τὰ τὸ Α εἰς τὴν κατὰ τὸ Υ μεταβάλλεται, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ Φ γίνεται, ἡ αὐτὴ οὖσα τῇ κατὰ τὸ Χ· ἐξ αὐτῆς δὲ, πληρωθέντος τοῦ τετραγώνου, ἡ κατὰ τὸ Ψ· τεθέντος δὲ τοῦ z ἴσου τοῖς κατὰ τὸ Ω, ἡ κατὰ τὸ α, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ β, ἐξ αὐτῆς δὲ ἡ κατὰ τὸ γ, ἡ αὐτὴ οὖσα τῇ κατὰ τὸ δ· ἥτις Ἔλλειψιν σημαίνει, πλαγίαν μὲν πλευρὰν ἔχουσαν τὸ $\frac{2\alpha\beta^2}{\beta^2-\gamma^2}$, (§. 244. τοῦ 1. βιβλ.) ἐλάσσονα δὲ Διάμετρον τὸ $\frac{2\alpha\beta}{\sqrt{\beta^2-\gamma^2}}$. (§. 246. τοῦ 1. βιβλ.) διὰ τὰ αὐτὰ δὲ ἐὰν τὸ $\beta<\gamma$ ἡ ἐν τῷ Α ἐξίσωσις εἰς τὴν ἐν τῷ Σ μεταβληθήσεται, Ὑπερβολὴν σημαίνουσαν, ἧς πλαγία μὲν πλευρὰ τὸ $\frac{2\alpha\beta^2}{\gamma^2-\beta^2}$, (§. 252. τοῦ 1. βιβλ.) ὀρθὴ δὲ τὸ 2α. (§. 254. τοῦ αὐτ.) ἐὰν δὲ τὸ $\gamma=0$, τὴν κατὰ τὸ Α ἡ κατὰ τὸ ζ ἐμφαίνει, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ η γίνεται, ἐξ αὐτῆς δὲ ἡ κατὰ τὸ Θ, κύκλον δηλοῦσα, ἡμιδιάμετρον (§. 229.) ἔχοντα τὸ α.

ΚΕΦ. Ζ΄.

Περὶ τῆς μεθόδου τοῦ διὰ τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εὑρίσκειν τὴν Ὑφαπτομένην καὶ Ἐφαπτομένην, τὴν Ὑποκάθετον καὶ Κάθετον, τὸ χωρίον καὶ τὸ στερεὸν τὸ ἐκ τῆς καμπύλης γινόμενον, ἣν ἡ δοθεῖσα ἐμφαίνει ἐξίσωσις· καὶ περὶ τῆς μεθόδου τοῦ τὴν ἐξίσωσιν εὑρίσκειν ἑνὸς τούτων δοθέντος.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'.

§. 101. Δοθείσης τῆς κατὰ τὸ (πίν. ιζ.) Α ἐξισώσεως, τῆς Παραβολὴν δηλούσης, τὴν Ὑφαπτομένην αὐτῆς εὑρεῖν.

Εἰλήφθω τὰ τῆς δοθείσης ἐξισώσεως ἀπειροστά. προκύψει ἂν ἡ κατὰ τὸ Β ἐξίσωσις, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ Γ γίνεται. ἐν τῇ οὖν ἐκθέσει $\frac{ydx}{dy}$, τῇ πάσης καμπύλης τὴν Ὑφαπτομένην ἐμφαινούσῃ (§. 85.) τεθέντος ἀντὶ τοῦ dy, τοῦ ἄρτι εὑρεθέντος ἴσου αὐτῷ, ἡ κατὰ τὸ Δ περίζεται ἐξίσωσις· ἐν ᾗ ἀντὶ τοῦ y^2 τεθέντος τοῦ ἴσου αὐτῷ, τοῦ ἐν τῷ Α, ἡ κατὰ τὸ Ε ἐξίσωσις γίνεται. ἐξ ἧς δῆλον, ὅτι ἡ τῆς Παραβολῆς Ὑφαπτομένη διπλασία τῆς ἀποτετμημένης.

Τῷ αὐτῷ δὴ τρόπῳ, δοθείσης τῆς κατὰ τὸ Ζ ἐξισώσεως, τῆς τὴν Κισσοειδῆ ἐμφαινούσης, (§. 332. τοῦ 1. βιβλ.) εὑρεθήσεται ἡ αὐτῆς Ὑφαπτομένη. ληφθέντων γὰρ τῶν ἀπειροστῶν, τῶν κατὰ τὸ Η, ἔσται τὸ dx ἴσον τοῖς κατὰ τὸ Θ· ἀντ' αὐτοῦ δὲ τεθέντος τοῦ ἴσου αὐτῷ ἐν τῇ καθολικῇ ἐκθέσει, ἡ κατὰ τὸ Ι ἐξίσωσις γίνεται, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ Κ, τέθεντος ἀντὶ τοῦ y^2 τοῦ ἴσου αὐτῷ, τοῦ ἐν τῷ Ζ. ἐξ οὗ δῆλον, ὅτι ἡ Ὑφαπτομένη ΗΓ τῆς Κισσοειδοῦς ΑΜΛ ἴση τοῖς κατὰ τὸ Κ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'.

§. 102. Τῆς αὐτῆς ἐξισώσεως δοθείσης, τὴν Ὑποκάθετον, τὴν Ἐφαπτομένην, τὴν Κάθετον, τὸ τῆς καμπύλης τόξον, τὸ χωρίον, καὶ τὸ ὑπ' αὐτῆς γινόμενον στερεὸν εὑρεῖν.

Τῶν ἀπειροστῶν ληφθέντων, ὡς εἴρηται, (§. 101.) τεθήτω ἐν τῇ καθολικῇ ἐκθέσει, $\frac{ydy}{dx}$ τῇ τὴν Ὑποκάθεθετον πάσης καμπύλης ἐμφαινέσῃ, (§. 85.) ἀντὶ τῦ $y\delta y$ τὸ ἴσον αὐτῷ, τὸ ἐν τῷ Β. ἐκῦν προκύψει ἡ κατὰ τὸ Λ ἐξίσωσις. ἐξ ἧς δῆλον, ὅτι ἡ τῆς Παραβολῆς Ὑποκάθετος ἴση τῷ ἡμίσει τῆς παραμέτρε.

Ὁμοίως ἐν τῇ καθολικῇ ἐκθέσει, $\frac{y\sqrt{\delta\chi^2+\delta y^2}}{\delta y}$ τῇ δηλέσῃ τὴν Ἐφαπτομένην πάσης καμπύλης, (§. 85.) τεθέντος ἀντὶ τῦ $\delta\chi^2$, τῦ ἴσε αὐτῷ, τῦ ἐκ τῆς κατὰ τὸ Β ἐξισώσεως ποριζομένε, ἡ κατὰ το Μ ἐξίσωσις γίνεται, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ Ν, τεθέντων ἀντὶ τῶν y καὶ y^2 τῶν ἴσων αὐτοῖς, τῶν ἀπο τῆς κατὰ τὸ Λ ἐξισώσεως προκυπτόντων. ἐξ ὧν δῆλον, ὅτι ἡ τῆς Παραβολῆς Ἐφαπτομένη ἴση τοῖς κατὰ τὸ Ν.

Τῷ αὐτῷ δὴ τρόπῳ εὑρεθήσεται ἡ μὲν Κάθετος ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ Ξ ἐκθέσεως ἐμφαινομένη· τὸ δὲ παραβολικὸν τόξον ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ Ο· (τὸ ὁλόκληρον αὐτῆς ἐςὶ τὸ ἐν τῷ π, ὅπερ εὕρηται τεθείσης τῆς $\sqrt{4y^2+\alpha^2} = 2y+Z$.) τὸ δὲ παραβολικὸν χωρίον ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ Ρ, καὶ τῦ ὁλοκλήρε ληφθέντος ὑπὸ τῆς κατὰ το Σ, ἢ ὑπὸ τῆς κατα τὸ Τ, τεθέντος ἀντὶ τῦ y^2 τῦ ἴσε αὐτῷ, τῦ ἐν τῷ Λ· τὸ δὲ ςερεὸν τὸ ὑπὸ τῆς παραβολῆς γινόμενον, ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ Υ, καὶ τῦ ὁλοκλήρε ληφθέντος, ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ Φ, ἢ ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ Χ, τεθέντος τῦ ἴσε τῷ y^2, τῦ ἐν τῷ Λ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 103. Τῇ αὐτῇ μεθόδῳ, ὁποιασῦν δοθείσης ἐξισώσεως, ἅπαντα τὰ εἰρημένα εὑρεθήσεται.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'.

§. 104. Δοθείσης τῆς Ὑφαπτομένης καμπύλης τινὸς εὑρεῖν τὴν ἐξίσωσιν, τὴν ἐμφαίνεσαν τὴν καμπύλην.

Ἔςω

Ἔστω ἡ δοθεῖσα Ὑφαιπτομένη = 2χ. οὐκοῦν ἡ κατὰ τὸ Ψ συνίσταται ἐξίσωσις, (§. 85.) ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ Ω γίνεται, καὶ ληφθέντων τῶν ὁλοκλήρων (§. 46.) ἡ κατὰ τὸ α, ἡ αὐτὴ οὖσα τῇ κατὰ τὸ β, (ο) ἥτις παραβολὴν ἐμφαίνει.

Δοθείσης δὲ τῆς Ὑποκαθέτου ἴσης $\frac{1}{2}$ α, ἡ κατὰ τὸ γ συνίσταται ἐξίσωσις, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ δ, καὶ τῶν ὁλοκλήρων ληφθέντων, (§. 34.) ἡ κατὰ τὸ ε, ἡ αὐτὴ οὖσα τῇ κατὰ τὸ ζ, ἥτις τὴν αὐτὴν Παραβολὴν σημαίνει.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 105. Τῷ αὐτῷ δὴ τρόπῳ, δοθέντος ἑνὸς τῶν εἰρημένων, (§. 102.) εὑρεθήσεται ἡ ἐξίσωσις.

ΚΕΦ. Η΄.

Περὶ τῶν μεγίστων καὶ ἐλαχίστων.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 106. Ἐὰν καμπύλης αἱ τεταγμέναι προϊοῦσαι αὔξωσιν ἄχρι τεταγμένης τινός, μεθ' ἣν μειοῦνται, ἢ τὸ ἀνάπαλιν, ἡ μέθοδος τοῦ εὑρίσκειν τὴν μεγίστην ἢ ἐλαχίστην τῶν τεταγμένων, Μέθοδος τῶν μεγίστων ἢ ἐλαχίστων καλεῖται.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 107. Οἷον ἐν μὲν τῷ ΑΒΓ (πίν. ΙΗ. σχ. 1.) κύκλῳ αἱ τεταγμέναι ΔΕ, ΖΗ, ΕΙ καὶ αἱ ἐφεξῆς προϊοῦσαι αὔξουσιν ἄχρι τῆς διὰ τοῦ κέντρου ΒΚ, μεθ' ἣν προϊοῦσαι μειοῦνται, ἐν δὲ τῇ ΒΓΗ (σχ. 2.) καμπύλῃ μειοῦνται μέχρι τῆς ΓΔ, μεθ' ἣν πάλιν αὔξουσι. διὸ ἐν μὲν τῷ κύκλῳ μεγίστη ἡ ΒΚ, ἐν δὲ τῇ ΒΓΗ καμπύλῃ, ἐλαχίστη ἡ ΓΔ.

ΣΗ-

(ο) Περὶ τῆς τοῦ α προσθήκης ὅρα §. 37.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'.

§. 108. Οὐ πᾶσα καμπύλη μεγίστην καὶ ἐλαχίστην ἔχει. τοῦ μὲν γὰρ ΑΒΓ κύκλου ἡ ἐλαχίστη ἴση τῷ οὐδενὶ, τῆς δὲ ΒΙΗ καμπύλης ἡ μεγίστη ἄπειρος.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'.

§. 109. Ἐὰν ταῖς καμπύλαις, ταῖς μεγίστην ἢ ἐλαχίστην ἐχούσαις, ἡ ἐφαπτομένη ἡ ἀπὸ τοῦ πέρατος ἑκατέρας αὐτῶν ἀγομένη ἤτοι παράλληλος τῷ ἄξονι γίνεται, οἷα ἡ ΡΒ, ἢ τῇ τεταγμένῃ ταυτίζεται, οἷον ἡ ΒΛ, προϊοῦσα ἐπὶ τὰ Δ μέρη, τῇ ΓΔ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α'.

§. 110. Τῆς τεταγμένης ἄρα μεγίστης ἢ ἐλαχίστης γινομένης, ἡ Ὑφαπτομένη ἤτοι ἄπειρος, ἢ τῷ οὐδενὶ ἴση γίνεται. ἡ μὲν γὰρ ΒΡ· ἄπειρος, (π) ἡ δὲ ΔΛ ἴση τῷ οὐδενὶ, τῆς ΒΛ τῇ ΓΔ ταυτισθείσης.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β'.

§. 111. Ἵνα οὖν διὰ τῆς δοθείσης ἐξισώσεως ἡ μεγίστη, ἢ ἡ ἐλαχίστη εὑρεθῇ, τιθέναι δεῖ τὴν καθολικὴν τῆς Ὑφαπτομένης ἔκθεσιν ἤτοι τῷ οὐδενὶ, ἢ τῷ ἀπείρῳ ἴσην καὶ κειμένου μὲν τοῦ πρώτου, οὕτως τῆς $\frac{y\delta\chi}{\delta y}=0$, ἔσται καὶ τὸ $\delta\chi=0$. ἐστι γὰρ ὡς $\delta y : \delta\chi :: y : 0$. τοῦ δευτέρου δὲ κειμένου, ἤτοι τῆς $\frac{y\delta\chi}{\delta y}=\infty$, (διὰ τοῦ ∞ σημείου τὸ ἄπειρον συμαίνεται) ἔσται τὸ $\delta y=0$ ἐστι γὰρ ὡς $\delta y : \delta\chi :: y : \infty$.

ΠΟ-

(π) Ὡς παράλληλος τῇ ΑΓ. ἐπεὶ δὲ ἡ ἐφαπτομένη ΒΡ ἄπειρος, δῆλον ὅτι καὶ ἡ ὑφαπτομένη ἡ ὑπ' αὐτῆς τε καὶ τῆς τεταγμένης περατουμένη ἄπειρος.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'.

§. 112. Ἐὰν οὖν ληφθῇ μὲν τὰ ἀπειροςὰ τῆς δοθείσης ἐξισώσεως, τεθῇ δὲ τῶν δχ, δy ἤτοι τὸ ἕτερον, ἢ ἑκάτερον τῷ ἐδενὶ ἴσον, πεοιωθήσεται ἡ ἀποτετμημένη, ἀφ' ἧς ἡ μεγίςη, ἢ ἡ ἐλαχίςη ἀχθήσεται.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'.

§. 113. Τὴν μεγίςην εὑρεῖν τῶν τεταγμένων, τῶν ἐν τῇ καμπύλῃ, τῇ ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ η δοθείσης ἐξισώσεως ἐμφαινομένῃ. (πίν. ιζ'.)

Εἰλήφθω τὰ τῆς ἐν τῷ η δοθείσης ἐξισώσεως ἀπειροςά. ὅθεν ἡ κατὰ τὸ θ συςαθήσεται ἐξίσωσις. κειμένε δὲ τε͂ $\delta y = o$, ἡ κατὰ τὸ ι γίνεται. ληφθείσης οὖν τῆς ἀποτετμημένης $\chi = \alpha$, ἡ ἀπὸ τε͂ πέρατος αὐτῆς ταχθεῖσα, ἔσεται ἡ ζητεμένη μεγίςη. (πίν. ιή. χ. 1.)

Ἡ γὰρ κατὰ τὸ η δοθεῖσα ἐξίσωσις κύκλον σημαίνει, ἡμιδιάμετρον ἔχοντα τὸ α. (§. 229.) τὸ ἕτερον ἄρα τῶν τε͂ α περάτων τὸ τε͂ κύκλε κέντρον ἐςίν· ἡ δὲ διὰ τε͂ κέντρε μεγίςη.

Ἐὰν δὲ ἐν τῇ κατὰ τὸ η ἐξισώσει τὸ α ἀντὶ τε͂ χ τεθῇ, ἡ κατὰ τὸ κ ἐξίσωσις γίνεται, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ λ, ἐμφαίνεσα τὴν ἐν τῷ κύκλῳ μεγίςην ἴσην τῇ ἡμιδιαμέτρῳ.

Κείσθω δὲ τὸ $\delta y = oo$, ὅπερ ἐςὶ $\delta\chi = o$. καὶ ἐπεὶ τὸ $\delta y = oo$, ἄρα καὶ τὸ $y\delta y = oo$. διὸ τὸ $\alpha\delta\chi - \chi\delta\chi = o$, διὰ τὴν κατὰ τὸ θ ἐξίσωσιν. ἐξ ὧ πάλιν προκύπτει τὸ $\chi = \alpha$.

Ὁμοίως ληφθέντων τῶν ἀπειροςῶν τῆς κατὰ τὸ μ ἐξισώσεως, τῆς Ὑπερβολὴν ἐμφαινέσης, (§. 251.) καὶ τεθέντος τε͂ $\delta y = o$, ἔσεται τὸ $z = o$. διὸ δὴ διὰ τὴν κατὰ τὸ μ ἐξίσωσιν τὸ $y^2 = -\frac{1}{2}\alpha^2$. τὸ

ἄρα

ἄρα y ἐπίπλαστον μέγεθός ἐστιν, (ὅρα §. 42. τοῦ 1. βιβλ.) ὅπερ ἐμφαίνει μηδεμίαν μεγίστην τεταγμένην εἶναι ἐν τῇ Ὑπερβολῇ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'.

§. 114. Δοθέντος τοῦ ΑΒΓΔ (πίν. ΙΗ. χ. 3.) ὀρθογωνίου εὑρεῖν τὴν ἐλαχίστην εὐθεῖαν, τὴν διὰ τοῦ σημείου Γ ἀγομένην, καὶ ὑπὸ τῶν ἐκβληθεισῶν πλευρῶν τῆς ΔΑΒ γωνίας περιεχομένην.

Ἔστω ἡ μὲν $ΑΒ = α$, ἡ δὲ $ΒΓ = β$, ἡ δὲ ζητουμένη ἐλαχίστη $ΨΓΗ = y$ ἡ δὲ $ΒΗ = χ$.

Οὐκοῦν ἡ μὲν $ΑΗ = α + χ$, ἡ δὲ $ΓΗ = \sqrt{β^2 + χ^2}$. ϗ ἐπεὶ ὡς ΗΑ : ΗΨ :: ΗΒ :: ΗΓ, οὕτως ὡς $α + χ : y :: χ : \sqrt{β^2 + χ^2}$, συσταθήσεται ἄρα ἡ κατὰ τὸ ξ ἐξίσωσις, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ ο γίνεται, (πίν. ιζ.) ϗ τῶν ἀπειροστῶν ληφθέντων ἡ κατὰ τὸ π, τεθέντος δὲ τοῦ $δy = 0$, (§. 112.) ἡ κατὰ τὸ ρ, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ σ. ληφθείσης οὖν τῆς $ΒΗ = \sqrt[3]{αβ^2}$, ἡ ἀπὸ τοῦ Η ἐπὶ τὸ Γ ἐπιζευχθεῖσα, ϗ ἐκβληθεῖσα ἔσεται ἡ ζητουμένη ἐλαχίστη εὐθεῖα.

Ἐὰν δὲ τεθῇ τὸ $δy = \infty$, ἔστι καὶ τὸ $y = \infty$. διὸ διὰ τὴν κατὰ τὸ ο ἐξίσωσιν ἡ κατὰ τὸ τ πορίζεται, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ υ, ἐξ αὐτῆς δὲ ἡ κατὰ τὸ Φ. Τὸ ἄρα $χ$ μέγεθος ἐπίπλαστόν ἐστιν (§. 42. τοῦ 1. βιβλ.) ὅπερ δηλοῖ, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Β ἐπὶ τὸ Γ ἐπιζευγνυμένη, ϗ ἐπ' ἄπειρον ἐκβαλλομένη ἐστὶν ἡ μεγίστη εὐθεῖα τῶν περιεχομένων ὑπὸ τῶν ΑΨ, ΑΗ πλευρῶν.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 115. Ἐν ταῖς τοιαύταις ἄρα ἐκθέσεσι, τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ κλάσματος ἴσου τῷ οὐδενὶ τεθέντος, ὡσαύτως καὶ τοῦ ὀνομαστοῦ, τὰ ζητούμενα πορίζονται.

ΠΡΟ-

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γʹ.

§. 116. Τριχιλομηθείσης τῆς δοθείσης εὐθείας ΑΒ (πίν. ιή. χ. 4) κατὰ τὰ Γ, Φ σημεῖα, αὖθις κατὰ τὸ Ε τεμεῖν αὐτήν, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ περιεχόμενον ὀρθογώνιον, πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΕ, ΕΦ λόγον ἔχειν ἐλάσσονα παντὸς δοθέντος λόγου.

Ἔστω ἡ μὲν ΑΓ $= \alpha$, ἡ δὲ ΓΦ $= \beta$, ἡ δὲ ΓΒ $= \gamma$, ἡ δὲ ΓΕ $= \chi$.

Οὐκοῦν ἡ μὲν ΑΕ $= \alpha + \chi$, ἡ δὲ ΕΒ $= \gamma - \chi$, ἡ δὲ ΕΦ $= \beta - \chi$. διὸ τὸ μὲν ΑΕ. ΕΒ $= \overline{\alpha + \beta}.\ \overline{\gamma - \chi}$, τὸ δὲ ΓΕ. ΕΦ $= \chi.\ \overline{\beta - \chi}$. ἡ ἄρα κατὰ τὸ χ (πίν ιζ.) ἔκθεσις, ἡ αὐτὴ οὖσα τῇ κατὰ τὸ Ψ, τὸν λόγον ἐμφαίνει, ὃν ἔχει τὸ ΑΕ. ΕΒ : ΓΕ. ΕΦ. εἰλήφθω δὴ τὰ ἀποφατικὰ τῆς κατὰ τὸ ψ ἐκθέσεως, ἅπερ εἰσὶ τὰ κατὰ τὸ ω. καὶ κείσθω ὁ τοῦ κλάσματος ἀριθμητὴς ἴσον τῷ οὐδενί, ὡς ἐν τῷ Α ὁρᾶται. (§. 115.) ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης ἡ κατὰ τὸ C γίνεται, ἐξ ἧς, τοῦ τετραγώνου πληρωθέντος, ἡ κατὰ τὸ D, καὶ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἐξαχθείσης, ἡ κατὰ τὸ Ε. δύω οὖν τὰ τῷ χ ἴσα, ὧν τὸ μὲν καταφατικόν ἐστιν, ἀπὸ τῆς ΓΑ. ΓΒ λαμβανόμενον, τὸ δὲ ἀποφατικὸν ἀπὸ τῆς ΓΑ. ἑκατέρου δὲ τούτων τεθέντος ἐν τῇ κατὰ τὸ χ ἐκθέσει, δῆλος ἔσται ὁ ζητούμενος λόγος, ὁ παντὸς δοθέντος ἐλάσσων.

Ἐὰν δὲ ὁ τῆς κατὰ τὸ ω ἐκθέσεως ὀνομαστὴς ἴσος τῷ οὐδενὶ τεθῇ, ἔσεται τὸ $\chi = \beta$. διὸ ἡ ΓΕ $=$ ΓΦ. τὸ ἄρα ὀρθογώνιον ΓΕ. ΕΦ $= 0$. διά τοι τοῦτο ὁ λόγος ὃν ἔχει τὸ ΑΕ. ΕΒ : ΓΕ. ΕΦ παντὸς δοθέντος λόγου μείζων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ΄.

§. 117. Πάντων τῶν παραλληλεπιπέδων, τῶν ἴσων δοθέντι κύβῳ, καὶ ὧν μία τῶν πλευρῶν δεδομένη ἐστὶν, εὑρεῖν τὸ ἔχον ἐλάσσονα ἐπιφάνειαν.

Ἔστω ὁ μὲν δοθεὶς κύβος $=\alpha^3$, ἡ δὲ δοθεῖσα τοῦ ζητουμένου παραλληλεπιπέδου πλευρὰ $=\beta$ καὶ ἡ μὲν ἑτέρα τῶν ἀγνώστων αὐτοῦ πλευρῶν $=\chi$, ἡ δὲ ἑτέρα $=y$.

Οὐκοῦν τὸ ζητούμενον παραλληλεπίπεδον $\beta\chi y=\alpha^3$. διὸ ἡ πλευρὰ $y=\frac{\alpha^3}{\beta\chi}$. καὶ ἡ μὲν τῶν τοῦ παραλληλεπιπέδου ἐπιφανειῶν $=\beta\chi$, ἡ δὲ ἡ $\frac{\alpha^3}{\chi}$, ἡ δὲ $\frac{\alpha^3}{\beta}$. τὸ τούτων ἄρα κεφάλαιον τὸ ἐν τῷ Α ἐστὶν, (πίν. ιθ.) οὗ τὸ ἀπειροστὸν τὸ ἐν τῷ Β, ὅπερ ταὐτὸν τῷ κατὰ τὸ Γ. κειμένου δὲ τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ κλάσματος ἴσου τῷ οὐδενὶ (§. 115.) ὡς ἐν τῷ Δ ὁρᾶται, προκύπτει τὸ χ ἴσον τοῖς κατὰ τὸ Ε. διὸ αἱ τρεῖς τοῦ ζητουμένου παραλληλεπιπέδου πλευραὶ αἱ ἐν τῷ Ζ εἰσὶν, ὧν δύω ἀλλήλαις ἴσαι.

Ἐὰν δὲ ὁ τοῦ κλάσματος ὀνομαστὴς ἴσον τῷ οὐδενὶ τεθῇ, ἔσεται τὸ $\chi=0$. ἐκ τούτου δὲ οὐ μόνον οὐδὲν προκύπτει, ἀλλὰ καὶ ἀναιρεῖται τὸ πρόβλημα.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 118. Ἐὰν μηδεμία τῶν τοῦ ζητουμένου παραλληλεπιπέδου πλευρῶν δεδομένη ᾖ, ὁ δοθεὶς κύβος ἔσται τὸ ζητούμενον παραλληλεπίπεδον. ἔστω γὰρ ἡ μὲν τῶν πλευρῶν χ, ἡ δὲ y, ἡ δὲ z. οὐκοῦν τὸ $\chi yz=\alpha^3$. διὰ τὸ

$\gamma z = \frac{\alpha^3}{\chi}$. ἡ ἄρα μία τῶν τȣ̃ παραλληλεπιπέδȣ ἐπιφανειῶν ἐςὶν ἡ $\frac{\alpha^3}{\chi}$; μία δὲ τῶν πλευρῶν αὐτȣ̃ ἡ $\frac{\alpha}{\gamma\chi}\sqrt{\alpha}$. (ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα ἐςὶ τῆς $\frac{\alpha^3}{\chi}$ ἐπιφανείας) διὸ ἡ ἑτέρα τῶν ἐπιφανειῶν ἐςὶν ἡ $\frac{\alpha\chi}{\gamma\chi}\sqrt{\alpha}$. αὐτῇ δὲ ἴση ἔςω καὶ ἡ λοιπὴ, εἴτȣν ἡ τρίτη. τὸ τȣ́των ἄρα κεφάλαιον ἐςὶ τὸ ἐν τῷ Η, ȣ̃ τὸ ἀπειροςὸν τὸ κατὰ τὸ Θ. τεθέντος δὲ τȣ̃ ἀριθμητȣ̃ ἴσȣ τῷ ἐν τῷ Ι, ἡ κατὰ τὸ Κ γίνεται ἐξίσωσις, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ Λ, ἐξ αὐτῆς δὲ ἡ κατὰ τὸ Μ. ἐξ ἧς δῆλον, ὅτι ὁ δοθεὶς κύβος ἐςὶ τὸ ζητȣ́μενον παραλληλεπίπεδον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε΄.

§. 119. Πάντων τῶν ἀπειροαρίθμων Κώνων τῶν εἰς τὴν δοθεῖσαν σφαῖραν ἐγγραφθησομένων εὑρεῖν τὸν ἔχοντα μεγίςην ἐπιφάνειαν.

Ἔςω ἡμικύκλιον τȣ̃ γεννήτορος τῆς δοθείσης σφαίρας κύκλȣ τὸ ΑΒΔ, (πίν. ΙΗ. σχ. 5.) καὶ ληφθείσης τῆς ΑΓ ὡς ἔτυχεν, ἤχθω πρὸς ὀρθὰς αὐτῇ ἀπὸ τȣ̃ Γ ἡ ΓΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ. ȣ̓κȣ̃ν ἐκ μὲν τȣ̃ ἡμικυκλίȣ ΑΒΔ περιενεχθέντος σφαῖρα, ἐκ δὲ τȣ̃ τριγώνȣ ΑΓΒ κῶνος εἰς αὐτὴν ἐγγεγραμμένος γίνεται. κείσθω δὴ ȣ̃ν τȣ̃τον εἶναι τὸν ζητȣ́μενον. καὶ ἔςω ἡ μὲν τῆς σφαίρας διάμετρος ΑΔ $=\alpha$, ἡ δὲ ΑΓ $=\chi$. Οὐκȣ̃ν ἡ μὲν ΔΓ $=\alpha-\chi$, ἡ ἡ δὲ ΓΒ $=\sqrt{\alpha\chi-\chi^2}$, ἡ δὲ ΑΒ $=\sqrt{\alpha\chi}$. διὸ τὸ ΑΒ. ΒΓ ἴσον τῇ κατὰ τὸ Ν ἐκθέσει, (πίν. ιθ.) ἧς τὸ ἀπειροςὸν τὸ κατὰ τὸ Ξ. τεθέντος δὲ τȣ̃ ἀριθμητȣ̃ ἴσȣ τοῖς κατὰ τὸ Ο (§. 115) ἡ κατὰ τὸ π ἐξίσωσις γίνεται, ἐξ αὐτῆς δὲ ἡ κατὰ τὸ Ρ, ἐξ ἧς δῆλον, ὅτι ἐὰν ληφθῇ ἡ ΑΓ $=\frac{2}{3}$ τῆς ΑΔ διαμέτρȣ, ἀχθῇ δὲ πρὸς ὀρθὰς ἀπὸ τȣ̃ Γ τῇ ΑΔ ἡ ΓΒ, κ̀ ἐπιζευχθῇ ἡ ΑΒ, ὁ ἐκ τȣ̃ ΑΓΒ τριγώνȣ γινόμενος κῶνος ἐςὶν ὁ ζητȣ́μενος.

ΚΕΦ. Θ'.

Περὶ τῶν τῆς δευτέρας κ̀ τρίτης τάξεως ἀπειροςῶν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'.

§. 120. Τὰς εὐθείας εὑρεῖν, τὰς τὰ ἀπειροςὰ τῆς δευτέρας καὶ τρίτης τάξεως ἐμφαινȣ́σας.

Ἐμφαινέτω ἡ ΑΚΓ γραμμὴ καμπύλης ὁποιασȣ̃ν ςοιχείον, (πίν. ΙΗ. χ. 6.) εἴτȣν ἀπειροςὸν τῆς πρώτης τάξεως. κ̀ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Α κ̀ Γ σημείων ἐφαπτόμεναι τῆς ΑΚΓ καμπύλης αἱ ΑΔ, ΓΔ, συμβάλλȣσαι ἀλλήλαις κατὰ τὸ Δ. ἐπιζευχθείσης δὲ τῆς ΑΓ ἤχθω πρὸς ὀρθὰς αὐτῇ ἡ ΔΒ. καὶ τῶν ΑΚ, ΓΚ ἐπιζευχθεισῶν, ἐκβεβλήσθω ἡ ΔΓ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Γ, διαςήματι δὲ τῷ ΓΒ ἡμικύκλιον γεγράφθω τὸ ΖΒΕ. λέγω δὴ, ὅτι ἡ μὲν ΒΔ ἀπειροςόν ἐςι τῆς δευτέρας τάξεως, ἡ δὲ ΔΖ τῆς τρίτης.

Ἐπὶ γὰρ ἡ ΑΚΓ ἀπειροςόν ἐςι τῆς πρώτης τάξεως, καὶ γωνία ἄρα ἡ ΑΓΔ ἀπειροςόν ἐςιν ἑκατέρα τῶν