ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Γ'.

§. 69. Αἱ παρ' ἡμῶν διὰ τῶν προλαβόντων προβλημάτων ἐκδοθεῖσαι μέθοδοι τοῦ ὁλοκληροῦν, οὐχ ἅπασαί εἰσιν αἱ ἄχρι τοῦ νῦν εὑρεθεῖσαι, ἀλλ' αἱ θεμελιώδεις καὶ γενικώτεραι· τὰς δὲ λοιπὰς ἐπιγνῶναι ῥᾴδιον τῷ ἐν τοῖς περὶ τούτων ἐκδεδομένοις βιβλίοις (η) τῷ νοῦν ἐπιστήσαντι.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Δ'.

§. 70. Πολλὰς τῶν προκειμένων ἐκθέσεων ταῖς διαληφθείσαις μεθόδοις ὁλοκληρῶσαι ἀμήχανον, διὰ τὸ ἀπειροστὰ διάφορα περιέχειν, ἀλλήλοις τε καὶ τοῖς μεταβλητοῖς τῶν γραμμάτων συμμεμιγμένα. διὸ μέθοδοί τινες εὕρηνται τοῦ τὰ συμμεμιγμένα ἀπειροστὰ πρῶτον διαζευγνύειν, εἶθ' οὕτως ὁλοκληροῦν. τούτων τινὲς μὲν εἰδικαί εἰσι τῇ ἀγχινοίᾳ καὶ ἐμπειρίᾳ τοῦ ἀναλύοντος ἐπινοούμεναι, ὀλίγαι δέ τινες γενικαὶ καὶ κανόσιν ὑποκείμεναι. περὶ αὐτῶν οὖν νῦν ζητέον.

ΚΕΦ. Δ'.

Περὶ τῶν Μεθόδων τοῦ τὰ συμμεμιγμένα ἀπειροστὰ τῶν δοθεισῶν ἐκθέσεων διαζευγνύειν, καὶ μετὰ τὴν διάζευξιν ὁλοκληροῦν.

ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΙΔΙΚΑΙ.

§. 71. Α'. Τὸ ἐκ τοῦ ἑτέρου εἰς τὸ ἕτερον μέρος μετατιθέναι τινὰς τῶν ἐν τῇ ἐξισώσει ἐκθέσεων. οἷον, ἐν τῇ κατὰ τὸ δ ἐξισώσει τὸ $\chi\delta y$. ἐκ τούτου γὰρ ἡ κα-

(η) Τῷ τοῦ Βερνουλλίου περὶ τοῦ τῆς ὁλοκληρώσεως ἀναλογισμοῦ ποιήμ. τῷ 2. τόμ. τῶν Ἀναλυτικῶν τῷ ὑπὸ Μαρίας Γαηττάνης Ἀγνέζης ἐκδοθέντι, τῷ παρὰ Ἰακώβου Ῥικάτου καὶ Βικεντίου τοῦ υἱοῦ αὐτοῦ Ἀλγεβραϊκῷ Συντάγματι.

κατὰ τὸ ε ἐξίσωσις γίνεται, ἧς τὰ ὁλόκληρα (§. 35, 47.) τὰ ἐν τῷ ζ.

§. 72. Β΄. Τὸ διελεῖν τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν διά τινος τῶν ἐν αὐτῇ μεταβλητῶν. οἷον τὴν κατὰ τὸ η διὰ τῦ y^2. ἐκ τέτε γὰρ ἡ κατὰ τὸ θ πορίζεται ἐξίσωσις, ἧς τὰ ὁλόκληρα (§. 34, 47.) τὰ ἐν τῷ ι.

§. 73. Γ΄. Τὸ πολλαπλασιάσαι τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν διά τινος τῶν ἐν αὐτῇ μεταβλητῶν. οἷον τὴν κατὰ τὸ κ διὰ τῦ $y^{\frac{1-1}{\mu}}$. ὅτω γὰρ ἡ κατὰ λ προκύπτει, ἧς ὁλόκληρα (§. 34, 47.) τὰ κατὰ τὸ μ.

§. 74. Δ΄. Τὸ μετὰ τὴν μετάθεσιν, (§. 71.) ἢ τὴν διά τινος τῶν ἐν τῇ ἐξισώσει μεταβλητῶν διαίρεσιν (§. 72.) ἐξαγαγεῖν τὴν ῥίζαν. οἷον, ἐν τῇ κατὰ τὸ Α ἐξισώσει (πίν. ιγ.) μετὰ τὴν μετάθεσιν τῦ $-\chi^2 y^2 d\chi^2$ καὶ τὴν διὰ τῦ χ^2 διαίρεσιν, τῆς κατὰ τὸ Β προκυπτέσης ἐξισώσεως ἐξαχθείσης τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης, ἡ κατὰ τὸ Γ ἐξίσωσις γίνεται, ἧς τὰ ὁλόκληρά εἰσι τὰ ἐν τῷ Δ. (§. 46, 47.)

§. 75. Ε΄. Τὸ μετὰ τὸ πολλαπλασιασθῆναι τὴν ἐξίσωσιν διά τινος τῶν ἐν αὐτῇ μεταβλητῶν, ἐξαγαγεῖν τὴν ῥίζαν. οἷον μετὰ τὸ πολλαπλασιάσαι τὴν κατὰ τὸ Ε ἐξίσωσιν διὰ τῦ χ, καὶ τὴν κατὰ τὸ Ζ προκύψαι, ἐξαχθείσης τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἡ κατὰ τὸ Η γίνεται, ἧς ὁλόκληρα τα κατὰ τὸ Θ.

§. 76. ς΄. Τὸ τὰ μεταβλητὰ ἑτέρῳ μεταβλητῷ ἴσα τιθέναι, καὶ ὅτω τὴν δοθεῖσαν ἔκθεσιν εἰς ἑτέραν μεταβάλλειν. οἷον τῶν ἐν τῇ κατὰ τὸ Ι ἐκθέσει $\chi+y$ ἴσων τεθέντων τῷ κατὰ τὸ Κ, ληφθέντων τῶν ἀμφοτέρων, ἡ κατὰ τὸ Λ ἐξίσωσις γίνεται. ἐξ ὧν δῆλον, ὅτι ἡ κατὰ τὸ Ι ἔκθεσις ἴση τοῖς κατὰ τὸ Μ. ὧν τὰ ὁλόκληρα τὰ κατὰ τὸ Ν.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 77. Ὁμοίαις μεθόδοις τὰ ἀπειροςὰ πολλῶν ἄλλων ἐκθέσεων διαζεύγνυται, καὶ τὸ ὁλόκληρον αὐτῶν εὑρίσκεται.

ΜΕΘΟΔΟΙ ΓΕΝΙΚΑΙ.

§. 78. Α΄. Πάσης ἀπειροςῆς ἐκθέσεως, ἐν ᾗ τῶν μὲν μεταβλητῶν ἐκθέτης ὁ αὐτὸς, τῶν δὲ ἀπειροςῶν τὴν μονάδα ἐχ ὑπερβαίνει, τὰ ἀπειροςὰ διαζευχθήσεται, ἐὰν τὸ γινόμενον ἐκ τῦ ἑτέρυ τῶν μεταβλητῶν καὶ γνωςῦ τινὸς ἴσον τεθῇ τῷ γινομένῳ ἐκ τῦ ἑτέρυ τῶν μεταβλητῶν καὶ ἄλλυ τυχόντος μεταβλητῦ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 79. Οἷον, δοθείσης τῆς κατὰ τὸ Ξ ἐξισώσεως, κείσθω τὸ ay ἴσον τοῖς κατὰ τὸ Ο. ἐκῦν τὰ μὲν τῆς κατὰ τὸ ο ἐξίσωσεως τετράγωνα εἰσὶ τὰ κατα τὸ π, τὰ δὲ ἀπειροςὰ τὰ κατὰ τὸ Ρ. ἐν τῇ κατὰ τὸ Ξ ἐν ἐξισώσει τεθέντων ἀντὶ τῦ y^2 καὶ dy τῶν ἴσων αὐτοῖς, τῶν ἐκ τῆς κατὰ τὸ Ο καὶ Π πορίζομένων, προκύψει ἡ κατὰ τὸ Σ ἐξίσωσις, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ Τ γίνεται· ἐξ αὐτῆς δὲ ἡ κατὰ τὸ Υ, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ Φ, ἧς τὰ ὁλόκληρα τὰ ἐν τῷ Χ· τεθέντος δὲ ἀντὶ τῦ Ζ τῦ ἴσυ αὐτῷ, ἡ κατὰ τὸ Ψ, ἢ ἡ κατὰ τὸ Ω.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 80. Εὰν δὲ ὁ ἐκθέτης τῶν ἀπειροςῶν τῆς δοθείσης ἐξισώσεως τὴν μονάδα ὑπερέχῃ, ὡς τῶν τῆς κατὰ τὸ α, τεθέντος πάλιν τῦ ay ἴσυ τοῖς κατὰ τὸ Ο, ἡ κατὰ τὸ β προκύψει ἐξίσωσις, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ γ γινεται. κειμένυ δὲ τῦ $\underline{xdz}$ ἴσυ ἑτέρῳ ἀπειϱοςῷ, τῷ κατὰ τὸ δ. ἡ κατὰ τὸ ε πορίζεται ἐξίσωσις διὰ τὴν κατὰ τὸ Υ. ἐκ τῆς κατὰ τὸ ε δὲ ἡ κατὰ τὸ ζ· ἐξ αὐτῆς δὲ καὶ τῆς κατὰ γ. καὶ ι, ἡ κατὰ τὸ η, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ θ. τεθέντος δὲ τῷ δτ ἴσῳ τοῖς κατὰ τὸ ι, ἕπεται τὸ $δτ^2$ ἴσον τοῖς κατὰ τὸ κ. τεθέντων ὧν ἐν τῇ κατὰ τὸ θ ἐξισώσει ἀντὶ τῦ δτ καὶ τῦ $δτ^2$ τῶν ἴσων αὐτοῖς, ἡ κατὰ τὸ λ συνίςαται ἐξίσωσις, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ μ γίνεται. ἐξ αὐτῆς δὲ καὶ τῆς κατὰ τὸ ο ἡ κατὰ τὸ ν, ἥτις τὰ ὁλόκληρα ἔςι τῆς κατὰ τὸ α. ἐὰν γὰρ ἀντὶ τῦ σ καὶ $σ^2$ τὰ ἴσα αὐτοῖς τεθῇ, τὰ ἐκ τῆς κατὰ τὸ ι ἐξισώσεως ποριζόμενα, (πίν. ιδ.) ἡ κατὰ τὸ Α ἀναφύει ἐξίσωσις, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ Β, ἐν ᾗ τεθένθων ἀντὶ τῦ δζ καὶ $δζ^2$ τῶν ἴσων αὐτοῖς, τῶν ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ Ο (πίν. ιγ.) ἐξισώσεως προκυπτόντων, ἡ κατὰ τὸ Γ (πίν. ιδ) ἐξίσωσις γίνεται, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ Δ, (πίν. ιγ.) ἡ αὐτὴ ὖσα τῇ κατὰ τὸ α δοθείσῃ.

§. 81. Β΄. Πάσης ἀπειροςῆς ἐκθέσεως, ἐν ᾗ τὰ μὲν μεταβλητὰ ἐκθέτας ἔχει τὴν μονάδα μὴ ὑπερβαίνοντας, τὰ δὲ ἀπειροςὰ τὲς ὁποιεσῦν, διαζευχθήσονται τὰ ἀπειροςὰ, ἐὰν τὸ ἕτερον τῶν μεταβλητῶν ἴσον τεθῇ τῷ ὁλοκλήρῳ τῦ γινομένυ ἐκ τῦ ἀπειροςῦ τῦ ἑτέρυ μεταβλητῦ, καὶ ἄλλυ τυχόντος μεταβλητῦ ςοιχείυ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 82. Οἷον, δοθείσης τῆς κατὰ τὸ Ε (πίν. ιδ.) ἐξισώσεως, κείσθω τὸ χ ἴσον τοῖς κατὰ τὸ Ζ. ἐκ τότε δὲ ἡ κατὰ τὸ Η ἐξίσωσις γίνεται, ἐξ ἧς ἥτε κατὰ τὸ Θ καὶ ἡ κατὰ τὸ Ι. ἐξ αὐτῶν δὲ, διὰ τὰς κατὰ τὸ Ε καὶ Ζ, ἡ κατὰ τὸ Κ, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ Λ, καὶ τῶν ἀπειροςῶν ληφθέντων, ἡ κατὰ τὸ Μ; ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ Ν, ἐξ αὐτῆς δὲ ἡ κατὰ τὸ Ξ, ἧς τὰ ὁλοκληρα ταῖς εἰρημέναις (46, 57.) εὑρεθήσεται. μεθόδοις.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 83. Εἰσὶ δὲ καὶ ἄλλαι μέθοδοι τῦ τὰ ἀπειροςὰ διαζευγνύειν ὑπὸ διαφόρων ἐκδοθεῖσαι συγγραφέων. (θ)

ΚΕΦ. Ε'.

Περὶ τῆς εὑρέσεως τῶν ἐκθέσεων, τῶν ἐμφαινυσῶν τὴν Ὑφαπτομένην καὶ Ἐφαπτομένην, τὴν Ὑποκάθετον ϗ Κάθετον, ϗ τὰ ςοιχεῖα πάσης καμπύλης, τῶν πρὸς τὸ τετραγωνίζειν καὶ κυβίζειν συντεινυσῶν.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 84. Τὸ μὲν τετραγωνίζειν, τὸ εὐθύγραμμον εὑρίσκειν ἴσον τῷ δοθέντι χωρίῳ σημαίνει· τὸ δὲ κυβίζειν, ἀπείρισμα ἴσον τῷ δοθέντι ςερεῷ· τὸ δὲ ςοιχεῖον, ἀπειροςόν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'.

§. 85. Τὰς ἐκθέσεις εὑρεῖν, τὰς τὴν Ὑφαπτομένην ϗ ἐφαπτομένην, τὴν Ὑποκάθετον ϗ Κάθετον ϗ τὸ ςοιχεῖον ἐμφαινέσης τῆς ὁποιασῦν καμπύλης, οἷον τῆς ΓΖΨ, ἧς ἄξων ἡ ΒΡ. (πίν. ϛ. χ. 4.)

Τετάχθωσαν ἔγγιςα ἀλλήλων αἱ ΖΔ, ΨΕ. καὶ ἤχθω ἀπὸ τῦ Ζ ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης ἡ ΒΖΤ ϗ ἐκβεβλήσθω μὲν ἡ ΕΨ κατὰ τὸ συνεχὲς, ἤχθω δὲ ἀπὸ τῦ Ζ ἡ μὲν ΖΦ τῇ ΑΡ παράλληλος, ἡ δὲ ΖΠ τῇ ΒΤ κάθετος. ἔςω δὲ ἡ μὲν ΓΔ $=\chi$, ἡ δὲ ΔΖ $=y$. ἐκεῖ ἡ μὲν ΔΕ $=\delta\chi$, ἡ δὲ ΦΨ $=\delta y$. ἀπειροςὸν γὰρ

(θ) Ὅρα τὸν 2. Τόμ. τῆς προαγημ. (§. 69.) Ἀγνέζι καὶ τὸν 3. τῶν Ἀλγεβραϊκῶν Βικεντίυ τῦ Ῥικάτυ.

ἡ μὲν ΔΕ τῆς ΙΔ, ἡ δὲ ΦΨ τῆς ΔΖ διὰ τὴν τῶν ΖΔ, ΨΕ μεγίστην ἐγγύτητα. λέγω δὴ ὖν, ὅτι τὴν μὲν Ὑφαπτομένην ΕΔ ἐμφαίνει ἡ κατὰ τὸ Ο ἔκθεσις, (πίν. ιδ.) τὴν δὲ Ὑφαπτομένην ΒΖ ἡ κατὰ τὸ Π, τὴν δὲ Ὑποκάθετον ΗΔ. ἡ κατὰ τὸ Ρ, τὴν δὲ Κάθετον ΖΗ ἡ κατὰ τὸ Σ, τὸ δὲ τῆς καμπύλης Στοιχεῖον ΖΨ, ἤτοι τὸ ἀπειροτὸν τῆς ΙΖ, ἡ κατὰ τὸ Τ.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΤΖΨ γωνία, ἡ ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῆς καμπύλης περιεχομένη πάσης δοθείσης εὐθυγράμμου γωνίας ἐλάσσων ἐστὶν, ἑκατέρας ἄρα τῶν ΖΨΤ, ΖΤΨ ἀπειροτὸν ἐστὶ. καὶ ἡ ΤΨ ἄρα ἀπειροτὸν ἐστι ταῖς ΖΤ, ΖΨ παραβαλλομένη. αἱ μὲν γὰρ γωνίαι τοῖς ἡμιτόνοις αὐτῶν ἀνάλογον, τὰ δὲ ἡμίτονα ταῖς τὰς γωνίας ὑποτεινούσαις πλευραῖς, (1) ἐπεὶ δὲ αἱ ΤΨ, ΖΨ τῆς πρώτης τάξεως ἀπειροστά εἰσι διὰ τὴν τῶν σημείων Ζ, Ψ ἐγγύτητα, ἡ ἄρα ΤΨ ἀπειροτὸν ἐστι τῆς δευτέρας τάξεως. (§. 9.) ἔτι δὲ ἡ ΦΨ ἀπειροτὸν τῆς πρώτης τάξεως, διὸ ἡ ΤΦ διαφέρει τῆς ΦΨ κατὰ τὸ τῆς δευτέρας τάξεως ἀπειροτὸν ΤΨ. οὐκοῦν ἐξὸν τὴν ΤΦ ὡς ἴσην ἐκλαμβάνειν (§. 21.) τῇ ΦΨ.

Ἐπεὶ δὲ ὡς ΤΦ : ΦΖ : : ΖΔ : ΒΔ, (διὰ τὴν τῶν τριγώνων ΤΦΖ, ΖΔΒ ὁμοιότητα) ἔσται δὴ ἄρα καὶ ὡς ΨΦ : ΦΖ : : ΖΔ : ΒΔ, ἤτοι ὡς $\delta y : \delta \chi : : y :$ ΒΔ. ἐξ οὗ δῆλον, ὅτι ἡ ΒΔ ἴση τοῖς κατὰ τὸ Ο.

Ἔτι δὲ καὶ τὸ $\overline{\text{ΒΖ}}^2 = \overline{\text{ΖΔ}}^2 + \overline{\text{ΒΔ}}^2$, ἤτοι τὸ $\overline{\text{ΒΖ}}^2 = y^2 + \frac{y^2 \delta \chi^2}{\delta y^2}$, διὸ ἡ ΒΖ ἴση τοῖς κατὰ τὸ Π.

Καὶ

(1) Ὅρα Θεώρ. δ. τῶ α. τῆς Τριγων. βιβ. τὸ ἐν σελ. 64 τῶ β. τόμ.

Καὶ ἐπεὶ ὡς ΖΦ : ΦΓ :: ΖΔ : ΔΠ, (διὰ τὴν τῶν ΓΦΖ, ΖΔΠ τριγώνων ὁμοιότητα) ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ΖΦ : ΦΨ :: ΖΔ : ΔΠ, ἤτοι ὡς $\delta\chi : \delta y :: y : ΔΠ$. ἡ ἄρα ΠΛ ἴση τοῖς κατὰ τὸ Ρ.

Ἔστι δὲ $ΖΠ^2 = ΖΛ^2 + ΠΛ^2$. διὸ ἡ ΖΠ ἴση τοῖς κατὰ τὸ Σ.

Ἐπεὶ δὲ τὸ $ΖΓ^2 = Ζφ^2 + Γφ^2 = Ζφ^2 + φΨ^2$, ὄντι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς χορδῆς ΖΨ, ἤτοι τὸ $ΖΨ^2 = Ζφ^2 + φΨ^2$, τὸ ἄρα $ΖΓ^2 = ΖΨ^2$. διὸ καὶ ἡ ΖΓ = ΖΨ, καὶ τὸ μεταξὺ ἄρα τῆς ΖΓ καὶ ΖΨ χορδῆς ἀπειροστὸν τῆς καμπύλης ΖΨ ἴσον ἑκατέρᾳ τῶν ΖΓ, ΖΨ. διὸ καὶ τὸ ἐκ τοῦ ἀπειροστοῦ τῆς καμπύλης, ἤτοι τὸ $ΖΨ^2 = Ζφ^2 + φΨ^2$, ἐξ οὗ δῆλον, ὅτι τὸ ΖΨ ἴσον τοῖς κατὰ τὸ Τ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 86. Ἐπειδὴ ἡ ΒΓ = ΒΔ − ΓΔ, ἴση ἄρα ἡ ΒΓ τοῖς κατὰ τὸ Υ. ἐὰν οὖν ἀπὸ τοῦ Γ ἀχθῇ ἡ ΓΟ τῇ ΔΖ παράλληλος, ἔσται, ὡς ΒΔ : ΔΖ :: ΒΓ : ΓΟ. διὸ ἡ ΓΟ ἴση τοῖς κατὰ τὸ Φ. δῆλον δέ, ὅτι δοθεισῶν τῶν ΒΓ, ΓΟ εὐθειῶν, καὶ ἡ ἐφαπτομένη δοθήσεται. ἥτις ἐστὶν ἡ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ Ο ἐπιζευχθεῖσα, καὶ ἐκβληθεῖσα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'.

§. 87. Τὴν ἔκθεσιν εὑρεῖν τὴν ἀπειροστὸν χωρίον ἐμφαίνουσαν, ὑπὸ ὁποιασοῦν καμπύλης καὶ τῶν αὐτῆς τεταγμένων καὶ τοῦ ἄξονος περιεχόμενον.

Τὴν τεταγμένην ΖΔ διὰ τοῦ ἀπειροστοῦ τῆς ἀποτετμημένης ΔΕ πολλαπλασίασον, οὕτω γὰρ προκύψει ἡ ζητουμένη ἔκθεσις, ἥτις ἐστὶν [illegible] τὸ Χ.

Τοῦ ΙΖΔ χωρίου ἀπειροστὸν ἐστὶ τὸ μικτόγραμμον ΔΖΨΕ, ὅπερ τοῦ ὀρθογωνίου ΔΦ διαφέρει τῷ μικτογράμμῳ τριγωνιδίῳ ΖΦΨ. ἐπεὶ δὲ τοῦτο ἀπειροστόν ἐστι, (ἑκατέρα γὰρ τῶν ΖΦ, ΦΨ ἀπειροστὸν τῆς πρώτης

τά.

πάξεως) τὸ ΔΖΨΕ ἐξὸν ἴσον τῷ ΔΦ ἐκλαμβάνειν. (§. 21.) ὅθεν δῆλον ὅτι τὸ ΔΦ, τὸ ἴσον τοῖς κατὰ τὸ χ τὸ ζητούμενον ἀπειροστὸν χωρίον ἐμφαίνει.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Τὴν ἔκθεσιν δὲ, τὴν ἐμφαίνουσαν τὸ στοιχεῖον τοῦ χωρίου ΖΓΠ, τοῦ ὑπὸ τῆς καμπύλης ΓΖ, καὶ τῆς ἀποτετμημένης ΒΠ, καὶ τῆς καθέτου ΖΠ περιεχομένου, εὑρήσεις οὕτως.

Ἤχθω ἀπὸ τοῦ Ψ ἑτέρα τις ἐφαπτομένη ἡ ΨΛ, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτῇ ἡ ΨΥ, τῇ ΖΠ ἐκβληθείσῃ συμβάλλουσα κατὰ τὸ Υ. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Υ, διαστήματι δὲ τῷ ΥΠ τόξον κύκλου γεγράφθω τὸ ΠΣ. καὶ ἔστω δὴ ἡ μὲν $ΓΠ = r$, ἡ δὲ $ΖΠ = π$. οὐκοῦν ἡ $ΡΠ = δr$. διὰ γὰρ τὸ ἔγγιστα ἀλλήλων εἶναι τὰ Ζ, Ψ σημεῖα, ἔγγιστά εἰσι καὶ τὰ Π, Ρ. διὸ ἡ ΠΡ ἀπειροστὸν ἐστι τῆς ΓΠ. ἐπεὶ δὲ ὡς $ΖΠ : ΖΛ :: ΡΠ : ΠΣ$, (ὡς εὐθείας λαμβανομένου τοῦ ΠΣ τόξου, ὅμοιά εἰσι τὰ ΖΠΔ, ΣΠΡ τρίγωνα) ἤτοι ὡς $π : y :: δr : ΠΣ$, τὸ ἄρα $ΠΣ = \frac{yδr}{π}$. ἔστι δὲ τὸ ἀπειροστὸν τοῦ ΖΓΠ χωρίου τὸ ΖΠΡΨ μικτόγραμμον, ὅπερ ἴσον ἐστὶ τῇ τε ὑπεροχῇ τῶν τομέων ΥΖΨ, ΥΠΣ, καὶ τῷ τριγωνιδίῳ ΠΣΡ, οὕτινος τούτου ἀμεληθέντος, ὡς ἀπειροστοῦ, μόνῃ τῇ τῶν εἰρημένων τομέων ὑπεροχῇ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ΖΠΣΨ χωρίῳ. ἔστι δὲ τοῦτο ἴσον τῷ $\frac{ΖΠ.\,ΖΨ + ΖΠ.\,ΠΣ}{2}$. οὐκοῦν ἡ κατὰ τὸ Ψ ἔκθεσις τὸ στοιχεῖον ἐμφαίνει τοῦ ΖΓΠ χωρίου. ὡσαύτως τὸ στοιχεῖον τοῦ ΓΒΖ χωρίου, τοῦ ἐκτὸς τῆς καμπύλης ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης ἀπολαμβανομένου ἐστὶν ὁ ΛΒΜ τομεύς. τὰ γὰρ μικτόγραμμα τρίγωνα ΑΜΒ, ΔΖΨ ὡς ἀπειροστὰ παραβλέπονται.

ΠΡΟ-

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ΄.

§ 88. Τὴν ἔκθεσιν εὑρεῖν, τὴν τὸ στοιχεῖον ἐμφαίνουσαν τοῦ στερεοῦ, τοῦ ὑπὸ ὁποιασοῦν καμπύλης περιενεχθείσης γινομένου.

Ἔστω καμπύλη ὁποιαοῦν ἡ ΑΔ. ἧς Ἄξων ἡ ΑΓ, (πίν. ϛ΄. σχ. 5.) τεταγμέναι δὲ ἔγγιστα ἀλλήλων αἱ ΒΕ, ΓΔ. ἐκβληθείσης δὲ τῆς ΒΕ, ἤχθω ἀπὸ τοῦ Δ τῇ ΑΓ παράλληλος ἡ ΔΦ. καὶ ἔστω ἡ μὲν ΑΒ $= x$, ἡ δὲ ΒΕ $= y$. περιενεχθείσης δὲ τῆς ΑΔ περὶ τὸν ΑΓ ἄξονα γενέσθω ὑπ' αὐτῆς στερεόν. Ἔσται δὴ οὖν τοῦ ὑπὸ τοῦ ΑΕΒ χωρίου γινομένου στερεοῦ ἀπειροστὸν, τὸ ὑπὸ τοῦ ΕΔΓΒ γινόμενον στερεόν· ἐπεὶ δὲ τὸ ΦΔΓΒ ὀρθογώνιον ὑπερέχει τὸ ΕΔΓΒ χωρίον κατὰ τὸ ἀλογητέον τρίγωνον ΦΔΕ. ὁ κύλινδρος ἄρα ὁ ὑπὸ τοῦ ΦΔΓΒ ὀρθογωνίου ἀλογητίᾳ ὑπεροχῇ ὑπερέχει τὸ ὑπὸ τοῦ ΕΔΓΒ χωρίου γινόμενον στερεόν· διὸ ὡς ἴσος αὐτῷ ἐκλαμβάνεται. (§. 21) τὸ ἄρα ζητούμενον στοιχεῖον ὁ κύλινδρός ἐστιν, ὁ ὑπὸ τοῦ ΦΔΓΒ ὀρθογωνίου γινόμενος. κειμένου οὖν τὴν ΔΓ ἡμιδιάμετρον λόγον ἔχειν πρὸς τὴν περιφέρειαν τοῦ ὑπ' αὐτῆς γινομένου κύκλου, ὃν τὸ $\eta : \pi$, ἡ ῥηθεῖσα περιφέρεια ἐμφαίνεται ὑπὸ τοῦ $\frac{\pi y}{\eta}$, (κ) ὁ δὲ ὑπ' αὐτῆς περιεχόμενος κύκλος ὑπὸ τοῦ $\frac{\pi y^2}{2\eta}$. διὸ ὁ ὑπὸ τοῦ ΦΔΓΒ γινόμενος κύλινδρος, ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ Ω ἐκθέσεως σημαίνεται, (λ) (πίν. ιδ.) ἥτις ἐστὶν ἡ ζητουμένη.

. Π ΣΗ-

(κ) Ὅρα τὴν μετὰ τὴν β΄. πρότ. τοῦ ιβ΄. βιβλ. τῆς Γεωμετρ. Συνίσ. τὴν ἐν σελ. 240. τοῦ α΄. τόμ. καὶ τὸ β πόρισμ. τοῦ ἐν τοῖς τοῦ Ἀρχιμ. Θεωρήμ. τὸ ἐν σελ. 14. τοῦ β΄ τόμ.

(λ) Ὅρα τὸ πόρισμα τὸ μετὰ τὸ δ΄. Λῆμ. τῶν ἐν τῷ ιβ΄. βιβλ. τῆς Γεωμετρ. τὸ ἐν σελ. 450.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α΄.

§. 89. Αἱ ἄρτι εὑρεθεῖσαι ἐκθέσεις ταῖς καμπύλαις ἀνήκουσι, ταῖς διὰ τοῦ ἄξονος γεγραμμέναις. (μ) εὑρετέον δὲ τὰς αὐτὰς ὑπὲρ τῶν διὰ τῆς ἑστίας (ν) γεγραμμένων.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Β΄.

§. 90. Πᾶσαν διὰ τῆς ἑστίας γεγραμμένην καμπύλιν ἡ κατὰ τὸ α ἐξίσωσις ἐμφαίνει. ἔστωσαν γὰρ αἱ διὰ τῆς ἑστίας (πίν. ς. χ. 6.) Α γεγραμμένης καμπύλης ΒΔ τεταγμέναι ἔγγιστα ἀλλήλων αἱ ΑΒ, ΑΔ. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Α, διαστήματι δὲ τῷ ΑΒ γεγράφθω τόξον κύκλου τὸ ΒΓ. καὶ ἔστω ἡ μὲν ΑΒ = π, τὸ δὲ ΒΓ = δκ, ἐχέτω δὲ ΑΒ : ΒΓ λόγον ὃν 1 : δz. ἐκεῖν ἐστὶν ὡς π : δκ :: 1 : δz. ἐκ τῆς ἀναλογίας δὲ ταύτης ἡ κατὰ τὸ (πίν. ιδ.) α ἐξίσωσις γίνεται.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ΄.

§. 91. Τὰς ἐκθέσεις εὑρεῖν, τὰς ἐμφαινούσας τὰς προειρημένας εὐθείας, (§. 85, 87, 88.) καὶ τὰ στοιχεῖα πάσης καμπύλης διὰ τῆς ἑστίας γραφείσης.

Ἐφαπτέσθω τῆς διὰ τῆς ἑστίας (πίν. ς. χ. 6.) Α γραφείσης καμπύλης ΒΔ ἡ ΦΒ κατὰ τὸ Β, ἥτις ἐκβληθεῖσα συμβαλλέτω τῇ τεταγμένῃ ΑΔ τῇ ἐγγυτάτῃ τῆς ΑΒ=Ζ κατὰ τὸ Μ. ἤχθω δὲ ἀπὸ τοῦ Β ἡ μὲν ΒΝ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΑΜ, ἡ δὲ ΒΚ τῇ ἐφαπτομένῃ ΦΜ· ἀπὸ δὲ τοῦ Α ἡ μὲν ΑΚ τῇ αὐτῇ ἐφαπτομένῃ ΦΜ, ἡ δὲ ΑΦ τῇ ΒΚ. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Α, διαστήματι δὲ τῷ ΑΒ γεγράφθω τόξον τὸ ΒΓ. ἐκεῖν ἡ ΤΔ= δz

---

(μ) Κατὰ τὴν γ΄. Ἔκθ. τῆς β΄. προτ. τοῦ α΄. τμήμ. τῶν Κων. Τομ. τὴν ἐν σελ. 93. τοῦ β΄. τομ.

(ν) Κατὰ τὴν δ΄. Ἔκθ. τῆς ε΄. προτ. τοῦ αὐτ. τμήμ. τὴν ἐν σελ. 109. τοῦ β΄. τόμ.

ἐκ διὰ τὸ ἀπειροςὸν τῆς καμπύλης, εἴτυν ἡ ΒΔ (ὡς εὐθεῖα γὰρ ἡ ΒΔ λογίζεται) ἴση τοῖς κατὰ τὸ β. κ͵ ἐπεὶ ἐς ΒΜ : ΒΝ :: ΜΑ : ΑΦ, (πίν. ιδ.) εἰσὶ δὲ αἱ ΜΔ, ΓΝ ἑκατεςὰ τῇ ΓΔ παραβαλλόμεναι, (ὅρα §. 85.) καὶ τὸ μὲν ΒΔ τόξον τῇ ΒΜ, τὸ δὲ ΒΓ τῇ ΒΝ μικρᾶ ὂν ταυτίζεται, ἡ δὲ ΜΑ ὡς ἴση τῇ ΑΒ ἐκλαμβάνεται, (§. 21.) ἔςαι δὴ ὂν ἄρα καὶ ὡς ΒΔ : ΒΓ :: ΑΒ : ΑΦ, ἤτοι ὡς $\sqrt{\delta\kappa^2 + \delta\iota^2} : \delta\kappa :: Z :$ ΦΑ. διὸ ἡ ΦΑ ἴση τοῖς κατὰ τὸ γ.

Ἐπεὶ δὲ καὶ ὡς ΒΜ : ΜΝ :: ΑΜ : ΜΦ, ἐςὶ καὶ ὡς ΒΔ : ΓΔ :: ΑΒ : ΒΦ, ἤτοι ὡς $\sqrt{\delta\kappa^2 + \delta\iota^2} : \delta\iota :$ Ζ : ΒΦ. διὸ ἡ ΒΦ ἴση τοῖς κατὰ τὸ δ.

Ἐςι δὲ κ͵ ὁ ΑΒΓ τομεὺς, τῦ ΒΓ ὡς εὐθείας ἐκλαμβανομένε, ἴσος τῷ $\frac{1}{2}$ ΑΒ. ΒΓ, εἴτυν τοῖς κατὰ τὸ Σ.

Οὐκῦν ἡ μὲν κατὰ τὸ β ἔκθεσις τὸ τῆς καμπύλης ςοιχεῖον ἐμφαίνει, ἡ δὲ κατὰ τὸ γ τὴν Ὑφαπτομένην, καὶ τὴν Κάθετον· ἡ γὰρ ΑΦ = ΒΚ· ἡ δὲ κατὰ τὸ δ τὴν Ἐφαπτομένην καὶ τὴν Ὑποκάθετον· ἡ γὰρ ΒΦ = ΑΚ· ἡ δὲ κατὰ τὸ ε τὸ τῦ χωρίυ ςοιχεῖον. Παντὸς γὰρ χωρίυ ὑπὸ δύω τεταγμένων κ͵ τῆς καμπύλης περιεχομένυ, οἷον τῦ ΑΒΕ, ἀπειροςόν ἐςι τὸ μικτόγραμμον τρίγωνον ΑΒΔ, ὅπερ τὸν ΑΒΓ τομέα ὑπερέχον κατὰ μόνον τὸ ΒΓΔ τρίγωνον, ὡς ἴσον αὐτῷ ἐκλαμβάνεται.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 92. Τοιγαρῦν ἀχθήσεται ἀπὸ τῦ δοθέντος σημείυ Β τῆς καμπύλης ἐφαπτομένη, ἐὰν κέντρῳ μὲν τῇ ἑςίᾳ Α, διαςήματι δὲ τῷ ΑΒ κύκλος γραφῇ, ἀπὸ δὲ τῦ Β τῇ δοθείσῃ ΑΦ πρὸς ὀρθὰς ἀχθῇ εὐθεῖα, οἷον ἡ ΒΦ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 93. Τὴν ἔκθεσιν τὴν τὸ ςερεὸν ἐμφαίνεσαν, τὸ ἀπὸ τῆς περιαγωγῆς τῆς τοιᾶς δε καμπύλης γινόμενον, εὑρεῖν ἀμήχανον, ἐὰν μὴ ὁ ἄξων ὁριςθῇ, περὶ ὃν αὐτὴ περιενεχθεῖσα, τὸ ςερεὸν ποιεῖ. Διὸ μεταβλητέον τὴν ἐξίσωσιν εἰς ἑτέραν, τὴν αὐτὴν καμπύλην δηλᾶσαν, διὰ τᾶ Ἄξονος γεγραμμένην, εἶθ᾽ ὅτω χρηςέον τῇ προευρεθείσῃ (§. 88.) ἐκθέσει, τῇ τὸ ςοιχεῖον τᾶ ςερεᾶ, τᾶ ὑπὸ πάσης καμπύλης γινομένα, ἐμφαινέσῃ.

ΚΕΦ. ϛ'.

Περὶ τῆς μεθόδα τᾶ μεταβάλλειν τὴν ἐξίσωσιν, τὴν δηλᾶσαν καμπύλην διὰ τῆς ἑςίας γεγραμμένην εἰς ἑτέραν, τὴν αὐτὴν σημαίνεσαν καμπύλην διὰ τᾶ Ἄξονος γραφεῖσαν· καὶ τῆς ἀνάπαλιν, ἀμέλειτοι τᾶ τὴν δηλᾶσαν καμπύλην διὰ τᾶ Ἄξονος γεγραμμένην εἰς ἑτέραν μεταβάλλειν τὴν αὐτὴν σημαίνεσαν καμπύλην διὰ τῆς ἑςίας γεγραμμένην.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'.

§. 94. Τὴν κατὰ τὸ (πίν. ιε.) Α δοθεῖσαν ἐξίσωσιν, τὴν ἐμφαίνεσαν καμπύλην διὰ τῆς Ἑςίας γραφεῖσαν, εἰς ἑτέραν μεταβαλεῖν, τὴν αὐτὴν δηλᾶσαν καμπύλην διὰ τᾶ Ἄξονος γεγραμμένην.

Ἔςω καμπύλη ὁποιαᾶν, ἡ ΒΓΔ, διὰ τῆς (πίν. ϛ. κ. 7.) Α Ἑςίας γεγραμμένη, ἧς ἄξων ἡ ΕΗ· τεταγμέναι δὲ ἔγγιςα ἀλλήλων ἀπὸ μὲν τῆς Ἑςίας αἱ ΑΓ, ΑΔ, ἀπὸ δὲ δὲ τοῦ Ἄξονος αἱ ΓΖ, ΔΗ. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Α, διαστήματι δὲ τῷ ΑΓ τόξον κύκλου γεγράφθω τὸ ΓΕ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Γ ἡ ΓΦ τῇ ΒΗ παράλληλος. ἔστω δὲ ἡ μὲν ΑΖ $= \chi$, ἡ δὲ ΖΓ $= y$, ἡ δὲ ΑΓ $= z$, τὸ δὲ τόξον ΓΕ $= \delta\kappa$. κείσθω δὲ τὸ π διὰ τοῦ z ὁπωσδήποτε ἐμφαίνεσθαι, οἷον, ἢ διὰ τοῦ z^2, ἢ διὰ τοῦ z^3.

Οὐκοῦν ἡ μὲν ΖΗ $= \delta\chi$, ἡ δὲ ΔΦ $= \delta y$, ἡ δὲ ΔΕ $= \delta\kappa$. καὶ ἐπεὶ τὸ $\overline{\Gamma\Delta}^2 = \delta\chi^2 + \delta y^2$, τὸ αὐτὸ δὲ $\overline{\Gamma\Delta}^2 = \delta z^2 + \delta\kappa^2$, τὸ ἄρα $\delta z^2 + \delta\kappa^2$ ἴσον τοῖς κατὰ τὸ Β. ἔστι δὲ καὶ τὸ $\overline{A\Gamma}^2 = \overline{AZ}^2 + \overline{Z\Gamma}^2$, διὸ τὸ z^2 ἴσον τοῖς κατὰ τὸ Γ. ἐκ μὲν οὖν τῆς κατὰ τὸ (πίν. ιέ.) Α ἐξισώσεως ἡ κατὰ τὸ Δ γίνεται, ἐκ δὲ τῆς κατὰ τὸ Γ, ληφθέντων τῶν ἀπειροστῶν ἡ κατὰ τὸ Ε, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ z, ἐξ αὐτῆς δὲ ἡ κατὰ τὸ Η. ἐν τῇ κατὰ τὸ Β οὖν ἐξισώσει τεθέντων ἀντὶ τῶν $\delta\kappa^2$ καὶ δy^2 τῶν ἴσων αὐτοῖς, ἡ κατὰ τὸ Θ γίνεται, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ ι, ἐξ αὐτῆς δὲ ἡ κατὰ τὸ Κ. κειμένου δὲ τοῦ χ ἴσου τοῖς κατὰ τὸ Λ, ἕπεται τὸ μὲν χ^2 ἴσον τοῖς ἐν τῷ Μ, τὸ δὲ $\delta\chi$ τοῖς κατὰ τὸ Ν. διὸ τῶν ἴσων αὐτοῖς ἀντ' αὐτῶν τεθέντων ἐν τῇ κατὰ τὸ Κ ἐξισώσει, ἡ κατὰ τὸ Ξ γίνεται, καμπύλην διὰ τοῦ ἄξονος γεγραμμένην δηλοῦσα.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'.

§. 95. Ἐπειδὴ τὸ π διὰ τοῦ z ὁπωσδήποτε ὑπεμφαίνεται, (§. 94.) εὑρεθήσεται διὰ τῆς κατὰ τὸ Κ ἐξισώσεως ὁ λόγος ὃν ἔχει τὸ χ πρὸς τὸ z, καὶ πρὸς τὸ y. ἐὰν γὰρ τεθῇ τὸ $\pi = z^2$, ἡ κατὰ τὸ Κ εἰς τὴν κατὰ τὸ Ο μεταβάλλεται ἐξίσωσιν· ἐξ αὐτῆς δὲ ἡ κατὰ τὸ π γίνεται. κειμένου δὲ τοῦ az ἴσου τοῖς κατὰ τὸ Ρ, ἡ κατὰ τὸ Σ πορίζεται ἐξίσωσις, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ Τ, ἐξ αὐτῆς δὲ ἡ κατὰ τὸ Υ, καὶ ληφθέντων τῶν ἀπειροστῶν ἡ κατὰ τὸ Φ, διὰ τοῦ a δὲ πολλαπλασιασθέντων τῶν μερῶν ἡ κατὰ τὸ Χ. ἐκ τού-των δὲ καὶ τῆς κατὰ τὸ Υ ἡ κατὰ τὸ Ψ. ἐξ αὐ-τῆς δὲ καὶ τῆς κατὰ τὸ π ἡ κατὰ τὸ Ω, ἧς τὰ ὁλόκληρα τὰ κατὰ τὸ α, (§. 34, 47.) ἢ τὰ κατὰ τὸ β. ἐξ ὧν ἡ κατὰ τὸ γ ἀναλογία συνίσταται, ἐξ ἧς δῆλος ὁ λόγος, ὃν ἔχει τὸ χ πρὸς τὸ ϰ. ἐπεὶ δὲ τὸ ϰ ἴσον τῷ κατὰ τὸ Γ, δῆλος ἄρα ἔσται καὶ ὁ λόγος, ὃν ἔχει τὸ χ πρὸς τὸ y.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'.

§. 96. Ἐν τῇ κατὰ τὸ Ξ ἐξισώσει τὸ $\frac{\delta\psi}{\sqrt{a^2-\psi^2}}$ τόξον ἀπειροστὸν κύκλου ἐμφαίνει. (ὅρα τὸ §. 67.) διὸ ἐὰν μὲν καὶ τὸ ἕτερον τῆς ἐξισώσεως μέρος, αὐτὸ δὲ $\frac{\pi\delta\varkappa}{\varkappa}$, τεθέντος ἐν αὐτῷ ἀντὶ τοῦ π τοῦ ἴσου αὐτοῦ, τοῦ διὰ τοῦ ϰ ἐμφαινομένου, εἰς ἔκθεσιν μεταβληθῇ, ἀπειροστὸν τόξον κύκλου δηλοῦσαν, ἔχῃ δὲ τὸ ἕτερον τῶν τόξων πρὸς τὸ ἕτερον λόγον ῥητόν, ἡ ὑπὸ τῆς ἐξι-σώσεως ἐμφαινομένη καμπύλη, **Ἀλγεβραϊκὴ** λέ-γεται· ἐὰν δὲ μή, **Ὑπερβατική**.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 97. Ἀλγεβραϊκαὶ μὲν καμπύλαι εἰσίν, (ξ) ἐν αἷς ὁ λόγος τῶν ἀποτετμημένων καὶ τῶν τεταγμένων δι' ἀλγεβραϊκῆς παρίσταται ἐξισώσεως· Ὑπερβατικαὶ δὲ αἱ μὴ δι' ἀλγεβραϊκῆς ἐμφαινόμεναι ἐξισώσεως. Ἀλγε-βραϊκὴ δὲ ἐξίσωσις λέγεται, ἡ βαθμοῦ τινὸς ὡρισμένου οὖσα ἐξίσωσις καὶ ἡ αὐτὴ διαμένουσα ἐν παντὶ τῆς καμπύλης σημείῳ.

ΣΗ-

(ξ) Ὅρα §. 377. τῆς τοῦ Οὐολφ. Ἀναλύσ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Γ'.

§. 98. Μετὰ τὸ μεταβληθῆναι τὴν ἐξίσωσιν εἰς ἑτέραν, ἐμφαίνουσαν καμπύλην, διὰ τοῦ Ἄξονος γράφουσαν, χρηστέον ἐν τῇ τοῦ ἐξ αὐτῆς γινομένου στερεοῦ ἀναζητήσει τῷ εὑρεθέντι (§. 88.) στοιχείῳ $\frac{\pi y^2 \delta\chi}{2\eta}$

οὕτω μὲν γὰρ τὸ στερεὸν εὑρεθήσεται, τὸ ἐκ τοῦ (πίν. ϛ. χ. 7.) ΓΗΖ χωρίου. ἀφ' οὗ ἀφαιρεθέντος τοῦ κώνου, τοῦ ἐκ τοῦ ΓΑΖ τριγώνου, τὸ λοιπὸν ἔσται τὸ στερεὸν, τὸ ἐκ τοῦ ΓΒΑ χωρίου, τοῦ ἀπολαμβανομένου ἀπὸ τῆς διὰ τῆς Ἑστίας Α γραφείσης καμπύλης ΒΓ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'.

§. 99. Τὴν κατὰ τὸ (πίν. ιε.) Ξ δοθεῖσαν ἐξίσωσιν εἰς ἑτέραν μεταβαλεῖν, τὴν αὐτὴν μὲν δηλοῦσαν καμπύλην, διὰ τῆς Ἑστίας δὲ γεγραμμένην.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΓΝ. (πίν. ϛ. χ. 8.) καὶ διάμετρος μὲν αὐτοῦ ἡ ΑΗ $=$ α, Ἑστία δὲ τὸ Α, ἀποτετμημένη δὲ ἡ ΑΖ $=$ χ, τεταγμένη δὲ ἤτω ΖΓ, καὶ ἡ ΑΓ $=$ z.

Καὶ ἐπεὶ ὡς ΑΗ : ΑΓ :: ΑΓ : ΑΖ, ἤτοι ὡς α : z :: z : χ, ἔσται τὸ z^2 ἴσον τοῖς κατὰ τὸ δ. ἀλλὰ τὸ χ ἴσον τοῖς κατὰ τὸ Λ, (πίν. ιε.) τὸ ἄρα z^2 ἴσον τοῖς κατὰ τὸ ε. διὸ τὸ μὲν z ἴσον τοῖς ἐν τῷ ζ, τὸ δὲ z^2 τοῖς ἐν τῷ η, τὸ δὲ δz τοῖς ἐν τῷ θ. ἐν τῇ κατὰ τὸ Ξ οὖν ἐξισώσει τεθέντων ἀντὶ τοῦ δψ καὶ τοῦ ψ^2 τῶν ἴσων αὐτοῖς, ἡ κατὰ τὸ ι συνίσταται ἐξίσωσις· ἐξ ἧς δῆλον, ὅτι τὸ π ἴσον τοῖς κατὰ τὸ κ. ἐν τῇ ἐξισώσει οὖν τῇ κατὰ τὸ Λ, τῇ ἐμφαινούσῃ πᾶσαν καμπύλην διὰ τῆς Ἑστίας γεγραμμένην, τεθέντος ἀντὶ τοῦ π τοῦ ἄρτι εὑρεθέντος αὐτῷ ἴσου, ἡ κατὰ τὸ λ προκύπτει ἐξίσωσις, κύκλον σημαίνουσα, διὰ τῆς Ἑστίας γεγραμμένον, καὶ ἡμιδιάμετρον ἔχοντα ἴσην τῷ α.

Ἔςω δὲ μεταβληθησομένη ἐξίσωσις ἡ κατὰ τὸ Α, (πίν ιϛ.) ἡ πᾶσαν κωνικὴν τομὴν ἐμφαίνεσα, διὰ τῦ Ἄξονος γεγραμμένην. κείσθω δὲ τὴν (πίν. ϛ. χ. 9.) ΚΓ πᾶσαν ἐμφαίνειν Κώνε τομήν. ἔςω δὲ ὁ μὲν ΚΖ Ἄξων, ἡ δὲ ἀποτεμημένη ΑΖ $=\chi$, τῶν δὲ τεταγμένων ἡ μὲν ἐπὶ τῦ Ἄξονος ΖΓ $=y$, ἡ δὲ ἀπὸ τῆς Ἑςίας ΑΓ $=z$.

Οὐκῦν τὸ z, ἴσον τοῖς κατὰ τὸ Β, διὰ δὲ τὴν κατὰ τὸ Α ἐξίσωσιν τοῖς κατὰ τὸ Γ. ἐπεὶ δὲ τὸ $\chi = \frac{z\psi}{\alpha}$, (§. 94.) τὸ ἄρα z ἴσον τοῖς κατὰ τὸ Δ. ἐξ ὧ δῆλον, ὅτι τὸ ψ ἴσον τοῖς κατὰ τὸ Ε. ἐκ δὲ τῆς ἐξισώσεως ταύτης ἤτε κατὰ τὸ Ζ καὶ ἡ κατὰ τὸ Η γίνεται. ἑκατέρε δὲ τῶν μερῶν τῆς κατὰ τὸ Η ἀφαιρεθέντος ἀπὸ τῦ α^2, ἡ κατὰ τὸ Θ συνίςαται, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ Ι, ἐξ αὐτῆς δὲ ἡ κατὰ τὸ Κ. διὸ δὴ ἐν τῇ κατὰ τὸ Λ ἐξισώσει (ὅρα τὸ §. 94.) τεθέντων ἀντὶ τῦ δψ καὶ τῆς $\sqrt{\alpha^2 - \psi^2}$ τῶν ἄρτι εὑρεθέντων αὐτοῖς ἴσων, ἡ κατὰ τὸ Μ. καὶ ἡ κατὰ τὸ Ν ἐξίσωσις γίνεται, ἐξ ἧς διὰ τὴν κατὰ τὸ Ξ, τὴν πᾶσαν καμπύλην διὰ τῆς ἑςίας γεγραμμένην ἐμφαίνεσαν, ἡ κατὰ τὸ Ο, δηλῦσα ἑκάςην τῶν τῦ Κώνε τομῶν διὰ τῆς Ἑςίας γεγραμμένην.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 100. Ἡ κατὰ τὸ Α ἐξίσωσις Παραβολὴν μὲν ἐμφαίνει, ἐὰν τὸ $\beta = \gamma$. τέτε γὰρ κειμένε, εἰς τὴν κατὰ τὸ π μεταβάλλεται, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ Ρ γίνεται, ἐξ αὐτῆς δὲ ἡ κατὰ τὸ Σ· καὶ τεθέντος τῦ $\frac{1}{2}.\ \overline{\alpha \pm \chi} = Z$, ἡ κατὰ τὸ Τ, Παραβολὴν δηλῦσα, παράμετρον ἔχεσαν τὸ 2α. ἐὰν δὲ τὸ $\beta > \gamma$, ἡ κατὰ τὰ τὸ Α εἰς τὴν κατὰ τὸ Υ μεταβάλλεται, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ Φ γίνεται, ἡ αὐτὴ οὖσα τῇ κατὰ τὸ Χ· ἐξ αὐτῆς δὲ, πληρωθέντος τοῦ τετραγώνου, ἡ κατὰ τὸ Ψ· τεθέντος δὲ τοῦ α ἴσου τοῖς κατὰ τὸ Ω, ἡ κατὰ τὸ α, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ β, ἐξ αὐτῆς δὲ ἡ κατὰ τὸ γ, ἡ αὐτὴ οὖσα τῇ κατὰ τὸ δ· ἥτις Ἔλλειψιν σημαίνει, πλαγίαν μὲν πλευρὰν ἔχουσαν τὸ $\frac{2\alpha\beta^2}{\beta^2-\gamma^2}$, (§. 244. τοῦ 1. βιβλ.) ἐλάσσονα δὲ Διάμετρον τὸ $\frac{2\alpha\beta}{\sqrt{\beta^2-\gamma^2}}$. (§. 246. τοῦ 1. βιβλ.) διὰ τὰ αὐτὰ δὲ ἐὰν τὸ $\beta < \gamma$ ἡ ἐν τῷ Α ἐξίσωσις εἰς τὴν ἐν τῷ Σ μεταβληθήσεται, Ὑπερβολὴν σημαίνουσαν, ἧς πλαγία μὲν πλευρὰ τὸ $\frac{2\alpha\beta^2}{\gamma^2-\beta^2}$, (§. 252. τοῦ 1. βιβλ.) ὀρθὴ δὲ τὸ 2α. (§. 254. τοῦ αὐτ.) ἐὰν δὲ τὸ $\gamma = 0$, τὴν κατὰ τὸ Α ἡ κατὰ τὸ ζ ἐμφαίνει, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ η γίνεται, ἐξ αὐτῆς δὲ ἡ κατὰ τὸ θ, κύκλον δηλοῦσα, ἡμιδιάμετρον (§. 229.) ἔχοντα τὸ α.

ΚΕΦ. Ζ'.

Περὶ τῆς μεθόδου τοῦ διὰ τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εὑρίσκειν τὴν Ὑφαπτομένην καὶ Ἐφαπτομένην, τὴν Ὑποκάθετον καὶ Κάθετον, τὸ χωρίον καὶ τὸ στερεὸν τὸ ἐκ τῆς καμπύλης γινόμενον, ἣν ἡ δοθεῖσα ἐμφαίνει ἐξίσωσις· καὶ περὶ τῆς μεθόδου τοῦ τὴν ἐξίσωσιν εὑρίσκειν ἑνὸς τούτων δοθέντος.