ΒΙΒΛΙΟΥ ΔΕΥΤΕΡΟΥ

Τῆς καλουμένης τῶν ἀπείρων Μεθόδου

ΚΕΦ. Α'.

Περὶ τοῦ λεγομένου διαφορικοῦ λογισμοῦ, ἤτοι τοῦ τῶν ἀπειροστῶν.

ΟΡΙΣΜΟΣ Α'.

§. 1. Ἀμετάβλητον μέγεθος καλείσθω τὸ μηδεμίαν αὔξησιν ἢ μείωσιν πάσχον, ἀλλ' ὅπερ ἐστὶ διαμένον.

ΟΡΙΣΜΟΣ Β'.

§. 2. Μεταβλητὸν δὲ, τὸ αὐξομειώσεις ἐπιδεχόμενον.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 3. Τὰ μὲν ἀμετάβλητα μεγέθη διὰ τῶν πρώτων σοιχείων, οἷον τῶν α, β, γ, κτ. ἐμφαίνειν εἰώθασι τὰ δὲ μεταβλητὰ, διὰ τῶν ἐσχάτων, οἷον τῶν τ, υ, φ, χ, ὥσπερ καὶ τὰ ἄγνωσα.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 4. Οἷον ἀμετάβλητα μὲν μεγέθη, τῦ μὲν κύκλυ ἡ διάμετρος, τῆς δὲ Παραβολῆς ἡ παράμετρος, τῆς δὲ Ἐλλείψεως ἥτε παράμετρος, καὶ ἡ ἐλάσσων διάμετρος· μεταβλητὰ δὲ, αἱ ἐν αὐτοῖς ἀποτετμημέναι, καὶ αἱ τεταγμέναι, αἱ Κάθετοι καὶ Ὑποκάθετοι, καὶ τὰ ὑπ' αὐτῶν καὶ τῶν καμπύλων περατύμενα χωρία. ἔνεσι γὰρ αὐξηθῆναίτε καὶ μειωθῆναι αὐτὰ ὡς ἔτυχεν.

ΟΡΙΣΜΟΣ Γ'.

§. 5. Παντὸς μεγέθυς μέρος τὶ ἐλάχισον, ὅπερ τῷ ὅλῳ προστιθέμενον ἢ ἀφαιρέμενον, ἐδεμίαν αὐτῷ αἰσθητὴν αὔξησιν ἐπιφέρει ἢ μείωσιν, αὐτῷ τε τῷ ὅλῳ παραβαλλόμενον ὡς ἐδὲν ἐςιν, οἱ μὲν Διαφορικὸν, (χ) οἱ δὲ Ῥοὴν, (ψ) πολλοὶ δὲ Ἀπειροσημόριον, ἢ Ἀπειροςὸν καλῦσι.

ΣΧΟΛΙΟΝ Α'.

§. 6. Τὴν τῶν ἀπειροςῶν ὕπαρξιν κατανοήσεις, τοῖς ἑξῆς τὸν νῦν ἐπισήσας. Ἐὰν ἐν τῷ καταμετρεῖν τινὰ ὕλην

(χ) Οἱ περὶ τὸν Λεϊβνίτιον καὶ Οὐόλφιον, ὡς δύω μικρῦ δεῖν ἴσων μεγεθῶν διαφορὰν αὐτὸ ἐκλαμβάνυσιν, (ψ) ὁ Νεύτων ὡς αὔξησιν ἢ μείωσιν ἐν ἀκαρεῖ διὰ ῥοῆς γενομένην. εἶναι ὑπὸ μὲν τῦ σημείυ ἡ ἐν ἀκαρεῖ διὰ ῥοῆς γενομένη γραμμή· ὑπὸ δὲ τῆς γραμμῆς, ἡ ἐπιφάνεια· ὑπὸ δὲ τῆς ἐπιφανείας, τὸ σῶμα.

ὑψηλοτάτου τινος ὄρους τὸ ὕψος, ἄνεμος πνεύσας, ἀπὸ τῆς ἀκρωρείας ἀφέλῃ ἢ προσθῇ λεπτῆς κόνεως λεπτότατον μέρος, τὸ τοῦ ὕψους μέτρον μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν ἢ προσθήκην τὸ αὐτὸ συντηρηθήσεται, τὸ ἀφαιρεθὲν οὖν ἢ προστεθὲν μέρος, ἐκεῖνό ἐστι τὸ ἀπειροστόν, ὅπερ τῷ ὅλῳ παρατιθέμενον οὐδέν ἐστι. τούτῳ δὴ τῷ λόγῳ καὶ τὴν τῆς γῆς ἡμιδιάμετρον ὡς σημεῖον οἱ Ἀστρονόμοι ἐκλαμβάνουσι. τοῖς ὑπὸ τῶν Ἄστρων ἀποστήμασι παραθέντες· καὶ αὐτὰ τὰ ἐν τῇ γῇ ὑψηλότατα ὄρη, ὡς ἀπειροστὰ τῷ ὅλῳ τῆς γῆς μεγέθει· καὶ τὴν γῆν δὲ ὡς ἀκριβῆ σφαῖραν λογίζονται. ὅπερ δὴ καὶ ἡ ἐν ταῖς τῆς Σελήνης ἐκλείψεσιν ὁρωμένη αὐτῆς σκιὰ πείθει.

ΣΧΟΛΙΟΝ Β΄.

§. 7. Καὶ τοῖς παλαιοῖς οὐκ ἄδηλος ἡ τῶν ἀπειροστῶν χρῆσις ἔοικε. τὸ ἀπειροστὸν γὰρ αἰνίττεται ὁ μὲν Εὐκλείδης, λέγων λειφθήσεταί τι μέγεθος, ὃ ἐστιν ἔλασσον ἐκκειμένου ἐλάσσονος μεγέθους· (ω) ὁ δὲ Ἀρχιμήδης, (α) τῶν ἀνίσων χωρίων τὴν ὑπεροχήν, ᾇ ὑπερέχει τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος, δυνατὸν εἶμεν αὐτὰν συντιθεμέναν παντὸς ὑπερέχειν τοῦ προτεθέντος πεπερασμένου χωρίου.

ΟΡΙΣΜΟΣ Δ΄.

§. 8. Ῥέοντα ἢ ὁλόκληρα μεγέθη λέγεται τὰ τῶν ἀπειροστῶν ὅλα.

ΟΡΙΣΜΟΣ Ε΄.

§. 9. Ἀπειροστὸν δευτέρας τάξεως ἐστὶ τὸ τοῦ ἀπειροστοῦ τῆς πρώτης τάξεως ἀπειροστόν, ἔχον τε σχέσιν πρὸς τὸ τῆς πρώτης τάξεως ἀπειροστόν, ὃν αὐτὸ τὸ τῆς πρώτης τάξεως, πρὸς τὸ αὐτοῦ ὅλον.

ΣΧΟ-

(ω) Θεωρ. 1. τοῦ 10. βιβλ. τῶν Στοιχ. (α) Ἐν τῷ Προοιμ. τοῦ περὶ τοῦ τῆς Παραβολ. τετραγωνισμ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 10. Οἷον τὸ τῆς πρώτης τάξεως ἀπειροστὸν, ὁλόκληρόν ἐστι τοῦ τῆς δευτέρας· αὐτὸ δὲ τὸ τῆς δευτέρας ἀπειροστὸν, τοῦ τῆς πρώτης· τὸ αὐτὸ δὲ νόει καὶ περὶ τῶν τῆς τρίτης τάξεως ἀπειροστῶν, καὶ περὶ τῶν τῆς τετάρτης, καὶ περὶ τῶν ἀπειροστῶν τῶν ἐφεξῆς τάξεων.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 11. Τῶν ἀμεταβλήτων μεγεθῶν μηδεμίαν αὔξησιν ἢ μείωσιν ἐπιδεχομένων, (§. 1.) οὐδὲν ἀπειροστὸν λαμβάνεται.

ΟΡΙΣΜΟΣ ς'.

§. 12. Ἄπειρον μέγεθος, οὗ πέρας οὐδέν.

ΟΡΟΣ.

§. 13. Τὰ μὲν ἄπειρα μεγέθη γεγράφθω ὡς ἐν τῷ Α κεῖται (πίν. α.) τὰ δὲ πεπερασμένα, τὰ μεταβλητὰ, ὡς ἐν τῷ Β ἢ ὡς ἐν τῷ Γ. καὶ τὰ μὲν ἀπειροστὰ τῆς πρώτης τάξεως, ὡς ἐν τῷ Δ, ἢ ὡς ἐν τῷ Ε, ἢ ὡς ἐν τῷ Ζ· τὰ δὲ τῆς δευτέρας, ὡς ἐν τῷ Η, ἢ ὡς ἐν τῷ Θ· τὰ δὲ τῆς τρίτης, ὡς ἐν τῷ Ι, ἢ ὡς ἐν τῷ Κ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 14. Ὁ ὕπερθεν τοῦ δ τιθέμενος ἀριθμὸς οὐδὲ τοῦ δ, οὐδὲ τοῦ χ ἐκθέτης ἐστὶ, τὴν τοῦ ἀπειροστοῦ δὲ τάξιν δηλοῖ. τὸ μὲν γὰρ $\delta^1\chi$, ἀπειροστὸν πρώτης τάξεως ἐμφαίνει· τὸ δὲ $\delta^2\chi$, δευτέρας· τὸ δὲ $\delta^3\chi$, τρίτης· τὸ δὲ ἀπὸ τοῦ $\delta^1\chi$ τετράγωνον ἐστὶ τὸ $\delta^1\chi^2$, ἢ τὸ $\delta\chi^2$· τὸ δὲ ἀπὸ τοῦ $\delta^2\chi$, $\delta^2\chi^2$· τὸ δὲ ἀπὸ τοῦ $\delta^3\chi$, τὸ $\delta^3\chi^2$. τὸ αὐτὸ δὲ νοητέον καὶ περὶ τοῦ μηδενικοῦ σημείου.

ΠΟ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄.

§. 5. Προστιθεμένης μὲν ἄρα μονάδος τῷ ἐπὶ τοῦ δυναμικοῦ σημείῳ, ἢ τῷ ἐπ' αὐτοῦ ἀριθμῷ, τὸ ἀπειροστὸν αὐτοῦ ἐμφαίνεται. ἀφαιρουμένης δὲ, τὸ ὁλόκληρον.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 16. Οἷον ἐν τῷ $\delta^0\chi$ ἐὰν μὲν τῷ 0 προστεθῇ ἡ μονὰς, προκύπτει τὸ $\delta^1\chi$, ὅπερ τὸ ἀπειροστὸν ἐμφαίνει τοῦ $\delta^0\chi$· ἐὰν δὲ ἀφαιρεθῇ, τὸ $\delta^{-1}\chi$, ὅπερ δηλοῖ τὸ ὁλόκληρον τοῦ $\delta^0\chi$. τὸ γὰρ $\delta^0\chi$ πεπερασμένον ὂν, ἀπειροστόν ἐστι τοῦ ἀπείρου $\delta^{-1}\chi$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄.

§. 17. Ἐὰν ἄρα ἡ κατὰ τὸ Λ σειρὰ συνταχθῇ, ἕκαστος μὲν τῶν πρὸ τοῦ $\delta^0\chi$ ὅρος, τὸ ὁλόκληρον τοῦ πρὸ αὐτοῦ δηλοῖ· ἕκαστος δὲ τῶν μετὰ τὸν $\delta^0\chi$, τὸ ἀπειροστὸν τοῦ πρὸ αὐτοῦ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 18. Οἷον τὸ μὲν ὁλόκληρον τοῦ $\delta^0\chi$ ἐστὶ τὸ $\delta^{-1}\chi$, τούτου δὲ τὸ $\delta^{-2}\chi$· τὸ δὲ ἀπειροστὸν τοῦ $\delta^0\chi$, τὸ $\delta^1\chi$· τούτου δὲ τὸ $\delta^2\chi$.

ΟΡΙΣΜΟΣ Ζ΄.

§. 19 **Διαφορικὸς** μὲν, ἢ τῶν **Ἀπειροστῶν Λογισμὸς** λέγεται, ἡ τοῦ τὰ ἀπειροστὰ τῶν δοθέντων ὁλοκλήρων εὑρίσκειν μέθοδος· **Ὁλοκληρωτικὸς** δὲ, ἡ τοῦ εὑρίσκειν τῶν δοθέντων ἀπειροστῶν τὰ ὁλόκληρα. τούτων δὲ ἡ μὲν **εὐθεῖα** καλεῖται, ἡ δὲ, **ἀντίστροφος**.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 20. Δοθείσης μὲν τῆς ἐξισώσεως τῆς καμπύλην τινὰ ἐμφαινούσης, τῇ τῶν ἀπειροστῶν λήψει, τὰ ἰδιώματα αὐτῆς εὑρίσκομεν, οἷον τὴν ὑφαπτομένην, τὴν ὑποκάθετον, τὴν ἐφαπτομένην, τὴν κάθετον· τοῦτο δὲ

μέ-

μέθοδος εὐθεῖα ἐκείνη· δοθέντος δέ τινος τῶν τῆς καμπύλης ἰδιωμάτων, εἴτουν ἐκθέσεως δι' ἀπειροστῶν ἐμφαινούσης μίαν τῶν εἰρημένων εὐθειῶν, τῇ τῶν ὁλοκλήρων εὑρέσει, ἡ ἐξίσωσις προκύπτει ἡ τὴν καμπύλην δηλοῦσα, ἧς ἡ ἔκθεσις δέδοται. τοῦτο δὲ μέθοδος ἀντίστροφος.

ΑΙΤΗΜΑ.

§. 21. Τὰ ὁμοειδῆ μεγέθη, τὰ ἀπειροστῷ μεγέθει ἀλλήλων διαφέροντα, ἴσα ἐκλαμβάνειν.

ΚΕΦ. Β'.

Περὶ τῆς μεθόδου τοῦ τὰ ἀπειροστὰ τῶν δοθέντων ὁλοκλήρων εὑρίσκειν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'.

§. 22. Τοῦ κατὰ τὸ Μ δοθέντος κεφαλαίου τῶν ὁλοκλήρων εὑρεῖν τὰ ἀπειροστά.

ΠΡΑΞΙΣ.

Γράψον τὰ κατὰ τὸ Μ ὡς ἐν τῷ Ν ὁρῶνται. (§. 13.) πρόσθες δὲ τὴν μονάδα ἑκάστῳ τῶν ἐπὶ τοῦ δ μηδενικῶν σημείων. (§. 15.) λέγω δή, ὅτι ἡ κατὰ τὸ Ξ ἔκθεσις τὰ ἀπειροστά εἰσι τοῦ κατὰ τὸ Μ δοθέντος κεφαλαίου.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ γὰρ α ἀμετάβλητον ὄν, (§. 3.) ἀπειροστὸν οὐκ ἔχει. (§. 11.) ἔστι δὲ τοῦ μὲν χ ἀπειροστὸν τὸ δχ, τοῦ δὲ y τὸ δy, τοῦ δὲ Ω τὸ δΩ. (§. 15.) τὰ ἄρα ζητούμενα ἀπειροστὰ τὰ ἐν τῷ Ξ εἰσί.

Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ τοῦ μὲν κατὰ τὸ Ξ κεφαλαίου τὰ ἀπειροστά εἰσι τὰ κατὰ τὸ Ο· τὰ δὲ τοῦ κατὰ τὸ Π, τὰ κατὰ τὸ Ρ· τὰ δὲ τοῦ κατὰ τὸ Σ, τὰ κατὰ τὸ Τ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 23. Ἐνίοτε ἐν τῷ λαμβάνειν τὰ τῆς δευτέρας τάξεως ἀπειροστὰ, ἓν τῶν τῆς πρώτης, ὡς ἀμετάβλητον λογίζεται. οἷον τῆς κατὰ τὸ Υ ἐκθέσεως τὰ ἀπειροστά εἰσι τὰ κατὰ τὸ Φ, ἀμεταβλήτου λογισθέντος τοῦ δχ. ὁμοίως τῆς κατὰ τὸ Χ, ἀμεταβλήτου λογισθέντος τοῦ δψ, τὰ κατὰ τὸ Ψ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'.

§. 24. Τοῦ κατὰ τὸ Ω δοθέντος γινομένου τὰ ἀπειροστὰ εὑρεῖν.

ΠΡΑΞΙΣ.

Πολλαπλασίασον τὸ ἕτερον τῶν μεταβλητῶν διὰ τὸ ἀπειροστὸ τοῦ ἑτέρου, εἴτουν τὸ μὲν χ διὰ τοῦ δψ, τὸ δὲ ψ διὰ τοῦ δχ. λέγω δὴ ὅτι τὸ κεφάλαιον τῶν γινομένων, τὸ ἐν τῷ α, τὰ ζητούμενα ἀπειροστά εἰσιν.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ χψ τὸ ὑπὸ τῶν χ καὶ ψ ἐμφαίνει περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἔστω ἡ μὲν ΑΓ = χ, (β) ἡ δὲ ΑΒ = ψ. καὶ τῆς μὲν ΑΓ ἀπειροστὸν ἔστω ἡ ΓΙ = δχ, τῆς δὲ ΑΒ ἡ ΒΕ = δψ. καὶ πεπληρώσθω τὸ ΑΗ ὀρθογώνιον. οὐκοῦν ἡ μὲν ΑΙ = χ + δχ, ἡ δὲ ΑΕ = ψ + δψ. διὸ τὸ μὲν ΑΗ ἴσον τῇ κατὰ τὸ β ἐκθέσει, (πόρ. α.) τὸ δὲ ΑΔ τῷ χψ. ἀφαιρεθέντος οὖν ἀπὸ τοῦ ΑΗ τοῦ ΑΔ, εἴτουν ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ β ἐκθέσεως τοῦ χψ, τὸ λοιπὸν τὸ ἐν τῷ γ ἐστὶν ὁ γνώμων. καὶ ἐπεὶ ὡς 1 : δψ :: δχ : δψδχ, ἔστι δὲ τὸ δψ ἀπειροστὸν τῆς ἑαυτοῦ μονάδος, ἄρα καὶ τὸ δψδχ ἀπειροστὸν τῷ δχ παρατιθέμενον. διὸ δὴ ἀπειροστὸν καὶ τοῖς χδψ + ψδχ παραβαλλόμενον. οὐκοῦν ἡ κατὰ τὸ γ ἔκθεσις ἴση τῇ κατὰ

(β) Πίν. XXXIX. χ 7.

κατα το α. (§. 21.) τὰ κατὰ τὸ α ἄρα τὰ ζητούμενα ἀπειροστά εἰσι.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'.

§. 25. Ἐὰν δὲ ἐκ πλειόνων ἢ δύω γραμμάτων τὸ δοθὲν γινόμενον συγκέηται, οἷον τὸ κατὰ τὸ δ, τὸ κεφάλαιον τῶν γινομένων ἐκ τοῦ ἀπειροστοῦ ἑνὸς ἑκάστου διὰ τῶν λοιπῶν πολλαπλασιασθέντος ἐστὶ τὰ ζητούμενα ἀπειροστὰ, ἅτινα τὰ ἐν τῷ ε. καθὼ γὰρ τὸ χy ἴσον ἑκατέρῳ ἀγνώστῳ τῷ κατὰ τὸ ζ. ἐκεῖν τὸ χyζ ἴσον τοῖς κατὰ τὸ η. τὰ μὲν ἄρα ἀπειροστὰ τῆς κατὰ τὸ ζ, ἐξισώσεως, εἰσὶ τὰ κατὰ τὸ θ· τὰ δὲ τῆς κατὰ τὸ η, τὰ κατὰ τὸ ι, (§. 24.) τοῦ Δ τὰ ληφθησόμενα ἀπειροστὰ τοῦ χyz ἐμφαίνοντος. ἐν τῇ κατὰ τὸ ι οὖν ἐξισώσει τεθέντος ἀντὶ μὲν τοῦ Ω τῶν ἴσων αὐτῷ, τῶν κατὰ τὸ ζ, ἀντὶ δὲ τοῦ δΩ τῶν κατὰ τὸ θ, ἡ κατὰ τὸ κ ἐξίσωσις γίνεται. ἐξ ἧς δῆλον ὅτι τὰ ζητούμενα ἀπειροστὰ, εἰσὶ τὰ κατὰ τὸ ε. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ τὰ ἀπειροστὰ τῆς ἐν τῷ λ ἐκθέσεως εἰσὶ τὰ ἐν τῷ μ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Β'.

§. 26. Ἐὰν δὲ τὸ γινόμενον ἤτοι πεπολλαπλασιασμένον ᾖ δι' ἀμεταβλήτου, καθάπερ τὸ ἐν τῷ ν, ἢ διῃρημένον, ὡς τὸ ἐν τῷ ο, λαμβάνεται μὲν πρῶτον τὰ ἀπειροστὰ ὡς ἀνωτέρω εἴρηται, εἶθ' οὕτω διὰ τοῦ ἀμεταβλήτου πολλαπλασιάζεται, ὡς τὰ ἐν τῷ ξ, ἢ διαιρεῖται, ὥσπερ τὰ ἐν τῷ π.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'.

§. 27. Τὸ ἀπειροστὸν εὑρεῖν τῆς κατὰ τὸ ε δοθείσης Δυνάμεως.

ΠΡΑΞΙΣ.

Ὁ τῆς Δυνάμεως ἐκθέτης ἐν τῷ τοῦ συμπράκτορος τόπῳ γεγράφθω, μεθ' ὃν αὐτὴ ἡ Δύναμις μετὰ τοῦ προτέρου ἐκθέτου μονάδι ἐλαττωθέντος, εἶτα τὸ ἀπειροστὸν τοῦ γράμματος, ἐξ οὗ ἡ Δύναμις, ὡς ἐν τῷ σ ὁρᾶται. λέγω δὴ οὖν, ὅτι ἡ κατὰ τὸ σ οὕτω συγκροτηθεῖσα ἔκθεσις τὸ ἀπειροστόν ἐστι τῆς κατὰ τὸ ρ δοθείσης Δυνάμεως.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ $\chi^2 = \chi\chi$, τοῦ δὲ $\chi\chi$ τὸ ἀπειροστόν ἐστι (§. 24.) τὸ $\chi d\chi + \chi d\chi = 2\chi d\chi$· ἡ κατὰ τὸ σ ἄρα ἔκθεσις τὸ ἀπειροστόν ἐστι τῆς κατὰ τὸ ρ Δυνάμεως.

Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ τὸ μὲν τοῦ y^3 ἀπειροστόν ἐστι τὸ κατὰ τὸ τ· τὸ δὲ τοῦ $\frac{\alpha\chi^4}{\beta}$, τὸ κατὰ τὸ υ· τὸ δὲ τοῦ $\alpha\chi^\nu$, τὸ ἐν τῷ φ· τὸ δὲ τοῦ $\overline{\alpha+\chi}^{\nu}$, τὸ ἐν τῷ χ· τὸ δὲ τοῦ $\alpha\overset{\nu}{\chi^{\mu}}$, τὸ ἐν τῷ ψ· τὸ δὲ τοῦ $\overline{\alpha+\chi}^{\frac{\mu}{\nu}}$, τὸ ἐν τῷ ω· τὸ δὲ τοῦ $\overline{\alpha^\nu+\chi^\nu}^{\frac{\mu}{\nu}}$, τὸ ἐν τῷ Λ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α'.

§. 28. Καὶ τῆς ὁποιασοῦν ἄρα ῥίζης ἴσῳ αὐτῷ τρόπῳ εὑρεῖν ἔνεστι τὸ ἀπειροστόν. ἐπεὶ γὰρ τὸ $\sqrt{y^3} = y^{\frac{3}{2}}$ (§. 33. τοῦ 1. βιβλ.) τὸ ἄρα ἀπειροστὸν αὐτοῦ ἐστὶ τὸ ἐν τῷ Δ. (§. 27.) (Πίν. β.) διὰ τὰ αὐτὰ τοῦ μὲν $\sqrt[\nu]{\chi^\mu}$, τὸ τὸ ἀπειροςὸν ἐςὶ τὸ κατὰ τὸ Β· τὸ δὲ τῦ $\sqrt[\mu]{a^{\nu}+y^{\nu}}$, τὸ κατὰ Γ· τὸ δὲ τῦ $\sqrt[\nu]{a^{\nu}+y^{\nu}}^{\mu}$, τὸ κατὰ τὸ Δ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β'.

§. 29. Ὁμοίως δὴ καὶ τῦ γινομένυ ἐξ ὁποιασῦν Δυνάμεως ᾗ μεγέθυς τὸ ἀπειροςὸν εὑρεθήσεται. ἐπεὶ γὰρ τὸ $\chi^2 y = \chi\chi y$, τῦ δὲ $\chi\chi y$ τὸ ἀπειροςόν ἐςι τὸ $\chi y d\chi + \chi y d\chi + \chi\chi dy$, (§. 25.) τῦ ἄρα $\chi^2 y$ τὸ ἀπειροςόν ἐςι τὸ κατὰ τὸ Ε. ὁμοίως τὸ τῦ $a\chi^{\nu}y$, τὸ κατὰ τὸ Ζ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'.

§. 30. Τὸ κεφάλαιον ἄρα τῶν γινομένων ἐκ τῦ ἀπειροςῦ τῆς πολλαπλασιαζομένης Δυνάμεως καὶ τῦ πολλαπλασιάζοντος αὐτὴν μεγέθυς, καὶ τῆς Δυνάμεως ᾗ τῦ ἀπειροςῦ τῦ εἰρημένυ μεγέθυς, τὸ ἀπειροςόν ἐςι τῦ γινομένυ ἐκ τῆς Δυνάμεως καὶ τῦ μεγέθυς.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'.

§. 31. Τῦ κατὰ τὸ Η δοθέντος κλάσματος τὸ ἀπειροςὸν εὑρεῖν.

ΠΡΑΞΙΣ.

Ἀπὸ τῦ γινομένυ ἐκ τῦ ὀνομαςῦ καὶ τῦ ἀπειροςῦ τῦ ἀριθμητῦ, εἴτυν ἀπὸ τῦ $y d\chi$ ἄφελε τὸ γινόμενον ἐκ τῦ ἀριθμητῦ ᾗ τῦ ἀπειροςῦ τῦ ὀνομαςῦ, ἤτοι τὸ χdy, τὸ δὲ λοιπὸν διὰ τῦ τετραγώνυ, τῦ ἀπὸ τῦ ὀνομαςῦ δίελε, τυτέςι διὰ τῦ y^2. λέγω δὴ, ὅτι ἡ ὕτω συγκροτυμένη ἔκθεσις, εἴτυν ἡ κατὰ τὸ Θ τὸ ζητύμενον ἀπειροςόν ἐςι.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἔςι μὲν γὰρ τὸ κατὰ τὸ Η δοθὲν κλάσμα ἴσον τοῖς κατὰ τὸ Ι, (§. 31. τῦ 1. βιβλ.), τὸ δὲ τῦ χy^{-1} ἀπει-

ἀπειροςόν, τὸ κατὰ τὸ Κ ἐςίν, (§. 24.) ὃ ταυτὸν τῷ κατα τὸ Θ.

Καὶ ἄλλως δὲ τὸ αὐτὸ εὑρεθήσεται. κείσθω γὰρ τὸ τεθὲν κλάσμα ἴσον τοῖς κατα τὸ Λ. ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης ἡ κατὰ τὸ Μ γίνεται, ἧς τὰ ἀπειροςὰ τα κατα τὸ Ν. (§. 24) ἐκ τῆς κατα το Ν δὲ ἐξισώσεως ἡ κατὰ τὸ Ξ γίνεται· καὶ τεθέντος ἀντὶ τοῦ ζ τοῦ ἴσου αὐτῷ τοῦ ἐν τῷ Λ, ἡ κατα τὸ Ο, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ Π. ἐπεὶ δὲ τὸ δΖ ἴσον τῷ ἀπειροςῷ τοῦ τεθέντος κλάσματος, διὰ τὴν κατὰ τὸ Λ ἐξίσωσιν, δῆλον ἄρα ὅτι τὰ τῷ δΖ ἴσα τὸ ζητούμενον ἀπειροςόν ἐςι.

Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ τὸ μὲν τῆς κατὰ τὸ Ρ ἐκθέσεως ἀπειροςόν ἐςι τὸ κατὰ τὸ Σ· τὸ δὲ τῆς κατα τὸ Τ, τὸ ἐν τῷ Υ· τὸ δὲ τῆς κατὰ τὸ Χ, τὸ ἐν τῷ Φ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 32 Τοῖς εἰρημένοις κανόσι καὶ τὰ τῆς δευτέρας καὶ τρίτης καὶ πάσης ἄλλης τάξεως ἀπειροςὰ εὑρεθήσονται. διὸ τὸ μὲν ἀπειροςὸν τοῦ ἐν τῷ Ψ ἐςὶ τὸ ἐν τῷ Ω· τὸ δὲ τοῦ ἐν τῷ α, τὸ ἐν τῷ β· τὸ δὲ τοῦ ἐν τῷ γ, τὸ ἐν τῷ δ· τὸ δὲ τοῦ ἐν τῷ ε, τὸ ἐν τῷ ζ τὸ δὲ τοῦ ἐν τῷ η, τὸ ἐν τῷ θ. ὁμοίως καὶ πάσης ἄλλης ἐκθέσεως συγκειμένης ἐξ ἀπειροςῶν ὁποιασοῦν τάξεως καὶ μεταβλητῶν τα ἀπειροςὰ εὑρεῖν ἔνεςι.

ΚΕΦ. Γ'.

Περὶ τῆς μεθόδου τοῦ τὰ ὁλόκληρα τῶν δοθέντων ἀπειροςῶν εὑρίσκειν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'.

§ 33. Τοῦ ἐν τῷ ι δοθέντος μοναδικοῦ ἀπειροςοῦ τοῦ τὴν μονάδα ἐκθέτην ἔχοντος εὑρεῖν τὸ ὁλόκληρον.