ - ΕΦ$. ἡ ἄρα τῶν ΦΚ, ΕΦ χορδῶν ὑπεροχὴ ἴση ἐστὶ τῇ ΨΟ. διὸ δὴ ἡ $ΨΟ = \delta\delta\sigma$. ὁμοίως ἡ $ΥΚ = ΥΛ - ΚΛ = ΨΝ - ΚΛ = ΦΜ - ΚΛ$. διὸ ἡ $ΥΚ = -\delta\delta y$.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 127. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ληφθείσης τῆς ἀποτετμημένης $ΑΒ = Χ$, ἔσται ἡ μὲν $ΒΓ = ΕΜ = \delta\chi$, ἡ δὲ $ΝΛ = ΦΛ - ΦΝ = ΦΛ - ΕΜ$. διὸ ἡ $ΝΛ = \delta\delta\chi$.

ΛΗΜΜΑ.

§. 128 Αἱ εὐθύγραμμοι γωνίαι, οἷον αἱ ΖΑΕ, ΖΑΔ λόγον ἔχουσι (σχ. 12.) συγκείμενον ἐκ τοῦ λόγου ὃν ἔχουσι

τὰ

τὰ τόξα, ἐφ' ἃ βεβήκασι, ϗ ἐκ τοῦ ἀντιπεπονθότος τῶν ἡμιδιαμέτρων αὐτῶν. κέντρῳ γὰρ τῷ Α ϗ διαστήμασι τυχοῦσι, τοῖς ΑΓ, ΑΔ τόξα κύκλου γεγράφθω τὰ ΓΒ, ΔΕ. ϗ ἐπεὶ ὡς γωνία ΖΑΕ : ΖΑΔ :: ΖΕ : ΖΔ, (υ) ἔχει δὲ ἡ ΖΕ : ΖΔ λόγον συγκείμενον ἐκ τε τοῦ λόγου ὃν ἔχει ΖΕ : ΓΒ, καὶ ΓΒ : ΖΔ, (φ) καὶ γωνία ἄρα ἡ ΖΑΕ : ΖΑΔ λόγον ἔχει συγκείμενον ἔκτε τοῦ λόγου ὃν ἔχει ΖΕ : ΓΒ, καὶ ΓΒ : ΖΔ. ἀλλ' ὡς ΖΕ : ΒΒ :: ΑΖ : ΑΓ. (χ) ἡ ἄρα ΖΑΕ : ΖΑΔ λόγον ἔχει συγκείμενον ἐκ τε τοῦ λόγου ὃν ἔχει τὸ ΓΒ : ΖΔ, καὶ τῆς ΑΖ : ΑΓ.

ΘΕΩΡΗΜΑ Β'.

§. 129. Ἐὰν ἀπὸ τῶν ἐγγυτάτων σημείων Α, Δ, Φ (πίν. κ. σχ. 1.) τῆς ὁποιασοῦν καμπύλης ΤΑΔΦ ἐφαπτόμεναι μὲν ἀχθῶσιν αἱ ΑΨ, ΓΔΖ, ΦΕ, κάθετοι δὲ αὐταῖς αἱ ΑΠ, ΔΜ, ΦΜ, συμβάλλουσαι ἀλλήλαις κατὰ τὰ π καὶ Μ σημεῖα, αἱ ὑπ' αὐτῶν περιεχόμεναι γωνίαι ΑΠΔ, ΔΜΦ ὡς ἴσαι λογισθήσονται.

Ἐπεὶ γὰρ τὰ ΑΔ, ΔΦ ὡς τόξα κύκλων ἐκλαμβάνονται, (§. 124.) τὰ μὲν ἄρα Π καὶ Μ εἰσὶ τα ἑαυτῶν κέντρα, αἱ δὲ ΔΠ, ΜΔ αἱ αὐτῶν ἡμιδιάμετροι. (ὅρα τὴν ἐν τῷ 125. 6. δεῖξ.) ἡ ἄρα γωνία ΑΠΔ πρὸς τὴν ΔΜΦ λόγον ἔχει συγκείμενον ἐκτε τοῦ λόγου ὃν ἔχει ΑΔ : ΔΦ καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ΔΜ : ΑΠ. (§. 128) εἴτουν ἐστὶν ὡς ΑΠΔ : ΔΜΦ :: ΑΔ. ΔΜ : ΔΦ. ΑΠ. ἀλλὰ τὸ ΑΔ. ΔΜ = ΔΦ. ΑΠ : διὰ γὰρ τὴν τῶν Α, Δ, Φ σημεί-

(υ) Ὅσοις γὰρ βαθμοῖς ἴσα τὰ τόξα ΖΕ, ΖΔ, τοσούτοις καὶ γωνίαι ΖΑΕ, ΖΑΔ. μέτρα γὰρ, τῶν γωνιῶν τὰ τόξα. (φ) Κατὰ τὸ α'. Πόρισμα. τὸ μετὰ τὴν Ν. Πρότ. τοῦ ε'. τῆς Γεωμετρ. βιβλ. τὸ ἐν σελ. 135. (χ) Ὅρα τὴν Συνέπ. τὴν μετὰ τὴν β'. τοῦ ιβ'. Γεωμετρ. βιβλ. τὴν ἐν σελ. 240.

μείων μεγίστην ἐγγύτητα τὸ μὲν ΑΔ ὡς ἴσον τῷ ΔΦ ἐκλαμβάνεται, ἡ δὲ ΔΜ τῇ ΑΠ· ἄρα καὶ ἡ ΑΠΔ $=$ ΔΜΦ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α'.

§. 130. Καὶ γωνίαι ἄρα αἱ ΨΓΔ, ΖΕΦ, αἱ πρὸς τῇ συμπλώσει τῶν ἐφαπτομένων ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται. ἔστι γὰρ ἡ μὲν ΨΓΔ $=$ ΑΠΔ, ἡ δὲ ΖΕΦ $=$ ΔΜΦ. ὅρα τὴν δεῖξιν ἐν §. 125.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β'.

§. 131. Ἐὰν ἄρα ἐπιζευχθῇ ἡ ΑΔ χορδή, καὶ ἐκβληθεῖσα συμπέσῃ κατὰ τὸ Κ τῇ τεταγμένῃ ΦΘ ἐκβληθείσῃ, ἡ ΚΔΦ γωνία, ἡ ὑπὸ τῶν χορδῶν ΑΚ, ΔΦ περιεχομένη δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τῆς ΓΔΖ ἐφαπτομένης. ἐπεὶ γὰρ ἡ ΓΔΑ $=$ ΓΑΔ, (Ὅρα τὴν τοῦ 125. 6. δεῖξ.) ἡ ΨΓΔ διπλασία ἐστὶ τῆς ΓΔΑ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΖΕΦ διπλασία τῆς ΖΔΦ. ἔστι δὲ ἡ ΨΓΔ $=$ ΖΕΦ, (§. 130.) ἄρα καὶ ἡ ΓΔΑ $=$ ΖΔΦ. ἀλλὰ τῇ ΓΔΑ $=$ ΚΔΖ. ἄρα καὶ ἡ ΖΔΦ $=$ ΚΔΖ. ἡ ἄρα ΚΔΦ δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΓΔΖ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'.

§. 132. Ἐὰν οὖν ἡ ΑΞ $= y$, ἔσεται ἡ ΚΖ $= -\frac{1}{2}\, ddy$. ἐπεὶ γὰρ ἡ ΚΔΦ γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΔΖ, (§. 131.) ἔστιν ἄρα ὡς ΔΦ : ΔΚ :: ΦΖ : ΖΚ. ἀλλ' ἡ ΔΦ ὡς ἴση τῇ ΔΚ ἐκλαμβάνεται, (§. 121.) ἄρα καὶ ἡ ΦΖ τῇ ΖΚ. ἔστι δὲ ἡ ΚΦ $= -ddy$, (§. 126.) ἡ ἄρα ΚΖ $= -\frac{1}{2}\, ddy$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ'.

§. 133. Ἡ μὲν ἄρα ΚΔΦ γωνία, ἡ ὑπὸ τῶν χορδῶν περιεχομένη ἴση ἑκατέρα τῶν ΑΠΔ, ΔΜΦ, τῶν ὑπὸ

τῶν

τῶν καθεῖλαν περιεχομένων· ἡ δὲ ΚΔΖ, ἢ ΖΔΦ, ἡ ὑπὸ τῆς χορδῆς ϗ τῆς ἐφαπτομένης περιεχομένη ἡμίσεια ἑκατέρας τῶν ΑΠΔ, ΔΜΦ. ἐπεὶ γὰρ ἑκατέρα τῶν ΚΔΦ, ΖΕΦ διπλασία τῆς ΖΔΦ, ἔστιν ἄρα ἡ ΚΔΦ = ΖΕΦ. ἀλλὰ τῇ ΖΕΦ ἴση ἑκατέρα τῶν ΑΠΔ, ΔΜΦ, (Ὅρα τὴν δεῖξ. τοῦ 125. §.) ἄρα καὶ ἡ ΚΔΦ ἴση ἑκατέρα τῶν ΑΠΔ, ΔΜΦ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ΄.

§. 134. Τὴν ἔκθεσιν εὑρεῖν, τὴν ἐμφαίνουσαν τὴν φιλοῦσαν ἡμιδιάμετρον πάσης καμπύλης, διὰ τοῦ ἄξονος γεγραμμένης.

Ἤχθω ἀπὸ τοῦ Φ ἡ ΦΟ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΔΚ. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Δ, διαστήματι δὲ τῷ ΔΦ τόξον κύκλου γεγράφθω τὸ ΦΥ. κείσθω δὲ τὴν μὲν ΤΞ $= \chi$, τὴν δὲ ΑΞ $= y$, τὴν δὲ ΔΦ $= \delta\sigma$, τὴν δὲ ΔΜ $=$ Ν. καὶ ἐπεὶ ὡς ΚΔ : ΔΗ :: ΚΦ : ΦΟ, ἡ δὲ ΚΔ ὡς ἴση τῇ ΔΦ ἐκλαμβάνεται, (§. 121.) ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ΔΦ : ΔΗ :: ΚΦ : ΦΟ, ἤτοι ὡς $\delta\sigma . \delta\chi :: -\delta\delta y :$ ΦΟ, ἡ ἄρα ΦΟ $= -\frac{\delta\chi\delta\delta y}{\delta\sigma}$. διὸ καὶ τὸ τόξον ΦΥ $= -\frac{\delta\chi\delta\delta y}{\delta\sigma}$. διαφέρει γὰρ τῆς ΦΟ ἀπειροστῷ μεγέθει. ἐπεὶ δὲ οἱ τομεῖς ΔΦΥ, ΜΔΦ ὅμοιοί εἰσιν, (ἐκ τοῦ 133. §. δῆλον.) ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ΜΔ : ΔΦ :: ΔΥ : ΦΥ : εἴτουν ὡς Η : $\delta\sigma :: \delta\sigma : -\frac{\delta\chi\delta\delta y}{\delta\sigma}$. διὸ τὸ Η ἴσον τοῖς κατὰ τὸ Σ, ἢ τοῖς κατὰ τὸ Τ, (πίν. ιθ.) τεθέντος ἀντὶ $\delta\sigma^3$ τοῦ ἴσου αὐτῷ. ἔστι γὰρ τὸ $\delta\sigma = \sqrt{\delta\chi^2 + \delta y^2}$

Ἔστω

Ἔστω δὲ (πίν. κ. σχ. 2.) καὶ ἡ ΔΑΒ καμπύλη. ἀπὸ δὲ τῶν ἐγγυτάτων αὐτῆς σημείων Α καὶ Β ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι μὲν τῆς καμπύλης αἱ ΑΠ, ΒΣ, ἀλλήλαις μὲν κατὰ τὸ Ο, τῷ Ἄξονι δὲ κατὰ τὰ Π καὶ Σ σημεῖα συμβάλλουσαι· πρὸς ὀρθὰς δὲ αὐταῖς αἱ ΑΚ, ΒΚ, κατὰ τὸ Κ συμπίπτουσαι· τεταγμέναι δὲ αἱ ΑΕ, ΒΜ, κατὰ τὰ Φ καὶ Ζ σημεῖα συμβάλλουσαι τῇ ΚΦ, τῇ ἀπὸ τοῦ Κ ἀχθείσῃ παραλλήλῳ τῷ ΣΛ Ἄξονι. ἤχθω δὲ καὶ ἡ ΑΓ ὁποτέρᾳ τῶν ΣΛ, ΦΚ παράλληλος. καὶ ἔστω ἡ μὲν ΛΕ = Χ, ἡ δὲ ΑΕ = y, ἡ δὲ ΑΦ = Ζ, ἡ δὲ ΑΚ = Η. οὐκοῦν ἡ μὲν ΕΜ = ΑΗ = $\delta\chi$, ἡ δὲ ΒΗ = $\delta y + \delta z$. ἐπεὶ δὲ ὡς ΑΕ: ΕΝ :: ΑΦ: ΦΚ· ἀλλ' ἡ ΕΝ ὑποκάθετος οὖσα, ἴση ἐστὶ τῇ καθολικῇ ὑποκαθέτῳ, εἴτουν τῷ $\frac{y\delta y}{\delta\chi}$, (§. 85.) ὡς ἄρα y : $\frac{y\delta y}{\delta\chi}$ :: Ζ: ΦΚ. διὸ ἡ ΦΚ ἴση τοῖς κατὰ τὸ Υ. (πίν. ΙΘ.) ἔστι δὲ καὶ ὡς ΑΗ: ΑΒ :: ΑΦ: ΑΚ, (ὡς εὐθείας γὰρ ἐκλαμβανομένης τῆς ΑΒ, ὅμοιά εἰσι τὰ ΒΑΗ, ΑΦΚ τρίγωνα.) ἤτοι ὡς $\delta\chi$: $\delta\sigma$ :: Ζ: ΑΚ. ἡ ἄρα ΑΚ ἴση τοῖς κατὰ τὸ Φ. ἐὰν οὖν ληφθῇ τὸ αὐτῆς ἀπειροστὸν ἴσον ἔσται τῷ οὐδενί, αὐτῷ παρατιθέμενον. διὸ ἡ κατὰ τὸ Χ ἐξίσωσις συνίσταται, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ Ψ γίνεται, ἐξ αὐτῆς δὲ ἡ κατὰ τὸ Ω, τεθέντος δῆθεν ἀντὶ τοῦ δz τοῦ δy. ἐν τῇ κατὰ τὸ Φ οὖν ἐξισώσει, τεθέντος ἀντὶ τοῦ Ζ, τοῦ ἴσου αὐτῷ, ἔσται ἡ ΑΚ = Η, ἴση τοῖς κατὰ τὸ α.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α΄.

§. 135. Ἥτε κατὰ τὸ Σ ἢ Τ ἔκθεσις, ὡσαύτως καὶ ἡ κατὰ τὸ α τὴν φιλοῦσαν ἡμιδιάμετρον ἐμφαίνει· ἀλλ' ἐν μὲν τῇ εὑρέσει τῆς κατὰ τὸ Σ οὖν τῶν ἀπειροστῶν, ἤτοι τὸ $\delta\chi$ ὡς ἀμετάβλητον ἐλογίσθη, ὅπερ ἐστὶν οὐδὲν ἀπει-

ἀπειροστὸν αὐτῶ ἐλήφθη· ἐν δὲ τῷ εὑρέσει τῆς κατὰ τὸ α ὐδὲν ἀμετάβλητον λελόγισαι.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'.

§. 136. Τῆς δοθείσης δὲ ἐξισώσεως τὰ ἀπειροστὰ τῆς πρώτης καὶ δευτέρας τάξεως λαμβάνειν δεῖ, καὶ ἀντὶ τῶ $\delta\chi$, $\delta\chi^2$ καὶ δy, ἢ $\delta\delta y$, ἢ $\delta\delta\chi$ τὰ ἴσα αὐτοῖς τιθέναι ἐν ταῖς εὑρεθείσαις ἐκθέσεσι ταῖς τὴν φιλῶσαν ἡμιδιάμετρον ἐμφαινέσαις, ὅπως ἂν ἡ φιλῶσα εὑρεθῇ ἡμιδιάμετρος τῆς ὑπὸ τῆς δοθείσης ἐξισώσεως ἐμφαινομένης καμπύλης. καὶ ἐὰν μὲν τῇ κατὰ τὸ α ἐκθέσει χρώμεθα, ὐδὲν ἀμετάβλητον λογιστέον τῶν ἐν τῇ δοθείσῃ ἐξισώσει ἀγνώστων· ἐὰν δὲ τῇ κατὰ τὸ Σ, τὸ $\delta\chi$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε'.

§. 137. Τὴν ἔκθεσιν εὑρεῖν, τὴν ἐμφαίνεσαν τὴν φιλῶσαν ἡμιδιάμετρον πάσης καμπύλης, διὰ τῆς Ἑστίας γεγραμμένης.

Ἔςω καμπύλη ὁποιαῦν ἡ ΒΕΖ, διὰ τῆς Ἑστίας Α (πίν. κ. χ. 3.) ἀναγεγραμμένη. ἀπὸ δὲ τῶν ἐγγυτάτων αὐτῆς σημείων Β, Ε, Ζ ἐπὶ τὸ Α ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΑ, ΕΑ, ΖΑ. ϗ κέντρῳ μὲν τῷ Α, διαςήμασι δὲ τοῖς ΑΒ, ΑΕ τόξα κύκλων γεγράφθω τὰ ΒΓ, ΕΦ, ἤχθωσαν δὲ ἀπ' τῶν Β καὶ Ε σημείων πρὸς ὀρθὰς ταῖς ΑΕ, ΑΖ αἱ ΒΜ, ΕΟ. ἐπεζεύχθω δὲ ἡ χορδὴ ΒΕ, ἥτις ἐκβληθεῖσα συμβαλλέτω τῇ ΑΖ ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ Λ, καὶ συνεςάτω γωνία ἡ ΟΕΠ $=$ ΜΒΕ. ἐπεζεύχθω δὲ ἡ ΕΖ χορδὴ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Ε, διαςήματι δὲ τῷ ΕΖ τόξον κύκλυ γεγράφθω τὸ ΖΡ, καὶ νενοήσθωσαν αἱ ΕΨ, ΖΨ πρὸς ὀρθὰς ταῖς κατὰ τὰ Ε ϗ Ζ σημεῖα ἐφαπτομέναις τῆς καμπύλης. ἔςω δὲ ἡ μὲν ΑΒ $= y$, ἡ δὲ ΕΖ $= \delta\sigma$, τὸ δὲ τόξον ΕΦ $= \delta\chi$, ἡ δὲ ΕΨ $=$ Η. κείσθω δὲ ἡ ΒΜ $=$ ΕΟ. Καὶ

Καὶ ἐπεὶ τῶν ΕΒΜ, ΠΕΟ τριγώνων αἱ μὲν πρὸς τοῖς Μ ϰ̀ Ο γωνίαι ἴσαι, ἡ δὲ ΕΒΜ = ΠΕΟ, ἔστι δὲ ϰ̀ ἡ ΒΜ = ΕΟ, ἄρα ϰ̀ ἡ ΒΕΜ = ΕΠΟ, ϰ̀ ἡ ΕΜ = ΠΟ. διὸ καὶ ἡ ΕΙ = ΠΦ. (αἱ γὰρ ΓΜ, ΦΟ ἀπειροστά εἰσι ταῖς ΕΓ, ΦΠ παρατιθέμεναι.) οὐκοῦν ἡ ΦΖ − ΦΠ = ΦΖ − ΕΓ. ἀλλ᾽ ἡ ΦΖ − ΦΠ = − ΖΠ ἄρα ϰ̀ ἡ ΦΖ − ΕΓ = − ΖΠ. ἐπεὶ δὲ ἡ ὑπεροχὴ τῶν ΑΒ, ΑΕ ἀπειροστόν ἐστι τῆς πρώτης τάξεως, οὕτω ἡ ΓΕ = δy, ἡ ὑπεροχὴ ἄρα τῶν ΦΖ, ΕΓ ἀπειροστὸν τῆς δευτέρας τάξεώς ἐστι διὸ ἡ ΖΠ = $\delta\delta y$. καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν γωνία ΒΕΑ = ΕΑΠ + ΕΛΑ, ἡ δὲ ΕΠΑ = ΠΕΛ + ΕΛΑ, ἔστι δὲ ἡ ΒΕΑ, οὕτω ἡ ΒΕΜ = ΕΠΑ, ὡς δέδεικται, αἱ ἄρα ΕΑΠ + ΕΛΑ = ΠΕΛ + ΕΛΑ. οὐκοῦν ἡ ΕΑΠ = ΠΕΛ. οἱ ἄρα τομεῖς ΑΕΦ, ΕΙΡ ὅμοιοι ἀλλήλοις εἰσίν. ὡς ἄρα ΑΕ : ΕΦ :: ΕΡ : ΡΙ. ἤτοι ὡς $y : \delta\chi :: \delta\sigma$: ΡΙ. τὸ ἄρα ΡΙ = $\frac{\delta\chi\delta\sigma}{y}$, ἐπεὶ δὲ καὶ ὡς ΕΠ : ΕΦ :: ΖΠ : ΖΙ, (ὡς εὐθειῶν γὰρ ἐκλαμβανομένων τῶν ΕΦ, ΖΙ τόξων, ὅμοια εἰσι τὰ ΠΕΦ, ΠΙΖ τρίγωνα) οὕτω ὡς ΕΖ : ΕΦ :: ΖΠ : ΖΙ, (ἴση γὰρ ἡ ΕΠ τῇ ΕΖ, κατὰ τὸ §. 121.) ἄρα καὶ ὡς $\delta : \delta\chi : -\delta\delta y$: ΖΙ. τὸ ἄρα ΖΙ = $\frac{-\delta\chi\delta\delta y}{\delta\sigma}$ ὅλον ἄρα τὸ τόξον ΡΖ = $\frac{\delta\chi\delta\sigma}{y} - \frac{\delta\chi\delta\delta y}{\delta\sigma}$. ἐπεὶ δὲ ἡ γωνία ΛΕΖ = ΕΨΖ, (§. 133.) οἱ τομεῖς ἄρα ΨΕΖ, ΕΡΖ ὅμοιοί εἰσι. διὸ ὡς ΨΕ : ΕΖ :: ΕΖ : ΖΡ, ἤτοι ὡς Η : $\delta\sigma :: \delta\sigma : \frac{\delta\chi\delta\sigma}{y} - \frac{\delta\chi\delta\delta y}{\delta\sigma}$. ἐξ οὗ δῆλον, ὅτι τὸ Η, ἤτοι ἡ τὴν ζητουμένην Φιλοῦσαν ἡμιδιάμετρον ἐμφαίνουσα ἔκθεσις ἐστὶν ἡ κατὰ τὸ β.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 138. Ἐν τῇ εὑρεθείσῃ ἐκθέσει τὸ $\delta\chi$ ὡς ἀμετάβλητον ἐλήφθη. εὑρεθήσεται δὲ ἡ αὐτὴ ἔκθεσις τοῦ

μὲν

μὲν δy, ἢ τῦ δσ ὡς ἀμεταβλήτυ ληφθέντος, τῦ δὲ δχ, ὡς μεταβλητῦ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 139. Ἐμφαινέτω ἡ ΒΕΖ ὁποιανῦν καμπύλην. (πίν. ιϛ. χ. 4.) ἀπὸ δὲ τῆς Ἑστίας αὐτῆς Α ἐπὶ τὰ ἔγγιστα σημεῖα Β, Ε, Ζ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΒ, ΑΕ, ΑΖ, καὶ ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι αἱ ΜΒΗ, ΟΕΚ, ΖΔ, ἀλλήλαις συμβάλλυσαι κατὰ τὰ Η καὶ Δ σημεῖα. ἐπεζεύχθω δὲ ἥτε χορδὴ ΕΖ, καὶ ἡ ΒΕ, ἑκατέρα δὲ αὐτῶν κατὰ τὸ συνεχὲς ἐκβεβλήσθω. καὶ ἀπὸ μὲν τῦ Α ἤχθωσαν πρὸς ὀρθὰς ταῖς ΜΗ, ΝΛ ΟΚ, ΙΡΖ αἱ ΑΜ, ΑΝ, ΑΟ, ΑΙΙ· ἀπὸ δὲ τῶν Β, Ε, Ζ ταῖς ΜΗ, ΟΔ, ΔΖ αἱ ΒΧ, ΕΧ, ΖΨ, κατὰ τὰ Χ καὶ Ψ σημεῖα ἀλλήλαις συμβάλλυσαι. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Α, διαστήμασι δὲ τοῖς ΑΒ, ΑΕ τόξα κύκλων γεγράφθω τὰ ΒΓ, ΕΦ. ὡσαύτως κέντρῳ τὸ Η, καὶ διαστήματι τῷ ΗΙ γεγράφθω τόξον τὸ ΙΘ. Ἔστω δὲ ἡ μὲν ΑΜ = Π, ἡ δὲ ΕΨ Η, ἡ δὲ ΗΘ = τ ἡ δὲ ΒΕ = δσ ἡ δὲ ΑΒ = y ἐκεῖνο ἡ μὲν ΟΙ = δπ, ἡ δὲ ΕΓ = δy. καὶ ἐπεὶ ἡ ΟΗΙ γωνία διπλασία ἐστὶ τῆς ΗΕΒ, (ὅρα τὸ 125. §.) ἤτοι τῆς ΡΕΚ = ΚΕΖ (§. 131.) διπλασία δὲ τῆς ΚΕΖ ἡ ΚΔΖ, ἡ ἄρα ΟΗΙ = ΚΔΖ. ἀλλὰ τῇ ΚΔΖ = ΕΨΖ, (Ὅρα τὴν δεῖξ. τῦ 125 §.) ἡ ἄρα ΟΗΙ = ΕΨΖ. καὶ οἱ τομεῖς ἄρα ΨΕ, ΗΙΘ ὅμοιοί εἰσιν. ἐκεῖν ὡς ΗΘ : ΟΙ :: ΨΕ : ΕΖ, (ἀντὶ τῦ ΘΙ τόξυ ἡ ΟΙ εὐθεῖα ἐκλαμβάνεται, ὡς ἀπειροστῷ αὐτῦ διαφέρυσα). ἤτοι ὡς τ : δπ :: Η : δσ. ἔστι δὲ καὶ ὡς ΒΕ : ΕΓ :: ΑΕ : ΕΝ, (διὰ τὴν τῶν τριγώνων ΕΒΓ, ΕΝΑ ὁμοιότητα). ἤτοι ὡς δσ : δy :: y : τ. (ἀντὶ τῆς ΕΝ ἡ ΗΘ, ἤτοι τὸ τ ἐκλαμβάνεται. ἔστι γὰρ τὸ μὲν $\overline{EN}^2 = \overline{AE}^2 - \overline{AN}^2$, τὸ δὲ $\overline{EO}^2 = \overline{AE}^2 - \overline{AO}^2$, ἴση δὲ ἡ ΑΟ τῇ ΑΝ λογίζεται, ὡς αὐτῆς ὑπερέχυσα τῷ ἀπειροστῷ ΟΥ, διὸ καὶ ἡ ΕΝ = ΕΟ, ἤτοι τῇ ΗΘ. ἀλογεῖται γὰρ ἡ ΗΕ ὡς ἀπειροστον, στόν, καὶ πρόσκειται τῷ ἀπειροστὸν ΟΘ.) ἐκ μὲν οὖν τῆς πρώτης ἀναλογίας ἡ κατὰ τὸ γ ἐξίσωσις γίνεται, (πίν. ιθ.) ἐκ δὲ τῆς δευτέρας ἡ κατὰ τὸ δ, ἐξ αὐτῶν δὲ ἡ κατὰ τὸ ε. ἐπεὶ δὲ ἡ ΑΜ ὑφαπτομένη οὖσα, ἴση ἐστὶ τῇ καθολικῇ τῆς ὑφαπτομένης ἐκθέσει τῇ κατὰ τὸ ζ, (§. 91.) τεθέντος ἀντὶ μὲν τοῦ z καὶ δz^2 τοῦ y καὶ δy^2, ἀντὶ δὲ τοῦ δκ, καὶ $\delta \kappa^2$ τοῦ δχ καὶ $\delta\chi^2$, γίνεται ἡ ΑΜ, ἤτουν τὸ π ἴσον τοῖς κατὰ τὸ η. ληφθέντων δὲ τῶν ἀπειροστῶν, ἀμεταβλήτου λογισθέντος τοῦ δχ, ἔσεται τὸ δπ ἴσον τοῖς κατὰ τὸ θ, ἢ τοῖς κατὰ τὸ ι, τεθέντος ἀντὶ τῆς $\sqrt{\delta\chi^2 + \delta y^2}$ τοῦ ἴσου αὐτῇ, ἤτουν τοῦ δσ· ὡσαύτως ἐὰν μὲν ἀμετάβλητον λογισθῇ τὸ δy, ἔσεται τὸ δπ ἴσον τοῖς κατὰ τὸ κ, ἤτουν τοῖς κατὰ τὸ λ, ἢ τοῖς κατὰ τὸ μ· ἐὰν δὲ τὸ δσ, ἤτοι ἡ $\sqrt{\delta\chi^2 + \delta y^2}$, ἔσεται τὸ δπ ἴσον τοῖς κατὰ τὸ ν. ἐπεὶ δὲ τὸ $\delta\sigma^2$ ἴσον τοῖς κατὰ τὸ ξ, τῶν ἀπειροστῶν ληφθέντων, ἔσεται τὸ δδχ ἴσον τοῖς κατὰ τὸ ο. τεθέντων οὖν ἐν τῇ κατὰ τὸ ν ἐξισώσει ἀντὶ τῶν δδχ καὶ $\sqrt{\delta\chi^2 + \delta y^2}$ τῶν ἴσων αὐτοῖς, ἔσεται τὸ δπ ἴσον τοῖς κατὰ τὸ π. ἐν τῇ κατὰ τὸ ε οὖν ἐξισώσει ἐὰν μὲν τεθῇ τὸ κατὰ τὸ ι ἴσον τῷ δπ, προκύψει ἡ κατὰ τὸ ρ ἐξίσωσις. ἐὰν δὲ τὸ κατὰ τὸ μ, ἡ κατὰ τὸ σ· ἐὰν δὲ τὸ κατὰ τὸ π, ἡ κατὰ τὸ τ.

Οὐκοῦν ἡ μὲν κατὰ τὸ ρ ἔκθεσις ἐμφαίνει τὴν φιλοῦσαν ἡμιδιάμετρον, τοῦ δχ ἀμεταβλήτου λογισθέντος· ἡ δὲ κατὰ το σ, τοῦ δy· ἡ δὲ κατὰ τὸ τ, τοῦ δσ.
