ἀπειροστὸν, τὸ κατὰ τὸ Κ ἐστὶν, (§. 24.) ὃ ταυτὸν τῷ κατα τὸ Θ.

Καὶ ἄλλως δὲ τὸ αὐτὸ εὑρεθήσεται. κείσθω γὰρ τὸ δοθὲν κλάσμα ἴσον τοῖς κατα τὸ Λ. ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης ἡ κατὰ τὸ Μ γίνεται, ἧς τὰ ἀπειροστὰ τα κατα τὸ Ν. (§. 24.) ἐκ τῆς κατα το Ν δὲ ἐξισώσεως ἡ κατὰ τὸ Ξ γίνεται· καὶ τεθέντος ἀντὶ τοῦ ζ τοῦ ἴσου αὐτῷ τοῦ ἐν τῷ Λ, ἡ κατα τὸ Ο, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ Π. ἐπεὶ δὲ τὸ δζ ἴσον τῷ ἀπειροστῷ τοῦ δοθέντος κλάσματος, διὰ τὴν κατὰ τὸ Λ ἐξίσωσιν, δῆλον ἄρα ὅτι τὰ τῷ δζ ἴσα τὸ ζητούμενον ἀπειροστόν ἐστι.

Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ τὸ μὲν τῆς κατὰ τὸ Ρ ἐκθέσεως ἀπειροστόν ἐστι τὸ κατὰ τὸ Σ· τὸ δὲ τῆς κατα τὸ Τ, τὸ ἐν τῷ Υ· τὸ δὲ τῆς κατὰ τὸ Χ, τὸ ἐν τῷ Φ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 32 Τοῖς εἰρημένοις κανόσι καὶ τὰ τῆς δευτέρας καὶ τρίτης καὶ πάσης ἄλλης τάξεως ἀπειροστὰ εὑρεθήσονται. διὸ τὸ μὲν ἀπειροστὸν τοῦ ἐν τῷ Ψ ἐστὶ τὸ ἐν τῷ Ω· τὸ δὲ τοῦ ἐν τῷ α, τὸ ἐν τῷ β· τὸ δὲ τοῦ ἐν τῷ γ, τὸ ἐν τῷ δ· το δὲ τοῦ ἐν τῷ ε, τὸ ἐν τῷ ζ· τὸ δὲ τοῦ ἐν τῷ η, τὸ ἐν τῷ θ. ὁμοίως καὶ πάσης ἄλλης ἐκθέσεως συγκειμένης ἐξ ἀπειροστῶν ὁποιασοῦν τάξεως καὶ μεταβλητῶν τα ἀπειροστὰ εὑρεῖν ἔνεστι.

## ΚΕΦ. Γ΄.

## Περὶ τῆς μεθόδου τοῦ τὰ ὁλόκληρα τῶν δοθέντων ἀπειροστῶν εὑρίσκειν.

### ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄.

§ 33. Τοῦ ἐν τῷ ι δοθέντος μοναδικοῦ ἀπειροστοῦ τοῦ τὴν μονάδα ἐκθέτην ἔχοντος εὑρεῖν τὸ ὁλόκληρον.

## ΠΡΑΞΙΣ.

Ἄφελε (§. 15.) τὴν μονάδα ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ ἐπὶ τοῦ δ, καὶ πρόσγραψον αὐτῷ τὸ στοιχεῖον, ἔστω τὸ χ. τούτων γινομένων, δῆλον ὅτι προκύψει τὸ ὁλόκληρον, ὅπερ ἐστὶ τὸ κατὰ τὸ κ.

Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ τοῦ μὲν κατὰ τὸ λ ἀπειροστοῦ τὸ ὁλόκληρον ἐστὶ τὸ κατὰ τὸ μ· τοῦ δὲ κατὰ τὸ ν, τὸ κατὰ τὸ ξ· τοῦ δὲ κατὰ τὸ ο, τὸ κατὰ τὸ π.

## ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'.

§. 34. Τῆς κατὰ τὸ Α (πίν. γ.) δοθείσης Δυνάμεως, τῆς διὰ τοῦ ἀπειροστοῦ τῆς ἑαυτῆς ῥίζης πολλαπλασιαζομένης εὑρεῖν τὸ ὁλόκληρον.

## ΠΡΑΞΙΣ.

Κείσθω τὸ ζητούμενον ὁλόκληρον εἶναι τὸ κατὰ τὸ Β, ἐν ᾧ τό, τε Α καὶ τὸ π ὡς ἄγνωστα λογίζονται. ἐκεῖ τὰ ἀπειροστὰ τοῦ κατὰ τὸ Β ὁλοκλήρου ἴσα ἔσονται τῇ κατὰ τὸ Α δοθείσῃ ἐκθέσει. ἐκ τούτου οὖν ἡ κατὰ τὸ Γ ἐξίσωσις συνίσταται. διὸ δὴ τὸ μὲν $\pi A = 1$, τὸ δὲ $\pi - 1 = \nu$. τὸ μὲν ἄρα $\pi = \nu + 1$, τὸ δὲ $A = \frac{1}{\nu+1}$. ἐν τῇ οὖν κατὰ τὸ Β ἐκθέσει τεθέντων ἀντὶ τῶν Α καὶ π τῶν ἄρτι εὑρεθέντων αὐτοῖς ἴσων, δῆλον ὅτι ἡ κατὰ τὸ Δ ἔκθεσις ἔσται τὸ ζητούμενον ὁλόκληρον τῆς κατὰ τὸ Α δοθείσης ἐκθέσεως.

## ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 35. Πάσης ἄρα Δυνάμεως διὰ τοῦ ἀπειροστοῦ τῆς ἑαυτῆς ῥίζης πολλαπλασιαζομένης εὑρεθήσεται τὸ ὁλόκληρον, ἀρθέντος μὲν τοῦ ἀπειροστοῦ, μονάδος δὲ τῷ ἐκθέτῃ προστεθείσης, καὶ διὰ τοῦ προκύπτοντος κεφαλαίου τῆς Δυνάμεως διαιρεθείσης.

ΣΗ.

## ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'.

§. 36. Τῷ αὐτῷ δὴ τρόπῳ ὁλοκληρωθήσεται πᾶσα ἔκθεσις τῇ κατὰ τὸ Α ὁμοία. ἐμφαίνει δὲ ὁ ἐκθέτης τῆς ἐν αὐτῇ Δυνάμεως, τουτέστι τὸ ν, πάντα ἀριθμὸν, καταφατικὸν, ἀποφατικὸν, ὁλόκληρον, κεκλασμένον. διὸ τῆς μὲν κατὰ τὸ Ε ἐκθέσεως τὸ ὁλόκληρον ἐστὶ τὸ κατὰ τὸ Ζ· τῆς δὲ κατὰ τὸ Η, τὸ κατὰ τὸ Θ· τῆς δὲ κατὰ τὸ Ι, τὸ κατὰ τὸ Κ· τῆς δὲ κατὰ τὸ Λ, τὸ κατὰ τὸ Μ· τῆς δὲ κατὰ τὸ Ν, τὸ κατὰ τὸ Ξ.

## ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'.

§. 37. Ἰστέον ὅτι, ἐπειδὴ τοῦ τε χ καὶ τοῦ α + χ τὸ ἀπειροστὸν ἐστὶ τὸ δχ, διὰ τοῦτο τοῖς εὑρεθεῖσιν ὁλοκλήροις προστιθέναι εἰώθασιν ἄγνωστόν τι γράμμα ὑπὲρ τῶν ἀμεταβλήτων, ὅπερ διὰ τῶν δοθεισῶν ἐξισώσεων ὁρίζεται. οἷον ὁλοκληροῦντες τὸ δχ γράφουσιν ἀντὶ ὁλοκλήρου τὸ Α + χ.

## ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ.

§. 38. Τῆς κατὰ τὸ Ο δοθείσης ῥίζης, τῆς διὰ τοῦ ἀπειροστοῦ τῶν ὑπὸ τὴν ῥίζαν πολλαπλασιαζομένης, εὑρεῖν τὸ ὁλόκληρον.

Ἐπεὶ ἡ κατὰ τὸ Ο ἴση ἐστὶ τοῖς κατὰ τὸ Π, (§. 33. τοῦ ι. Βιβλ.) τὸ ἄρα ὁλόκληρον αὐτῆς ἐστὶ τὸ κατὰ τὸ Ρ. (§. 36.) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ τῆς κατὰ τὸ Σ ἐκθέσεως ὁλόκληρον, τῆς ἴσης τῇ κατὰ τὸ Τ, ἐστὶ τὸ κατὰ τὸ Υ, καὶ τῆς κατὰ τὸ Φ τὸ κατὰ τὸ Χ.

## ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 39. Εἰδέναι δεῖ ὅτι εἰσί τινες ἐκθέσεις τῇ κατὰ τὸ Ο ἀνόμοιοι, αἱ ταῖς ἐφεξῆς μεθόδοις εἰς ὁμοίας, ἤτοι αὐτῇ, ἢ τῇ κατὰ τὸ Α μεταβληθεῖσαι ὁλοκληροῦνται.

## ΜΕΘΟΔΟΣ Α΄.

§. 40. Ἐξάγαγε, ἢ εἰσάγαγε ὑπὸ τὴν ῥίζαν τὸ μὴ ἄῤῥητον αὐτὴν ποιοῦν. θατέρου γὰρ τούτων γενομένου, ὁμοία πολλάκις ἡ ἔκθεσις γίνεται τῇ ἑτέρᾳ τῶν κατὰ τὸ Ο, καὶ Λ.



## ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 41. Οἷον ἐξαχθέντος μὲν ἐκ τῆς κατὰ τὸ Ψ ῥίζης τοῦ $\chi^2$, οὗ ἡ ῥίζα $\chi$, ἡ κατὰ τὸ Ψ ἔκθεσις εἰς τὴν κατὰ τὸ Ω μεταβάλλεται, τὴν ὁμοίαν τῇ κατὰ τὸ Ο. διὸ τὸ ὁλόκληρον αὐτῆς ἐστὶ τὸ κατὰ τὸ α. (§. 38) εἰσαχθέντος δὲ ὑπὸ τὴν κατὰ τὸ β ῥίζαν τοῦ $\chi^2$, ἡ κατὰ τὸ β ἔκθεσις εἰς τὴν κατὰ τὸ γ μεταμορφοῦται, ἧς τὸ ὁλόκληρον (§. 38.) ἡ ἐν τῷ δ.

## ΜΕΘΟΔΟΣ Β΄.

§. 42. Ἐὰν τὸ ὑπὸ τὴν ῥίζαν μεταβλητὸν τὴν μονάδα ἐνθέτην ἔχῃ, θὲς αὐτὴν τὴν ῥίζαν ἴσην ἑτέρῳ τυχόντι μεταβλητῷ, καὶ οὕτω πᾶσα ἡ προκειμένη ἔκθεσις εἰς ἑτέραν μεταβληθήσεται, διὰ τοῦ ληφθέντος μεταβλητοῦ γράμματος ἐμφαινομένη.

## ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 43. Οἷον τῆς ῥίζης $\sqrt{\alpha+\chi}$, (πίν. δ.) τῆς ἐν τῇ κατὰ τὸ Α ἐκθέσεως, τεθείσης ἴσης τῷ ἐν τῷ Β ἀγνώστῳ ἔσται τὸ μὲν $\alpha+\chi$ ἴσον τῷ ἐν τῷ Γ· τὸ δὲ $\chi$, τοῖς ἐν τῷ Δ· τὸ δὲ $\chi^2$, τοῖς ἐν τῷ Ε· τὸ δὲ $\delta\chi$, τοῖς ἐν τῷ Ζ, διὰ τὴν ἐν τῷ Γ ἐξίσωσιν. διὸ ἡ κατὰ τὸ Α ἔκθεσις τῇ κατὰ τὸ Η ἴση, ἡ τῇ κατὰ τὸ Θ (ὁμοίᾳ οὔσῃ τῇ κατὰ τὸ Λ, (πίν. γ.) ἧς τὸ ὁλόκληρον τὸ ἐν τῷ Ι (§. 34.) (πίν. δ.) τεθέντων δὲ ἀντὶ τοῦ $y^7$ καὶ τοῦ $y^5$ τῶν ἴσων αὐτοῖς, τῶν ἀπὸ τῶν ἤδη συναθροισθεισῶν ἰσ-

σώ-

σώσεων περιζομένων, ἔσεται τῆς κατὰ τὸ Λ ἐκθέσεως τὸ ὁλόκληρον, ἡ κατὰ τὸ Κ, ἢ ἡ κατὰ τὸ Λ ἔκθεσις.

## ΜΕΘΟΔΟΣ Γ'.

§. 44. Ἐὰν δὲ ἡ ῥίζα τετραγωνικὴ ᾖ, καὶ τὸ ὑπ' αὐτὴν μεταβλητὸν μείζονα τῆς μονάδος ἐκθέτην ἔχῃ, θὲς αὐτὴν τὴν ῥίζαν ἴσην τῷ ὑπ' αὐτὴν μεταβλητῷ, ἤτοι διὰ γνωστοῦ γράμματος πολλαπλασιαζομένῳ καὶ δι' ἑτέρου τυχόντος μεταβλητοῦ διαιρεμένῳ, ἢ διὰ μεταβλητοῦ τυχόντος πολλαπλασιαζομένῳ καὶ διὰ γνωστοῦ διαιρεμένῳ.

## ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 45. Οἷον δοθείσης τῆς κατὰ τὸ Μ ἐκθέσεως, θεῖναι δεῖ τὴν $\sqrt{\alpha\chi-\chi^2}$ ἴσην ἤτοι τοῖς κατὰ τὸ Ν, ἢ τοῖς κατὰ τὸ Ξ ἐκ μὲν γὰρ τῆς κατὰ τὸ Ν ἐξισώσεως ἡ κατὰ τὸ Ο γίνεται, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ Π, ἐξ αὐτῆς δὲ ἡ κατὰ τὸ Ρ, καὶ τῶν ἀπειροστῶν ληφθέντων ἡ κατὰ τὸ Σ, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ Τ. τεθέντος δὲ ἀντὶ τοῦ $\overline{\alpha-\chi}^2$ τοῦ ἴσου αὐτῷ, τοῦ ἐκ τῆς κατὰ τὸ Π ἐξισώσεως περιζομένου, ἡ κατὰ τὸ Υ γίνεται, ἧς διὰ τοῦ $\chi\sqrt{\alpha\chi-\chi^2}$ διαιρεθείσης, ἡ κατὰ τὸ Φ· τεθέντος δὲ ἀντὶ τῆς $\sqrt{\alpha\chi-\chi^2}$ τοῦ ἴσου αὐτῇ τοῦ ἐν τῇ κατὰ τὸ Ν ἐξισώσει, ἡ κατὰ τὸ Χ, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ Ψ, ἡ αὐτὴ οὖσα τῇ κατὰ τὸ Ω. ἧς τὸ ὁλόκληρον τὸ ἐν τῷ α. (§. 35.) ὅπερ ἴσον τῷ ἐν τῷ β, τεθέντος δῆθεν ἀντὶ τοῦ $y$ τοῦ ἴσου αὐτῷ, τοῦ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ Ο ἐξισώσεως περιζομένου. πάλιν ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ Ξ ἐξισώσεως ἡ κατὰ τὸ γ γίνεται, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ δ, ἐξ αὐτῆς δὲ ἡ κατὰ τὸ ε, καὶ τῶν ἀπειροστῶν ληφθέντων, ἡ κατὰ τὸ ζ. ἐξ αὐτῆς δὲ καὶ τῆς κατὰ τὸ δ, ἡ κατὰ τὸ η· ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ ι, πολλαπλασιασθέντος τοῦ μὲν δχ διὰ τοῦ $\frac{\alpha^3}{\chi\sqrt{\alpha\chi-\chi^2}}$, τοῦ δὲ ἑτέρῳ τῆς ἐξισώσεως μέρει διὰ τοῦ ἴσου τῷ $\frac{\alpha^3}{\chi\sqrt{\alpha\chi-\chi^2}}$, τοῦ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ Ν ἐξισώσεως ποριζομένου. ἐκ δὲ τῆς κατὰ τὸ ι ἐξισώσεως γίνεται ἡ κατὰ τὸ Λ, (Πίν. ε.) ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ Β, τεθέντος τοῦ ἴσου τῷ χ, ἡ αὐτὴ ἴσα τῇ κατὰ τὸ Ι, ἥτις ἴση τῇ κατὰ τὸ Δ, ἧς τὸ ὁλόκληρον τὸ ἐν τῷ Γ, (§. 31.) εἴτουν τὸ ἐν τῷ Ζ, τεθέντος ἀντὶ τοῦ Ζ τοῦ ἴσου αὐτοῦ τοῦ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ γ (Πίν. δ.) ἐξισώσεως ποριζομένου.

## ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ΄.

§. 46. Τῆς κατὰ τὸ Η (πίν. ε.) δοθείσης κλασματικῆς ἀπειροστῆς ἐκθέσεως, ἧς ὁ ἀριθμητὴς τὸ ἀπειροστόν ἐστι τοῦ παρονομαστοῦ, εὑρεῖν τὸ ὁλόκληρον.

## ΠΡΑΞΙΣ.

Ὁ τοῦ παρονομαστοῦ λογάριθμος, ὃν τὸ λ ἐμφαινέτω, διὰ τοῦ συμπεράσματος τοῦ ἀριθμητοῦ πολλαπλασιασθήτω. λέγω δή, ὅτι τὸ ἐντεῦθεν γινόμενον, οἷον τὸ κατὰ τὸ Φ, τὸ ζητούμενον ὁλόκληρόν ἐστι τῆς κατὰ τὸ Η δοθείσης ἐκθέσεως.

### ΔΕΙΞΙΣ.

Ἔστω γὰρ Ὑπερβολὴ ἡ ΓΝ, (Πίν. ϛ. σχ. 1.) ἧς Ἀσύμπτωτοι αἱ ΑΨ, ΑΖ. καὶ ἔστω ἡ μὲν ΑΒ=α, ἡ δὲ ΒΓ ἡ τῇ ΑΨ παράλληλος=β, ἡ δὲ ΒΔ=χ. εἰλήφθωσαν δὲ αἱ ΑΒ, ΑΔ, ΑΕ, ΑΦ, ΑΖ συνεχῶς ἀνάλογον. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ=α, ἡ μὲν ἄρα ΑΔ=α+χ, ἡ δὲ ΑΕ=$\frac{1}{\alpha}\overline{\alpha+\chi}^2$, ἡ δὲ ΑΦ=$\frac{1}{\alpha^2}\overline{\alpha+\chi}^3$, ἡ δὲ ΑΖ=$\frac{1}{\alpha^3}\overline{\alpha+\chi}^4$. ἐὰν

ἐν

ζεν ληφθῇ τὰ δ, ε, φ, ζ σημεῖα τῶν Δ, Ε, Φ, Ζ ἐγγύτατα, ἔσονται ἡ μὲν δΔ τὸ ἀπειροστὸν τῆς ΛΔ, ἡ δὲ εΕ τῆς ΛΕ, ἡ δὲ φΦ τῆς ΛΦ, ἡ δὲ ζΖ τῆς ΛΖ. διὸ ἡ μὲν δΔ $= \delta\chi$, ἡ δὲ εΕ $= \frac{1}{\alpha}\,\overline{\alpha+\chi}.\ 2\delta\chi$, ἡ δὲ φΦ $= \frac{1}{\alpha^2}\,\overline{\alpha+\chi}^2.\ 3\delta\chi$, ἡ δὲ ζΖ $= \frac{1}{\alpha^3}\,\overline{\alpha+\chi}^3.\ 4\delta\chi$. ἀχθεισῶν δὲ τῶν μὲν δκ, ΔΚ, ελ, ΕΛ, φμ, ΦΜ, ζν, ΖΝ τῇ ΛΨ παραλλήλων, τῶν δὲ ΚΟ, ΛΞ, ΜΡ, ΝΣ τῇ ΛΖ, ἔσονται τὰ κ, λ ἴσον ἑκάστῃ τῶν ἐν τοῖς Ι, Κ, Λ, Μ (Πίν. ν.) ἐκθέσεων. (§. ... τῷ 1. Βιβλ.). διὸ ἡ μὲν ΚΔ ἴση τοῖς ἐν τῷ Ν, ἡ δὲ ΕΛ τοῖς ἐν τῷ Ξ, ἡ δὲ ΦΜ τοῖς κατὰ τὸ Ο, ἡ δὲ ΖΝ τοῖς κατὰ τὸ Π. ὅθεν τὸ μὲν δΚ ὀρθογώνιον ἴσον τοῖς κατὰ τὸ Ρ· τὸ δὲ εΛ, τοῖς κατὰ τὸ Σ· τὸ δὲ ΦΜ, τοῖς κατὰ τὸ Τ· τὸ δὲ ζΝ, τοῖς κατὰ τὸ Υ. ἐπεὶ δὲ τὸ μὲν δΚ (Πίν. ϛ. χ. 1.) τὸ ἀπειροστόν ἐστι τῷ ΓΒΔΚ μικτογράμμου, τὸ δὲ εΛ τῷ ΓΒΕΛ, τὸ δὲ ΦΜ τῷ ΓΒΦΜ, τὸ δὲ ζΝ τῷ ΓΒΖΝ, (διαφέρουσι γὰρ τῶν ἀπειροστῶν αὐτῶν τοῖς τριγωνιδίοις κΟΚ, λΞΛ, μΡΜ, νΣΝ), τῶν ἄρα μικτογράμμων τούτων τὰ ἀπειροστὰ ἐμφαίνονται ὑπὸ τῶν ἐν τοῖς Ρ, Σ, Τ, Υ ἐκθέσεων. (πίν. ν.) ἀλλ' αἱ ἐκθέσεις αὗται ἀριθμητικὸν λόγον πρὸς ἀλλήλας ἔχουσι. καὶ τὰ αὐτῶν ἄρα ὁλόκληρα, οὕτως τὰ εἰρημένα μικτόγραμμα ἀριθμητικὸν ἔχουσι λόγον, ἤτοι ὃν οἱ ἀριθμοὶ 1, 2, 3, 4. διὸ οἱ Λογάριθμοί εἰσι τῶν ἀποτετμημένων ΛΒ, ΛΔ, ΛΕ, ΛΦ, ΛΖ. (*) καὶ τὰ ἀπειροστὰ ἄρα τῶν μικτογράμμων, ἀπειροστά εἰσι τῶν λογαρίθμων τῶν ἀποτετμημένων. ἐπεὶ δὲ τῆς μὲν ἀποτετμημένης ΛΔ λογάριθμός ἐστι τὸ $\frac{1}{\alpha}\,\overline{\alpha+\chi}$· τῆς δὲ



(*) Κατὰ τὸν Η'. ὁρισμ. τοῦ Ϛ'. τῆς Ἀριθμ. Βιβλ. τὸν ἐν σελ. 217.

ΑΕ, τὸ $\lambda \frac{1}{\alpha} \overline{\alpha+\chi}^2$, τῆς δὲ ΑΦ τὸ $\lambda \frac{1}{\alpha^2} \overline{\alpha+\chi}^3$ τῆς δὲ ΑΖ, τὸ $\lambda \frac{1}{\alpha^3} \overline{\alpha+\chi}^4$, αἱ κατὰ τὰ Φ, Χ, Ψ, Ω προκύψεσιν ἐξισώσεις, τῶν ἀπειροςῶν τῶν λογαρίθμων διὰ τῦ Δ σημανθέντων. ὀκῦν τῶν α κ̀ β ὡς μονάδων ληφθέντων, κ̀ τῦ ὁλοκλήρυ διὰ τῦ Ο σημανθέντος, ἔσεται τὰ ὁλόκληρα τῶν ἐν τοῖς Φ, Χ, Ψ, Ω ἐξισώσεων τὰ ἐν τοῖς α, β, γ, δ. ἐξ ὧν δῆλον, ὅτι πάσης κλασματίυ ἀπειροςῆς ἐκθέσεως, ἀριθμητὴν ἐχύσης τὸ ἀπειροςὸν τῦ ὀνόματος, τὸ ὁλόκληρον αὐτῆς ἐςὶ τὸ γινόμενον ἐκ τῦ συμπράκτορος τῦ ἀριθμητῦ κ̀ τῦ λογαρίθμυ τῦ ὀνόματος.

Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ τῆς μὲν κατὰ τὸ ε ἐκθέσεως τὸ ὁλόκληρον ἐςὶ τὸ κατὰ τὸ ζ· τῆς δὲ κατὰ τὸ η, τὸ κατὰ τὸ θ· τῆς δὲ κατὰ τὸ ι, τὸ κατὰ τὸ κ.

## ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 47. Ἐκ τύτων ῥᾴδιον ὁλοκληρῶσαι πᾶσαν ἔκθεσιν ἐκ δύω μεταβλητῶν συγκειμένην, ὧν ἡ ἑτέρα διὰ τῦ ἀπειροςῦ τῆς ἑτέρας πεπολλαπλασίαςαι, οἷα ἡ ἐν τῷ Α. (πίν. ζ.) ἐπεὶ γὰρ αὕτη ἴση τοῖς ἐν τῷ Β, κάθω τὰ ἐν αὐτῇ κλάσματα ἴσα τῷ κατὰ τὸ Γ. ληφθέντων ὖν τῶν ὁλοκλήρων τῆς κατὰ τὸ Γ ἐξισώσεως, (§. 46.) ἡ κατὰ τὸ Δ γίνεται, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ Ε, διὰ τὸ τῶν λογαρίθμων ἰδίωμα. (*) ὀκῦν τὸ ὁλόκληρον τῆς κατὰ τὸ Α ἐκθέσεως ἐςὶ τὸ γχ. πολλαπλασιασθείσης γὰρ τῆς κατὰ τὸ Γ ἐξισώσεως διὰ τῆς κατὰ τὸ Ε, ἡ κατὰ τὸ Ζ γίνεται, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ Η. ἐξ αὐτῆς δὲ δῆλον ὅτι τὸ ὁλόκληρον τῆς κατὰ τὸ

(*) Ὅρα τὸ ϛ'. Θεώρ. τῦ γ'. τῆς Ἀριθμ. βιβλ. τὸ ἐν σελ. 318.

τὸ Λ δοθείσης ἐκθέσεως ἐςὶ τὸ ὁλόκληρον τῦ δΖ, εἴτυν τὸ Ζ, ὅπερ ἐςὶ τὸ ἴσον αὐτῷ yχ. ὁμοίως δὲ ἐπεὶ ἡ κατὰ τὸ Θ ἔκθεσις ἴση τοῖς κατὰ τὸ Ι, συςαθείσης τῆς κατὰ τὸ Κ, ἡ κατὰ τὸ Λ πορίζεται, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ Μ. ἐξ αὐτῆς δὲ δῆλον, ὅτι τὸ τῆς κατὰ τὸ Θ ἐκθέσεως ὁλόκληρον ἐςὶ τὸ $\frac{\chi}{y}$. τῆς γὰρ κατὰ τὸ Μ ἐξισώσεως διὰ τῦ $\frac{y}{y}$ πολλαπλασιαθείσης, ἡ κατὰ τὸ Ν προκύπτει. ταύτης δὲ διὰ τῆς κατὰ τὸ Κ πολλαπλασιαθείσης, ἡ κατὰ τὸ Ξ γίνεται, ἐξ ἧς δῆλον ὅτι τὸ ὁλόκληρον τῦ δΖ, εἴτυν τὸ Ζ, τυτέςι τὸ $\frac{\chi}{y}$, τὸ ὁλόκληρόν ἐςι τῆς κατὰ τὸ Θ ἐκθέσεως.

### ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'.

§. 48. Ἰςέον, ὅτι αἱ εἰρημέναι (§. 46.) ἐκθέσεις καὶ ἄλλως ὁλοκληρῦνται, τυτέςι διὰ Σειρᾶς ἐξ ἀπείρων συγκειμένης ὅρων, πορι ζομένης τῇ τῦ ἀριθμητῦ διαιρέσει διὰ τῦ ὀνόματος. οἷον τῆς δὲ τῆς ἐκθέσεως $\frac{b d\chi}{a+\chi}$, ἴσης ὔσης τῇ κατὰ τὸ Ο ἀπείρῳ Σειρᾷ, τὸ ὁλόκληρον ἐςὶ τὸ κατὰ τὸ Π.

### ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 49. Ὅλη ἄρα ἡ κατὰ τὸ Π Σειρὰ ἴση τῷ $b\lambda\overline{a+\chi}$.

### ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'.

§. 50. Εἰσὶ τινες κλασματικαὶ ἐκθέσεις ταῖς εἰρημέναις (§. 46.) ἀνόμοιοι, μεθόδοις δέτισιν ὅμοιαι αὐταῖς καταςαθεῖσαι ὁλοκληρῦνται.

ΜΕ-

## ΜΕΘΟΔΟΣ Α'.

§. 51. Κείσθω ἡ κατὰ τὸ Ρ ἔκθεσις ἴση τοῖς κατὰ τὸ Σ δυσὶ κλάσμασιν, ἐν οἷς τὰ Λ, D, c ἄγνωστα. ἐκ δὲ τῆς ἐξισώσεως ταύτης ἡ κατὰ τὸ Τ γενέσθω. οὐκοῦν τὸ μὲν $\Lambda + D$ ἴσον τῷ οὐδενὶ, ὡς ἐν τῷ Υ ὁρᾶται, τὸ δὲ $Dc - \Lambda c$ τῷ ἐν τῷ Φ, τὸ δὲ $-c^2$ τῷ ἐν τῷ Χ. (ἄλλως γὰρ οὐκ ἂν τὰ κατὰ τὸ Σ δύω κλάσματα ἴσα εἶεν τῷ κατὰ τὸ Ρ.) ἐκ μὲν οὖν τῆς κατὰ τὸ Υ ἐξισώσεως ἡ κατὰ τὸ Ψ γίνεται, ἐκ δὲ τῆς κατὰ τὸ Χ ἡ κατὰ τὸ Ω, ἐκ ταύτης δὲ καὶ τῶν κατὰ τὸ Υ καὶ Φ ἡ κατὰ τὸ α, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ β, ἡ αὐτὴ οὖσα τῇ κατὰ τὸ γ. ἐξ αὐτῆς δὲ καὶ τῆς κατὰ τὸ Ψ, ἡ κατὰ τὸ δ. τεθέντων οὖν ἐν τῇ κατὰ το Σ ἐξισώσει ἀντὶ τῶν Λ, D, c τῶν ἄρτι εὑρεθέντων αὐτοῖς ἴσων, ἡ κατὰ τὸ ε ἐξίσωσις γίνεται, ἧς αἱ ἐκθέσεις ὅμοιαι ταῖς εἰρημέναις. (§. 46.) τούτων δὲ τὰ ὁλόκληρα τὰ κατὰ τὸ ζ.

### ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 52. Ἐὰν μὲν τὸ $\alpha^2$ καταφατικὸν ᾖ, τὸ $c = -\sqrt{\alpha^2}$, τουτέστιν τὸ c ἴσον ἐπιπλάστῳ μεγέθει. (§. 42. τοῦ 1. βιβλ) ἐὰν δὲ, ἀποφατικὸν, τὸ $c = \sqrt{\alpha^2} = \alpha$. ὅπερ ἐστὶ πραγματικὸν μέγεθος.

## ΜΕΘΟΔΟΣ Β'.

§. 53. Ἔστω ὁλοκληρωτέα ἡ κατὰ τὸ Α (πίν. η.) ἔκθεσις. κείσθω τὸ χ ἴσον τοῖς κατὰ τὸ Β. οὐκοῦν τῆς ἐξισώσεως ταύτης τῶν ἀπειροστῶν ληφθέντων, ἡ κατὰ τὸ Γ γίνεται. ἐξ αὐτῆς δὲ καὶ τῆς κατὰ τὸ Β ἡ κατὰ τὸ Δ. ἐξ ἧς καὶ τῆς κατὰ τὸ Γ διὰ τοῦ 3ου πολλαπλασιασθείσης ἡ κατὰ τὸ Ε, ἡ αὐτὴ οὖσα τῇ κατὰ τὸ Ζ. ἐξ αὐτῆς δὲ καὶ τῆς κατὰ τὸ Β ἡ κατὰ τὸ

Η

Η, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ Θ. ἐπεὶ δὲ τὸ $\frac{\delta y}{2.\,y^2-2\alpha^2}$ ἴσον τοῖς κατὰ τὸ Ι, (διὰ τῆς προλαβέσης εὕρηται μεθόδε) ἡ ἄρα προτεθεῖσα ἔκθεσις ἴση τοῖς κατὰ τὸ Κ, ὧν τὰ ὁλόκληρα τὰ κατὰ τὸ Λ· (§. 46.) τεθέντων δὲ ἀντὶ τε $y$ καὶ τε $y^2$ τῶν ἴσων αὐτοῖς, τῶν ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ Β ἐξισώσεως πορίζομένων, τὰ κατὰ τὸ Μ. τὰ κατὰ τὸ Μ ἄρα τὰ ζητέμενα ὁλόκληρά εἰσι τῆς κατὰ τὸ Α δοθείσης ἐκθέσεως.

## ΜΕΘΟΔΟΣ Γ΄.

§. 54. Ἔςω ὁλοκληροτέα ἡ κατὰ τὸ Ν ἔκθεσις. ἐπεὶ ἓν ὁ ὀνομαςὴς αὐτῆς μέρος τετραγώνε περιέχει, πεπληρώσθω τὸ ἐλλεῖπον, ἤτεν προσκείσθω τὸ $\frac{1}{4}\gamma^2$, ἅμα δὲ καὶ ἀφῃρήσθω, ὅπως ἂν μηδεμίαν μεταβολὴν πάθῃ ἡ ἔκθεσις. ἐκεῖν αὕτη ἴση ἔςαι τοῖς κατὰ τὸ Ξ. τεθέντος δὲ τε μὲν Ζ ἴσε τοῖς κατὰ τὸ Ο, τε δὲ $\epsilon^2$ τοῖς κατὰ τὸ Π, ἴση ἔσεται ἡ αὐτὴ ἔκθεσις τοῖς κατὰ τὸ Ρ. καὶ ἐπεὶ τε $\frac{\alpha\delta\zeta}{\zeta^2+\epsilon^2}$ τὸ ὁλόκληρον δῆλον, (§. 51.) γνωςὸν ἄρα ἔςαι καὶ τὸ τῆς δοθείσης ἐκθέσεως.

## ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α΄.

§. 55. Καὶ πᾶσα δὲ ἀπειροςὴ κλασματιώδης ἔκθεσις, ἧς ὁ μὲν ἀριθμητὴς ἁπλεν ἀπειροςόν ἐςι, γνωςὸν ὁποιονεν συμπράκτορα ἔχον, ὁ δὲ ὀνομαςὴς τὸ γινόμενον ἐκ δύω τυχόντων πολλαπλασιαςῶν, μεταβλητὰ περιεχόντων, ὧν οἱ ἐκθέται τε 3 ἐλάσσονες, διὰ τῆς πρώτης μεθόδε (§. 51.) ὁλοκληρωθήσεται.

ΣΧΟ-

## ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 56. Οἷον, ἐὰν ἡ κατὰ τὸ Α (Πίν. Θ.) ἔκθεσις ἴση τεθῇ τοῖς ἐν τῷ Β κλάσμασιν, ἡ κατὰ τὸ Γ ἐξίσωσις γίνεται. ἐξ ἧς αἱ ἐν τοῖς Δ, Ε, Ζ, Η. καὶ ἐκ μὲν τῆς κατὰ τὸ Δ ἡ κατὰ τὸ Θ, ἐκ δὲ τῆς κατὰ τὸ Ε, καὶ τῆς κατὰ κατὰ τὸ Θ ἡ κατὰ τὸ Ι, ἐκ δὲ τῆς κατὰ τὸ Ζ ἡ κατὰ τὸ Κ, ἐκ δὲ τῆς κατὰ τὸ Η ἡ κατὰ τὸ Λ· ἐξ αὐτῆς δὲ καὶ τῆς κατὰ τὸ Ι ἡ κατὰ τὸ Μ, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ Ν· ἐξ αὐτῆς δὲ καὶ τῆς κατὰ τὸ Κ, ἡ κατὰ τὸ Ξ· ἐκ ταύτης δὲ καὶ τῆς κατὰ τὸ Θ, ἡ κατὰ τὸ Ο, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ Π· ἐξ αὐτῆς δὲ καὶ τῆς κατὰ τὸ Θ, ἡ κατὰ τὸ Ρ· ὁμοίως ἐξ αὐτῆς τῆς κατὰ τὸ Π καὶ τῆς κατὰ τὸ Ν, ἡ κατὰ τὸ Σ· ἐξ αὐτῆς δὲ καὶ τῆς κατὰ τὸ Π καὶ Ι, ἡ κατὰ τὸ Τ. τεθέντων οὖν ἐν τῇ κατὰ τὸ Β ἐξισώσει ἀντὶ τῶν Α, Β, Γ, Δ τῶν ἄρτι εὑρεθέντων αὐτοῖς ἴσων, ἡ κατὰ τὸ Υ γίνεται, ἡ αὐτὴ οὖσα τῇ κατὰ τὸ Φ. ἧς τὰ ὁλόκληρα τὰ ἐν τῷ Χ, (§. 46, 51.) πλὴν τοῦ ἐχάτου αὐτῆς μέρους, εἴτουν τοῦ $\frac{\delta\chi}{4\cdot\chi^2+\alpha^2}$. ὅπερ τετάρτη ἀνάλογόν ἐστι τοῦ $4\alpha^2$, τῆς 1, καὶ τόξου κύκλου, (ὅρα τὸ ἑξῆς §. 67.) ἡμιδιάμετρον μὲν ἔχοντος τὸ α, ἐφαπτομένην δὲ τὸ γ. διὸ ἀπὸ τῶν κατὰ τὸ Χ ὁλοκλήρων ἀφαιρεθείσης τῆς εἰρημένης τετάρτης ἀναλόγου, τὸ λοιπὸν ἐστὶ τὸ ὁλόκληρον τῆς κατὰ τὸ Α δοθείσης ἐκθέσεως.

## ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'.

§. 57. Ἐὰν δὲ τῆς εἰρημένης κλασματιώδους ἐκθέσεως (§. 55.) πεπολλαπλασιασμένος ᾖ διὰ τῆς ὁποιασοῦν τοῦ ἀμεταβλήτου Δυνάμεως, ἤτοι ὁ ἀριθμητής, ὥσπερ τῆς κατὰ τὸ Ψ, ἢ ὁ ὀνομαστής, καθάπερ ὁ τῆς κατὰ τὸ Ω, εὑρετέον τὰ τῆς ἐκθέσεως ὁλόκληρα, ρα, (§. 56.) μὴ λογιθείσης τῆς πολλαπλασιαζούσης ἢ διαιρούσης Δυνάμεως, εἶτα δι' αὐτῆς πολλαπλασιαστέον αὐτὰ, ἢ διαιρετέον.

## ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε'.

§. 58. Τὴν κατὰ τὸ Α (Πίν. ι.) δοθεῖσαν ἀπειροστὴν λογαριθμικὴν ἔκθεσιν ὁλοκληρῶσαι.

Ἐμφαινέτω τὸ μ ἀριθμὸν ὁλόκληρον καταφατικὸν, ὁμοίως καὶ τὸ π. κείσθω δὲ τὸ ζητούμενον ὁλόκληρον εἶναι τὸ κατὰ τὸ Β, ἐν ᾧ τὰ f, m, e ἄγνωστα λογιζέσθω. ἐὰν οὖν τοῦτο τὸ ἀκριβὲς ὁλόκληρον ᾖ, τὰ ἀπειροστὰ αὐτοῦ, ἅπερ εἰσὶ τὰ κατὰ τὸ Γ ἴσα ἔσονται τῇ κατὰ τὸ Α δοθείσῃ ἐκθέσει. τούτων οὖν κειμένων, αἱ ἐν τοῖς Δ, Ε, Ζ συσταθήσονται ἐξισώσεις. καὶ ἐκ μὲν τῆς κατὰ τὸ Ε ἡ κατὰ τὸ Η ἐξίσωσις γίνεται, ἐξ αὐτῆς δὲ καὶ τῆς κατὰ τὸ Δ, ἡ κατὰ τὸ Θ. ἐκοῦν ἡ κατὰ τὸ Β ἔκθεσις εἰς τὴν κατὰ τὸ Ι μεταβληθήσεται, τεθέντων ἐν αὐτῇ ἀντὶ τῶν f, m, e τῶν ἀρτίως εὑρεθέντων αὐτοῖς ἴσων. αὕτη οὖν ὑπῆρχεν ἂν τὸ ζητούμενον ὁλόκληρον, εἴπερ τὰ κατὰ τὸ Γ ἀπειροστὰ αὐτῆς ἴσα ἐτύγχανε τῇ κατὰ τὸ Α δοθείσῃ ἐκθέσει. ἐπεὶ δὲ ὑπερέχει αὐτὴν κατὰ τὸ ἕτερον τῶν μερῶν, εἴτουν τὸ $\frac{efx^m dx}{x} \lambda x^{e-1}$, ἀφαιρετέον ἄρα τὸ τούτου ὁλόκληρον ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ Ι ἐκθέσεως, ὅπως ἂν τὸ ζητούμενον προκύψῃ ὁλόκληρον. τούτου οὖν ἀφαιρεθέντος, (ἀντὶ τῶν e, f, m τὰ ἄρτι εὑρεθέντα ἴσα αὐτοῖς τίθενται) ἡ κατὰ τὸ Κ ἐξίσωσις γίνεται. ἐὰν μὲν οὖν τὸ $\mu - 1 = 0$, ἡ ἀφαιρεθεῖσα ἔκθεσις, τουτέστιν ἡ κατὰ τὸ Λ, ἴση οὖσα τῇ κατὰ τὸ Μ, ὁλόκληρον ἔχει τὸ κατὰ τὸ Ν. (§. 35.) διὸ τὸ ζητούμενον ὁλόκληρον τῆς κατὰ τὸ Α δοθείσης ἐκθέσεως ἐστὶ τὸ κατὰ τὸ Ξ. ἐὰν δὲ τὸ $\mu - 1 > 0$,

ἐπα-

ἐπαναληπτέον τὴν αὐτὴν πρᾶξιν, ἕως ἂν ὁ τῦ λχ ἐκθέτης ἴσος τῷ μηδενὶ γένηται. οἷον κειμένε πάλιν τῦ ὁλοκλήρε τῆς κατὰ τὸ Λ ἐκθέσεως ἴσε εἶναι τῇ κατὰ τὸ Β ἐκθέσει, ληφθέντων τῶν ἑαυτῦ ἀπειρος ῶν, τῶν ἐν τῷ Ο, αἱ κατὰ τὰ Π, Ρ, Σ γίνονται ἐξισώσεις. ἐξ ὧν πορίζεται τὸ μὲν m ἴσον τοῖς κατὰ τὸ Τ, τὸ δὲ f τοῖς κατὰ τὸ Υ. ὅθεν ἡ κατὰ τὸ Β ἔκθεσις εἰς τὴν κατὰ τὸ Φ μεταβάλλεται. ἐπειδὴ δὲ τὰ κατὰ τὸ Ο ἀπειρος ὰ τῆς κατὰ τὸ Β ἐκθέσεως ὑπερέχεσι τὴν κατὰ τὸ Λ ἔκθεσιν τῇ κατὰ τὸ Χ ἐκθέσει, ἀφαιρετέον ἄρα ἀπὸ τῦ κατὰ τὸ Φ ὁλοκλήρε αὐτῶν τὸ ὁλόκληρον τῆς ἐν τῷ Χ. ἐκῦν τὸ ὁλόκληρον τῆς ἐν τῷ Λ ἐκθέσεως τὸ ἐν τῷ Ψ ἐςίν. ἀντὶ δὲ τῶν ef, m — 1, καὶ e — 1, τεθέντων ἐν αὐτῇ τῶν ἴσων αὐτοῖς, τῶν διὰ τῶν ἐξισώσεων Π, Ρ, Σ πεπορισμένων, ἔσεται τὸ εἰρημένον ὁλόκληρον τὸ ἐν τῷ Ω. καὶ ἐὰν μὲν τὸ μ—2 = o, τὸ διαληφθὲν ὁλόκληρον ἴσον ἐςὶ τοῖς κατὰ τὸ α. διὸ τὸ ὁλόκληρον τῆς κατὰ τὸ Α δοθείσης ἐκθέσεως ἐςὶ τὸ κατὰ τὸ β. ἐὰν δὲ τὸ μ — 2 > o, ἴσον ἐςὶ τοῖς κατὰ τὸ γ. τῆς αὐτῆς δὲ πράξεως ἐπαναληφθείσης, εὑρεθήσεται τὸ ὁλόκληρον τῦ ἀπειρος ῦ τῦ ἐν τῇ γ ἐκθέσει ἴσον τοῖς κατὰ τὸ δ. διὸ τὸ τῆς κατὰ τὸ Α δοθείσης ἐκθέσεως ζητέμενον ὁλόκληρον τοῖς κατὰ τὸ ε ἴσον ἐςί. διὰ τῆς αὐτῆς δὲ πράξεως εὑρετέον πάλιν τὸ ὁλόκληρον τῦ ἀπειρος ῦ μέρες τῆς κατὰ τὸ ζ· καὶ ταῦτα ἕως ἂν ὁ τῦ λχ ἐκθέτης ἴσος τῷ μηδενὶ γένηται.

Ἐμφαινέτω δὲ τὸ μ ἐν τῇ κατὰ τὸ Α δοθείσῃ ἐκθέσει ἀριθμὸν ὁλόκληρον ἀποφατικόν. κείσθω δὲ πάλιν τὸ ζητέμενον αὐτῆς ὁλόκληρον εἶναι τὸ κατὰ τὸ Β. ἐκῦν ληφθέντων τῶν ἀπειρος ῶν αὐτῦ τῶν κατὰ τὸ Α, (Πίν. ια.) αἱ ἐν τοῖς Β, Γ, Δ ἐξισώσεις συνίςανται. ἐξ ὧν πορίζομεθα τὸ μὲν e ἴσον τοῖς κατὰ τὸ Ε, τὸ δὲ f τοῖς κα-

κατὰ τὸ z, τὸ δὲ m τοῖς κατὰ τὸ Η. διὸ δὴ διὰ τὸν προειρημένον λόγον τὸ τῆς δοθείσης ἐκθέσεως ὁλόκληρον ἴσον τοῖς κατὰ τὸ Θ. καὶ ἐὰν μὲν ὁ τοῦ λχ ἐκθέτης, εἴτουν τὸ $\mu+1=-1$, τὸ ζητούμενον τῆς δοθείσης ἐκθέσεως ὁλόκληρον ἐστὶ τὸ κατὰ τὸ Ι. ἐὰν δὲ τὸ $\mu+1 > -$, ἐπαναληπτέον τὴν πρᾶξιν, ἕως ἂν τὸ $\mu+1=-1$. ἐπεὶ δὲ τῆς κατὰ τὸ Ι ἐκθέσεως μέρος τὸ κατὰ τὸ Κ ὁλοκληρῶσαι μέθοδος ἄχρι τοῦ νῦν οὐχ εὕρηται, δῆλον ὅτι ἐν μέρει ὁλοκληροῦται ἡ δοθεῖσα ἔκθεσις, ἀποφατικοῦ ὄντος τοῦ ἐκθέτου τοῦ ἐν αὐτῇ λογαρίθμου.

## ΣΧΟΛΙΟΝ Α'.

§. 59. Ἔστω τὸ μὲν $\mu=2$, τὸ δὲ π ἀριθμὸς ὁποιοσοῦν, οἷον ὁ 3. οὐκοῦν ἡ κατὰ τὸ Λ δοθεῖσα ἔκθεσις (πίν. 1.) τὴν κατὰ τὸ Λ ἐμφαίνει. ἐπεὶ δὲ τὰ ἀπειροστὰ (πίν. ια.) τοῦ ἤδη τεθέντος ὁλοκλήρου τῆς κατὰ τὸ Α ἐκθέσεως εἰσὶ τὰ κατὰ τὸ Μ, ἔσεται τὸ μὲν $mf=\alpha$, τὸ δὲ $m-1=3$, τὸ δὲ $e=2$. διὸ τὸ $f=\frac{\alpha}{4}$. οὐκοῦν τὸ ὁλόκληρον τῆς κατὰ τὸ Λ ἐκθέσεως ἐστὶ τὸ ἐν τοῖς κατὰ τὸ Ν. τῆς αὐτῆς δὲ πράξεως ἐπαναληφθείσης, τὸ ἐν τοῖς κατὰ τὸ Ξ.

## ΣΧΟΛΙΟΝ Β'.

§. 60. Ἔστω τὸ μὲν $\mu=-2$, τὸ δὲ $\pi=3$. οὐκοῦν ἡ μὲν δοθεῖσα ἔκθεσις τὴν κατὰ τὸ Ο ἐμφαίνει, ἡ δὲ κατὰ τὸ Ν τὴν κατὰ τὸ π, ἡ δὲ κατὰ τὸ Ξ τὴν κατὰ τὸ Ρ.

### ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'.

§. 61. Ἐὰν δὲ τὸ μ κλασματίων ἐμφαίνῃ ἀριθμόν, οἷον, ἐὰν τὸ $\mu=\frac{1}{2}$, ἡ δοθεῖσα ἔκθεσις τὴν κατὰ τὸ

Σ σημαίνει· ἐξακτέον τοιγαροῦν πρῶτον τὴν τοῦ $λχ^{\frac{1}{2}}$ τετραγωνικὴν ῥίζαν, εἶθ' οὕτως ὁλοκληρωτέον τὴν ἔκθεσιν. ἐπεὶ δὲ τὸ λχ οὐδὲ τετράγωνόν ἐστιν, οὐδὲ ἄλλη τις δύναμις, ἡ τῆς ῥίζης ἐξαγωγὴ ἐπ' ἄπειρον προαχθήσεται. ἐξ οὗ δῆλον, ὅτι τὸ τῆς κατὰ τὸ Σ ἐκθέσεως ὁλόκληρον Σειρά ἐστιν ἀπειρομερής.

## ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'.

§. 62. Ἐὰν μὲν ὁλόκληρον καταφατικὸν ἀριθμὸν ἐμφαίνῃ τὸ μ, ὁλοκληρωθήσεται ἡ δοθεῖσα ἔκθεσις, τεθέντος τοῦ ὁλοκλήρου αὐτῆς ἴσου τοῖς κατὰ τὸ Τ· ἐὰν δὲ ὁλόκληρον ἀποφατικὸν, τοῖς κατὰ τὸ Υ. ληφθέντων γὰρ τῶν ἀπειροστῶν αὐτῶν, εὑρεθήσονται τὰ ἴσα τοῖς ἀγνώστοις f, g, h, l, διὰ τῶν α, π, μ ἐμφαινόμενα, καθάπερ καὶ ἐν τῷ προκειμένῳ προβλήματι. (§. 58.) τούτων δὲ ἐν τοῖς κατὰ τὸ Τ, ἢ Υ ὑποθετικοῖς ὁλοκλήροις τεθέντων, τὰ ζητούμενα εὑρεθήσεται ὁλόκληρα. καὶ ἐὰν μὲν καταφατικὸν ᾖ τὸ μ τοσαῦτα μέρη ὑποθετικῶν ὁλοκλήρων συγκροτείσθωσαν, ὅσα δεήσειεν ἂν πρὸς τὸ περιέχειν τὸ ἔσχατον μέρος τὸ λχ μετὰ ἐκθέτου ἴσου τῷ 0· ἐὰν δὲ ἀποφατικὸν, μετὰ ἐκθέτου ἴσου τῷ — 1.

## ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ϛ'.

§. 63. Τῆς κατὰ τὸ Φ δοθείσης ἀπειροστῆς ἐκθέσεως εὑρεῖν τὸ ὁλόκληρον.

Ἐὰν μὲν τὸ μ ἀριθμὸν ὁλόκληρον καταφατικὸν ἐμφαίνῃ, ἀρθέντος τοῦ $ε + ζχ^{ν}$ ἐπὶ τὴν ὑπὸ τοῦ μ σημαινομένην Δύναμιν, καὶ ἑκάστου τῶν μερῶν αὐτῆς διὰ τοῦ $αχ^{π}δχ$ πολλαπλασιασθέντος, ἕκαστον τῶν γινομένων ὁλο-