

## Κ Ε Φ. Β΄.

Περὶ προθέσεως τῶν ὀλοκλήρων γραμμα-  
τικῶν ἐκθέσεων.

## ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄.

§. 44. Τὰς ἐν τῷ Α (β) δοθείσας ἑτεροειδῆς ὀλοκλήρες γραμματικὰς ἐκθέσεις ἐπισυναΐψαι.

## ΠΡΑΚΤΕΟΝ.

Ἐτέρως μετὰ τὴν ἑτέραν κατὰ σειρὰν γραφείσης τοῖς ἰδίαις σημείοις καὶ συμπράκτοσι καὶ γραμμασι καὶ ἐκθίσται, ὡς ἐν τῷ Β, γεγονός ἀν εἴη τὸ ἐπιταχθέν. ὁ δὲ λόγος ἐκ τῆς πράξεως ἐπίδηλος.

## ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄.

§. 45. Τὰς ἐν τῷ Γ δοθείσας ὁμοειδῆς ὀλοκλήρες γραμματικὰς ἐκθέσεις ἐπισυναΐψαι.

## ΠΡΑΚΤΕΟΝ.

Ἐτέρως ὑπὸ τὴν ἑτέραν ραβδοειδῶς γραφείσης, ὡς ἐν τῷ Δ, καὶ εὐθείας ὑπὸ αὐταῖς ἀχθείσης, ἐπισυναΐψον μὲν τὰς συμπράκτορας κατὰ τὰς τῆς ἀριθμητικῆς κανόνας, πρόσγραψον δὲ τῷ 13 κεφαλαίῳ μίαν τῶν προκειμένων γραμματικῶν ἐκθέσεων, καὶ ἔσαι δὴ τὸ ἐν τῷ Ε τὸ ζητούμενον κεφάλαιον.

Ὅμοίως τὰς ἐν τῷ Ζ τάξας ὡσπερ ἐν τῷ Η κείνται, εὐρήσεις κεφάλαιον αὐτῶν τὸ ἐν τῷ Θ ὀρώμενον. ἀπὸ γὰρ τῆ — 22 ἀφαιρέσεως τῆς 1, τὰ λοιπὰ εἰσιν — 21. Καὶ τὰς ἐν τῷ Ι δὲ τάξας ὡς ἐν τῷ Κ κείνται, ἐπισυναΐψαι ἕτω μάλλον 6 καὶ ἥττον 4, ὅπερ εἰς ἀφαιρέντος ἀπὸ τῆ 6 καταφατικῆ τῆ 4 ἀποφατικῆ, τὰ λοιπὰ εἰσι μάλλον 2· μάλλον δὲ 2 καὶ μάλλον 1, μάλλον 3 εἰσὶ μάλλον δὲ 3 καὶ ἥττον 8, (ὅπερ εἰς 3 θετικῶν κειμένων, καὶ 8 ἀποθετικῶν.

5 μόνον ἀποθετικά εἰσι τὰ λοιπά. ) ἦγτον 5 εἰς ἴν' ἦγτον δὲ 5 ἢ ἦγτον 2, ἦγτον 7 συγκροτεῖ. τὸ ἄρα ζηγόμενον κεφάλαιον τὸ ἐν τῷ Λ ἐστὶ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'.

§. 46. Τῶν ἐν τοῖς Μ καὶ Ν δοθεισῶν ὁμοειδῶν τε καὶ ἑτεροειδῶν ὀλοκλήρων γραμματικῶν ἐκθέσεων τὸ κεφάλαιον εὐρεῖν.

ΠΡΑΚΤΕΟΝ.

Τεθεῖχθωσαν αἱ ὁμοειδέες ὑπὸ τὰς ὁμοειδέας ὡς ἐν τῷ Ξ ὀρώνγχι, ἢ συνήφθωσαν, ὡς ἀνωτέρω (§. 45.) εἰρηται καὶ ἔσται τὸ κεφάλαιον αὐτῶν τὸ ἐν τῷ Ο.

Κ Ε Φ. Γ'.

Περὶ ἀφαιρέσεως τῶν ὀλοκλήρων γραμματικῶν ἐκθέσεων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'.

§. 47. Τῶν δοθεισῶν ὁμοειδῶν ὀλοκλήρων γραμματικῶν ἐκθέσεων, τῶν ἐν τοῖς Π, Ρ, Σ, Τ, τὴν διαφορὰν εὐρεῖν.

Ἐξω ἀφορατείας ἢ μὲν ἐν τῷ Ρ ἀπὸ τῆς ἐν τῷ Π, ἢ δὲ ἐν τῷ Τ ἀπὸ τῆς ἐν τῷ Σ.

ΠΡΑΚΤΕΟΝ.

Μεταβεβλήθω τὸ τῆς ἀφορατείας ἐκθέσεως σημεῖον καὶ ἢ μὲν καταφατικόν ἐσιν, ὡς τῆς ἐν τῷ Ρ, ἀποφατικόν γιγνέθω ἢ δὲ ἀποφατικόν, ὡς τῆς ἐν τῷ Τ, καταφατικόν. καὶ συναφθήτω ἢ μὲν ἐν τῷ Ρ τῆ ἐν τῷ Π, ἢ δὲ ἐν τῷ Τ τῆ ἐν τῷ Σ. λόγῳ δὲ ὅτι τὸ μὲν ἐν τῷ Φ κεφάλαιον τῶν ἐν τῷ Τ, ἢ διαφοραὶ ἐσὶ τῶν Π καὶ Ρ· τὸ δὲ ἐν τῷ Ψ, τὸ κεφάλαιον τῶν ἐν τῷ Χ, ἢ διαφοραὶ τῶν Σ καὶ Τ.

## ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπειδὴ γὰρ τὰ τῶν ἀφαιρετέων σημεῖα μεταβέ-  
βληται, ἡ διαφορὰ τῶν ἐκθέσεων ἐπὶ τὸ ἑαυτῶν κε-  
φάλαιον. δῆλον γὰρ, ὅτι τὸ μὲν 0 α τῶ 4 α διαφέ-  
ρει α τὸ δ' 5 γ διαφέρει τῶ - 5 γ κατὰ τὸ 13 γ.  
δ.ι γὰρ τῶ - 5 γ προσηύθηται 13 γ, ὅπως ἐν ἴσῳ ἢ  
τῶ 8 γ.

Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἀφαιρέσεως τῆς - 4 β γ ἀπὸ  
τῆς - 10 β γ, λοιπὸν ἔσται ἡ - 6 β γ, καὶ τῆς δὲ ἀπὸ  
τῆς - 20 δ, λοιπὸν ἔσται ἡ - 28 δ.

## ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄.

§. 48. Τῶν ἐν τοῖς Λ (γ) καὶ Β δοθείσων ἑτεροειδῶν  
ὁμοειδῶν γραμματικῶν ἐκθέσεων τὴν διαφορὰν προ-  
σευξῆν. Ἐξωσαν ἀφαιρέται αὐ ἐν τῶ Β ἀπὸ τῶν ἐν τῶ Λ.

## ΠΡΑΚΤΕΟΝ.

Γραφήτωσαν ταῖς ἐν τῶ Λ αὐ ἐν τῶ Β ἀφαιρέται  
κατὰ σειράν μεταβληθέντων τῶν δαυγῶν σημείων, τῶν  
μὲν καταφατικῶν εἰς ἀποφατικά, τῶν δὲ ἀποφατι-  
κῶν εἰς καταφατικά. καὶ ἔσται δὴ ἡ ἐν τῶ Γ ἐκθεσις  
ἡ τῶν προκειμένων διαφορὰ, ὡς ἐκ τῶν ἀνωτέρω εἰρη-  
μένων δῆλον.

## ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 49. Αἱ μὲν ὁμοειδεῖς γραμματικαὶ ἐκθέσεις ἑτερο-  
γείας ἀφαιρῶνται καὶ συναίπτονται αὐ δὲ ἑτεροειδεῖς, δυ-  
νάμει.

## ΚΕΦ. Δ΄.

Περὶ πολλαπλασιασμῶ τῶν ὀλοκλήρων.  
γραμματικῶν ἐκθέσεων.

## ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 50. Ταῖς δοθείσας ὀλοκλήρας γραμματικὰς ἐκ-  
θέσεις πολλαπλασιάσαι.

(γ) Πίν. II.

Ἔσω πρῶτον ἑκατέρω τῶν δοθεισῶν μονομερῆς, οἷα αὐτὰ ἐν τῷ Δ.

Π Ρ Α Κ Τ Ε Α.

Πρῶτον μὲν πολλαπλασιασθήτω ὁ συμπράκτωρ α διὰ τῶν συμπράκτορες β, τηρηθέντος τῶν λόγων τῶν σημείων, (ψ. 40.) καὶ τῶν τῆς κοινῆς ἀριθμητικῆς κανόνος β'. δεῦτε τὰ γράμματα διὰ τῶν γραμμάτων. καὶ εἰ μὲν εἴ ταῦτα εἰσὶν ἔντε τῆς πολλαπλασιαστέας καὶ τῆς πολλαπλασιαζέσης ἐκθέσει, ὡς τὰ τῶν προκειμένων, προσγραφῆτω τῷ ἐκ τῶν συμπρακτόρων γινομένῳ πάντα ταῦτα ἐν ἑκατέρω τῶν ἐκθέσεων γράμματα, ἐν μετὰ τὸ ἕτερον ἀναλλοίωτα· εἰ δὲ ταῦτα, ὡς ἐν ταῖς ἐν τῷ Ζ ἐκθέσει, προσγραφῆτω τῷ ἐκ τῶν συμπρακτόρων γινομένῳ τὰ ὁποῦντα γράμματα, οἷον τὰ αβ, ἐκθέτας ἔχοντα τὰ τῶν ἐκθετῶν κεφάλαια, οἷον τὸ μὲν α, τὸ 5· τὸ δὲ β, τὸ 2. καὶ ἔσαι δὴ τὸ μὲν ἐκ τῶν ἐν τῷ Δ γινόμενον, τὸ ἐν τῷ Ε· τὸ δὲ ἐκ τῶν ἐν τῷ Ζ, τὸ ἐν τῷ Η. δῆλος δὲ ὁ λόγος ἔκτε τῆς κοινῆς ἀριθμητικῆς, καὶ ἐκ τῶν εἰρημένων ἐν ψ. 40, καὶ ψ. 23.

Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἔσαι τὸ μὲν ἐκ τῶν ἐν τῷ Θ γινόμενον, τὸ ἐν τῷ Ι· τὸ δὲ ἐκ τῶν ἐν τῷ Κ, τὸ ἐν τῷ Λ· τὸ δὲ ἐκ τῶν ἐν τῷ Μ, τὸ ἐν τῷ Ν.

Ἔσω δὲ πολυμερῆς ἑκατέρω τῶν δοθεισῶν ἐκθέσεων, οἷα αὐτὰ ἐν τῷ Ξ.

Π Ρ Α Κ Τ Ε Α.

Α'. Γεγραφέτω ἡ ἑτέρα ὑπὸ τὴν ἑτέραν, ὡς ἐν τῷ Ο, καὶ ἤχθω ὑπὸ αὐταῖς εὐθεία.

Β'. Πολλαπλασιάσον ἕκαστον τῶν τῆς πολλαπλασιαστέας μερῶν δι' ἑκάστη τῶν τῆς πολλαπλασιαζέσης κατὰ τὰ ἀνωτέρω εἰρημένα, (ψ. 36.) ὅσα τῶν γινομένων ὁμοειδῆ εἰσὶ ῥαβδοειδῶς γράψας ἐν ὑπὸ τὸ ἕτερον. καὶ ἔσαι δὴ τὰ μὲν ἐκ τῶν α καὶ ἐνὸς ἑκάστου

μέρες τῆς πολλαπλασιαστέας γινόμενα τὰ ἐν τῷ Π, τὰ δὲ ἐκ τῆ — 3β ἢ τῶν εἰρημένων μερῶν τὰ ἐν τῷ Ρ.

Γ'. Σύναψον τὰ γινόμενα, εὐθεῖαν ὑπ' αὐτὰ ἀγαγών. καὶ ἔσται δὴ τὸ ἐκ τῶν προκειμένων ἐκθέσεων γινόμενον, τὸ ἐν τῷ Σ. ἢ διῶξις ἐκ τῆς πράξεως δῆλη.

Κ Ε Φ. Ε'.

**Περὶ τῆς τῶν ὀλοκλήρων γραμματικῶν ἐκθέσεων διαρέσεως.**

**ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'.**

§ 51. Τὴν ἐν τῷ Τ δοθεῖσαν γραμματικὴν μονομερῆ ὀλοκλήρον ἐκθεσιν διὰ τῆς ἐν τῷ Υ μονομερῆς ὀλοκλήρου καὶ ἑτεροειδῆς διελεῖν.

**ΠΡΑΚΤΕΟΝ.**

Γραφήτωσαν ἢτε διαρετέα καὶ ἢ διαρεῖσα ὡς ἐν τῷ Φ, ἢ ὡς ἐν τῷ Χ ὁραῖται. Τέτων δὲ ἐκάτερον πηλίκον λογιθήσεται τῶν προκειμένων ἐκθέσεων.

**ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.**

§ 52. Τὰς ἑτεροειδεῖς ἐκθέσεις πραγματικῶς διελεῖν ἀμήχανον, σημαίνεται δὲ μόνον ἢ διαίρεσις διττῶς, ὡς ἐν τῷ Φ, καὶ ἐν τῷ Χ ἰδεῖν ἐστίν. ὁμοίως δὲ καὶ τὸ τῶν πολυμερῶν ἑτεροειδῶν ἐκθέσεων πηλίκον, τῶν ἐν τοῖς Ψ καὶ Ω, σημαίνεται διὰ τῆς ἐν τῷ 2Ψ, ἢ διὰ τῆς ἐν τῷ 2Ω ὁρωμένης ἐκθέσεως.

**ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'.**

§ 53. Τὴν ἐν τῷ Α (δ) δοθεῖσαν μονομερῆ ἐκθεσιν διὰ τῆς ἐν τῷ Β μονομερῆς, τῆς ἐκ τῶν αὐτῶν γραμμάτων συγκειμένης διελεῖν.

**ΠΡΑΚΤΕΑ.**

Α'. Διαρέθω ὁ συμπράκτωρ τῆς ἐν τῷ Α διαρετέας διὰ τῆ τῆς διαρέσεως, τῆς ἐν τῷ Β κατὰ τὸν τῆς

τῆς κοινῆς Ἀριθμητικῆς κανόνα. ἢ ἐπεὶ ἐκάτερος τῶν καταφατικός, καταφατικὸν ἄρα ἔσται καὶ τὸ ἐξ αὐτῶν προκύπτον πηλίκον, τετέσι τὸ 4.

Β'. Γεγραφέθω τὰ μὲν τῆς διαιρετέας γράμματα ὡς ἔχει, τὰ δὲ τῆς διαιρέσεως μετὰ ἀποφατικῶν ἐκθετῶν, ὡς ἐν τῷ Γ ὁραῖται.

Γ'. Πολλαπλασιασθήτω τὰ ἐν τῷ Γ γράμματα, (ψ. 50.) καὶ τὸ ἐξ αὐτῶν γινόμενον αβ4 τῷ πηλίκῳ 4 προσγραφθήτω.

Ἔσται δὴ ἐν ἠ ἐν τῷ Δ ἐκθεσις τὸ ζητούμενον πηλίκον.

## ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ σημεῖον  $\div$  τῷ πηλίκῳ προσήκει. (ψ. 43.) τὸ δὲ 4 πηλίκον εἶναι τῆ 12 διαιρεθέντος διὰ τῆ 3 ἐκ τῆς κοινῆς Ἀριθμητικῆς δῆλον. ὅτι δὲ τὸ πηλίκον τῶν Δυναμέων, τετέσι τὸ προκύπτον ἐκ τῆς διαιρέσεως τῶν αὐτῶν γραμμάτων, τῶν διαφορῆς ἔχόντων ἐκθέτας, ἐκθέτην ἔχει ἴσον τῇ διαφορᾷ τῶν ἐκθετῶν τῶν διαιρεμένων Δυναμέων, δέδεικται. (ψ. 27.) ἐκ τούτων ἔν δῆλον, ὅτι τὸ ἐν τῷ Δ ἐστὶ τὸ ζητούμενον πηλίκον.

Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, τὸ μὲν τῶν ἐν τοῖς Ε καὶ Ζ πηλίκον ἐστὶ τὸ ἐν τῷ Η· τὸ δὲ τῶν ἐν τοῖς Θ καὶ Ι, τὸ ἐν τῷ Κ· τὸ δὲ ἐν τοῖς Λ καὶ Μ, τὸ ἐν τῷ Ν.

## ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

ψ. 54. Ἰσέον, ὅτι διὰ τῆς 2 καὶ 3 τῶν εἰρημένων πράξεων ἀφαιρῶνται οἱ τῆς διαιρέσεως ἐκθέτας ἀπὸ τῶν τῆς διαιρετέας, καὶ γράφεται τὰ γράμματα μετὰ ἐκθετῶν, ἴσων τῇ διαφορᾷ.

## ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ΄.

ψ. 55. Τὴν ἐν τῷ Ξ δοθεῖσαν μονομερῆ ἐκθεσιν διὰ τῆς ἐν τῷ Ο μονομερῆς καὶ συγκεκλιμένης ἕκτε τῶν αὐτῶν καὶ ἄλλων γραμμάτων διελεῖν.

Τῶν ἐν τῷ προλαβόντι προβλήματι πραχθέντων, τὸ ἐν τῷ Π προκύψει πηλίκον. ἐπεὶ δὲ τὸ  $\mu = \mu$ , (β. 31.) ἔσεται τὸ ἐν τῷ Π ἴσον τῷ ἐν τῷ Ρ.

### ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ΄.

β. 56. Τὴν ἐν τῷ Σ δοθῆσαν πολυμερῆ ἔκθεσιν διατῆσαι ἐν τῷ Γ πολυμερῆς, καὶ ἐκ τῶν αὐτῶν συγκεμεῖν γραμμάτων, διελῶν.

### ΠΡΑΚΤΕΑ.

Α'. Τετάρθω ἑκατέρω τῶν ἐκθέσεων κατὰ τὸ μέγεθος τῶν ἐν αὐταῖς Δυνάμεων ὅπερ ἐστὶ, πρῶτον μὲν γεγράφθω τὸ τὴν μείζονα ἐμφαῖνον Δύναμιν γράμμα, δεύτερον, δὲ τὸ τὴν τῆς πρώτης τῆ αὐτῆ γραμματος ἐλάσσονα, τρίτον τὸ τὴν τῆς δευτέρας, καὶ τὰ ἐφεξῆς ὁμοίως. ἔσως ἔν ταχθεῖσα ἢ μὲν ἐν τῷ Σ, γίνεται ἢ ἐν τῷ Υ, ἢ δὲ ἐν τῷ Τ, ἢ ἐν τῷ Φ.

Β'. Διαιρεθῆτω διὰ τῆ  $a^2$  τῆ πρώτης μέρους τῆς διαιρέσεως τὸ τῆς διαιρετέας πρῶτον μέρος, τὸ  $a^4$ . (β. 53.) δύο δὲ ἐυθειῶν περιεχουσῶν γωνίαν περὶ τὴν διαιρέσαν Φ ἀχθεισῶν, γεγράφθω ὑπὸ τὴν ἑτέραν τὸ προκύψαν πηλίκον  $a^2$ .

Γ'. Πολλαπλασιασθῆτω τὸ ἐυρεθὲν πηλίκον  $a^2$  δι' ἑκάστη τῶν τῆς διαιρέσεως μερῶν. καὶ ἕκαστον τῶν γινομένων ἀπὸ ἑκάστη μέρους τῆς διαιρετέας ἀφαιρεθῶ γραφὲν ὡς ἐν τῷ Χ ὁραταί.

Δ'. Γεγράφθω τὸ λοιπὸν σὺν ἅπασιν τοῖς μέρει τῆς διαιρετέας, ἀφ' ὧν ἐδὲν ἀφῆρηται, κατὰ σειράν ὡς ἐν τῷ Ψ. καὶ διηρηθῶ πάλιν τὸ πρῶτον τῆ λοιπῆ μέρος —  $2a^3\beta$  διὰ τῆ πρώτης μέρους  $a$  τῆς διαιρέσεως καὶ τὸ ἐυρεθὲν πηλίκον —  $2a\beta$  κατὰ σειράν μετὰ τὸ  $a^2$

γρα-

ΚΕΦ. 5'. ΠΕΡΙ ΠΡΟΣΘ. ΑΦΑΙΡ. ΠΟΛΛ. ἢ ΔΙΑΙΡ. 27

γραφῖν, πολλαπλασιασθήτω δι' ἐκάστη τῶν τῆς διαίρεσης μερῶν· ἀφηρέθω δὲ καθάπερ καὶ πρότερον τὰ γινόμενα, τὰ ἐν τῷ Ω ἀπὸ τῶν ἐν τῷ Ψ· τὰ δὲ καταλειφθέντα σὺν τοῖς ἄλλοις μέρεσιν ἅπασι κατὰ σειράν γραφήτω, ὡς ἐν τῷ C.

Ε'. Τὰ αὐτὰ δὲ γιγνέθω ἕως ἕ ἢτοι ἕδὲν καταλειφθῆ, ὡς ἐπὶ τῶν προκειμένων ἐκθέσεων, τῶν ἐν τῷ D, ἢ μέρος τὶ ἀδιαίρετον.

Ἔσται δὲ ἐν τῷ e τὸ ζητούμενον πηλίκον, ὡς ἐξ αὐτῆς τῆς πράξεως καὶ τῶν τῆς κοινῆς ἀριθμητικῆς κανόνων δῆλον.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 57. Τὸ μετὰ τὴν διαίρεσιν ἐκθέσας τινος, οἷον τῆς ἐν τῷ F διὰ τῆς ἐν τῷ G, καταλειφθὲν ἀδιαίρετον μέρος  $\gamma^2$  τῷ πηλίκῳ προσγράφεται, ὡς ἐν τῷ L, ἢ ἐν τῷ Q ὁράται.

Κ Ε Φ'. 5'.

Περὶ προσθέσεως, ἀφαιρέσεως, πολλαπλασιασμοῦ, ἢ διαίρεσεως τῶν κεκλασμένων γραμματικῶν ἐκθέσεων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'.

§. 58. Τῶν δοθεισῶν κεκλασμένων ἐκθέσεων εὐρεῖν τὸ κεφάλαιον.

ΠΡΑΚΤΕΟΝ.

Ἐὰν μὲν αἱ δοθεῖσαι ἐκθέσεις τῆς αὐτῆς ἔχωσιν ὀνομασίας, ὡσπερ αἱ ἐν τῷ A, (ε) συναψόν τῆς ἀριθμητῆς, (§. 44, 45.) ἢ ὑπὸ τὸ κεφάλαιον, εὐθείας ἀχθείσης, τὸν κοινὸν ὀνομασθῆν γράψον. ἔσται δὲ ἐν τῷ ζητούμενον κεφάλαιον τὸ ἐν τῷ B, ὁμοίως τὸ τῶν ἐν τῷ Γ, τὸ ἐν τῷ Δ. Ἐάν

(ε) Πλ. IV.



Ἐάν δὲ μὴ τὲς αὐτὲς ἔχωσιν ὀνομασίας αἰ ἐκθέσεως, ὡς αἰ ἐν τῷ Ε, μεταβεβλήθησαν εἰς ἄλλας ἴσας αὐταῖς, ἢ ἐχέσας τὲς αὐτὲς ὀνομασίας, (τὸ γίνεταί τῶ ὀνομαστῶ ἐκατέρως διὰ τῶ ἀριθμητῶ ἢ ὀνομαστῶ τῆς ἐτέρας πολλαπλασιαθέντος, ὡς καὶ ἐν τῇ κοινῇ ἀριθμητικῇ.) οἷαί εἰσιν αἰ ἐν τῷ Ζ. ἢ ὑπὸ τὸ κεφάλαιον τῶν ἀριθμητῶν ὁ κοινὸς γεγραφθῶ ὀνομαστής. καὶ ἔσται δὴ τὸ κεφάλαιον τῶν ἐν τῷ Ε, τὸ ἐν τῷ Η, ὁμοίως τῶν ἐν τῷ Θ, τὸ ἐν τῷ Ι.

### ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄.

§. 59. Τῶν δοθεισῶν κεκλασμένων ἐκθέσεων τὴν διαφορὰν εὐρεῖν.

### ΠΡΑΚΤΕΟΝ.

Ἐάν μὲν αἰ δοθεῖσαι ἐκθέσεις τὲς αὐτὲς ἔχωσιν ὀνομασίας, ὡς καὶ αἰ ἐν τῷ Κ, ἀφηρέθω ὁ ἀριθμητῆς τῆς ἐτέρας, τῆς ἀφαιρέσεως, ἀπὸ τῶ ἀριθμητῶ τῆς ἐτέρας, καὶ ὑπὸ τὸ λοιπὸν, εὐθείας ἀχθείσης, ὁ κοινὸς γεγραφθῶ ὀνομαστής. καὶ ἔσται δὴ ἡ ζητημένη διαφορὰ ἢ ἐν τῷ Λ. ὁμοίως τῶν ἐν τῷ Μ ἢ διαφορὰ, ἢ ἐν τῷ Ν. Ἐάν δὲ μὴ τὲς αὐτὲς ἔχωσιν ὀνομασίας, ὡς καὶ αἰ ἐν τῷ Ξ, μεταβεβλήθησαν εἰς τὰς ἐν τῷ Ο τὰς τὲς αὐτὲς ἐχέσας ὀνομασίας, καθάπερ ἀνωτέρω (§. 58.) εἴρηται. Ἔθ' ἔτω τῆς ἀφαιρέσεως γινομένης, ὡς καὶ ἀπὸ τῶν τὲς αὐτὲς ἐχουσῶν ὀνομασίας, ἢ ἐν τῷ Π ἔσται ἡ ζητημένη διαφορὰ. ὁμοίως τῶν ἐν τῷ Ρ ἢ ἐν τῷ Σ.

### ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ΄.

§. 60. Τὰς ἐν τῷ Λ (Ζ) δοθείσας κεκλασμένας ἐκθέσεις πολλαπλασιάσαι.

ΠΡΑΚ.

(2) Πιν. V.

Ε.Υ.Δ. Τ.Ε.Κ.Τ.Π.  
ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

Π Ρ Α Κ Τ Ε Ο Ν .

Πολλαπλασιαθήτωσαν οἱ ἀριθμηταὶ αὐτῶν, ἢ ὑπὸ τὸ γινόμενον, εὐθείας ἀχθείσης, γεγράφθω τὸ γινόμενον ἐκ τῶν ὀνομασῶν. ἔσται δὲ ἐν τῷ ζητούμενον γινόμενον τὸ ἐν τῷ Β. ὁμοίως δὲ τὸ ἐκ τῶν ἐν τῷ Γ ἐκθέσεων τὸ ἐν τῷ Δ.

Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α Δ'.

§. 61. Τὴν ἐν τῷ Ε δοθεῖσαν κεκλασμένην ἐκθεσιν διαίτης ἐν τῷ Ζ διελθῖν.

Π Ρ Α Κ Τ Ε Ο Ν .

Λεγράφθω ἡ ἐν τῷ Ζ διαρῆσα, τετέστιν ὁ μὴ ὀνομασῆς αὐτῆς ἀριθμητῆς γυγνέθω, ὁ δὲ ἀριθμητῆς ὀνομασῆς, ὡς ἡ ἐν τῷ Η ὀρωμένη. ἢ πολλαπλασιαθήτω ἡ ἐν τῷ Η διὰ τῆς ἐν τῷ Ε διαρῆτέας. ἔσται δὲ τὸ ἐξ αὐτῶν γινόμενον, τὸ ἐν τῷ Θ, τὸ ζητούμενον πηλίκον. ὡσαύτως τῆς ἐν τῷ Ι ἐκθέσεως διὰ τῆς ἐν τῷ Κ διαρῆθείσης, τὸ πηλίκον ἐστὶ τὸ ἐν τῷ Λ.

Σ Η Μ Β Ι Ω Σ Ι Σ .

§. 62. Ἰστέον ὅτι αἱ τῶν εἰρημένων πράξεων ἀποδείξεις αἱ αὐταὶ εἰσι ταῖς τῶν ἀριθμητικῶν κλασμάτων.

Κ Ε Φ . Ζ' .

Περὶ προσθέσεως, ἀφαιρέσεως, πολλαπλασιασμῶ, ἢ διαρῆσεως τῶν ῥιζῶν.

Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α Α' .

§. 63. Τῶν ἐν τῷ Μ δοθεισῶν ἑτεροειδῶν ῥιζῶν εὐρεῖν τὸ κεφάλαιον.

Π Ρ Α Κ Τ Ε Ο Ν .

Ἡ ἑτέρα μετὰ τὴν ἑτέραν κατὰ σειράν γεγράφθω, ὡς ἐν τῷ Ν κείνται. καὶ ἔσται δὲ τὸ ἐν τῷ Ν ὀρωμένον τὸ ζητούμενον κεφάλαιον.

## ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α΄.

Ἰστέον δὲ, ὅτι τινὲς τῶν ριζῶν ἑτεροειδῆς δοκῶσι, καίπερ ὁμοειδῆς ἔσται. τοιαῦται δὲ εἰσιν αἱ ἐν τῷ Ξ καὶ Ο ὁρώμεναι. ἔστι δὲ ἡ μὲν ἐν τῷ Ξ ἴση τῇ ἐν τῷ Π. ἐπεὶ δὲ τὸ  $16α^4$  τετράγωνόν ἐστιν, ἔτινος ρίζα τὸ  $4α^2$ , τὸ ἄρα τὴν ἐκθεσιν ἀρρήτων ποιῶν ἐκ ἑσὶ τὸ  $16α^4$ , ἀλλὰ τὸ  $2α$ , ἔτινος ἡ ρίζα ἀρρήτης. γραφείσης ἔν τῆς  $4α^2$  ρίζης ἐκτὸς τῆς τῆς ρίζης σημείω ἐν τῷ τῆς ἐκτὸς συμπράκτορος τόπων, μεταβληθήσεται ἡ ἐν τῷ Ξ ρίζα εἰς τὴν ἐν τῷ Γ. πάλιν ἡ ἐν τῷ Ο ἴση τῇ ἐν τῷ Σ. ἔστι δὲ ὁ 4 τετράγωνον, ἔτινος ἡ ρίζα ὁ 2. τοιγαρῶν ἡ ἐν τῷ Ο ἴση τῇ ἐν τῷ Γ. ἐκὲν αἱ ἐν τοῖς Ξ καὶ Ο δοκῶσαι ἑτεροειδῆς πρότερον, εἰς τὰς ἐν τοῖς Ρ καὶ Τ μεταβληθεῖσαι, ὁμοειδῆς γεγόνασιν. (β. 38.) ὁμοίως δὲ αἱ ἐν τοῖς Υ καὶ Φ ἑτεροειδῆς δοκῶσιν. ἐπεὶ δὲ ἡ μὲν ἐν τῷ Υ ἴση τῇ ἐν τῷ Χ, ἡ δὲ ἐν τῷ Φ τῇ ἐν τῷ Ψ, ἢ τῇ ἐν τῷ Ω, δῆλον ἄρα ὅτι ὁμοειδῆς εἰσὶν αἱ ἐν τοῖς Υ καὶ Φ.

## ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β΄.

β. 64. Τὰς δοκῶσας ἔν ἑτεροειδῆς ρίζας διὰ τὰς διαφορὰς τῶν γραμμάτων ἐκθέσεις, καὶ τὰς ἐκτὸς τῆς σημείω συμπράκτορας, πολυπραγμονητέον πρὶν ἢ ἑτεροειδῆς εἶναι ἀποφύνασθαι. ταῦτέστιν εὐρετέον τὸ ἀρρήτων τὴν ἐκθεσιν ποιῶν. τῆτο δὲ γίνεται, ἀναλυομένων τῶν γραμμάτων καὶ τῶν συμπράκτόρων αὐτῶν εἰς τὰς πολλαπλασιασὰς, ὧν γινόμενόν ἐστιν ἡ προκειμένη ὑπὸ τὸ τῆς ρίζης σημείον ἐκθέσις. καὶ εἰάν μὲν τετραγωνική ἡ ρίζα ἢ, τετράγωνον ἐν τῇ ἐκθέσει εὐρετέον, ὅπερ δὲ ἄλλων πολλαπλασιασθὲν τὴν προκειμένην πεποίηκεν ἐκθεσιν· εἰάν δὲ κυβική, κύβον, καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων ριζῶν ὁμοίως. ἔτως ἔν ἀναλυθείσης τῆς ἐκθέσεως εἰς τὰς ἑαυτῆς πολλαπλασιασὰς, ἐξάγεται ἡ ρίζα τῆς ἐν

ἐν τῇ ἐκθέσει εὐρεθείσης Δυνάμεως, ἢ ἐκτὸς τῆς ση-  
μείου γράφεται, ὡς ἐν τῷ ὑποδείγματι τῆς προλα-  
βῆσης σημειώσεως. ὁ δὲ ἕτερος πολλαπλασιαστῆς, δι' ἃ  
ἢ εὐρεθεῖσα Δύναμις πολλαπλασιαζομένη τὴν ἐκθεσιν  
ἐποίει, ἐκείνός ἐστιν ὁ τὴν ἐκθεσιν ἀρρήτον ποιῶν. διὸ  
καὶ ὑπὸ τὸ σημεῖον τῆς ρίζης γράφεται.

**ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'.**

§. 65. Τῶν ἐν τῷ C δοθεισῶν ὁμοειδῶν ριζῶν τὸ κε-  
φαλαίον εὐρεῖν.

**ΠΡΑΚΤΕΟΝ.**

Τῆς ἐκτὸς τῶν σημείων τῆς ρίζης συμπράκτορας  
συνάψας κατὰ τῆς τῆς προθέσεως κανόνας, καὶ τὸ  
κεφαλαίον αὐτῶν τὴν μίαν τῶν ριζῶν, ὡς ἔχει, προσ-  
γράψας, εὐρήσεις τὸ τῶν προκειμένων ριζῶν κεφαλαίον  
ἴσον τῷ ἐν τῷ D ὀρωμένῳ. ὁμοίως τὸ μὲν τῶν ἐν τῷ  
E ἐστὶ τὸ ἐν τῷ G· τὸ δὲ τῶν ἐν τῷ L, τὸ ἐν τῷ M·  
τὸ δὲ τῶν ἐν τῷ N καὶ Q, τὸ ἐν τῷ R.

**ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'.**

§. 66. Ἀπὸ τῆς ἐν τῷ A (η) δοθείσης ρίζης τὴν  
ἐν τῷ B ἑτεροειδῆ ἀφελῆν

**ΠΡΑΚΤΕΟΝ.**

Μεταβεβλήθω τὸ σημεῖον τῆς συμπράκτορος τῆς  
ἀφαιρέσεως εἰς ἀποφατικόν, εἰ καταφατικόν ἐστίν, ἢ  
εἰς καταφατικόν εἰάν ἀποφατικόν ᾖ, καὶ κατὰ σει-  
ρὰν γεγραφέωσαν αἱ δοθεῖσαι ρίζαι, ὡς αἱ ἐν τῷ Γ.  
αὗτινες ἢ ζητούμενη διαφορὰ εἰσι.

**ΣΗΜΒΙΩΣΙΣ.**

§. 67. Σημαίνεται μὲν ἢ τῶν ἑτεροειδῶν ριζῶν ἀφαι-  
ρέσις, πραγματικῶς δὲ ἢ γίνεται, ὡσαύτως ὁ πολλα-  
πλασιασμός καὶ ἢ διαίρεσις.

**ΠΡΟ:**

## ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ΄.

§. 68. Ἀπὸ τῆς ἐν τῷ Δ δοθείσης ρίζης τὴν ἐν τῷ Ε ὁμοειδῆ ἀφελεῖν.

## ΠΡΑΚΤΕΟΝ.

Ἀφηρέθω ὁ τῆς ἐν τῷ Ε ἀφαιρετέας συμπράκτωρ ἀπὸ τῆς ἐν τῷ Δ, καὶ τῷ λοιπῷ προσγεγραφθῶ ἢ ἑτέρας τῶν ριζῶν, ὡς ἔχει. ἔσται δὲ ἢ τῶν προκειμένων ριζῶν διαφορά ἢ ἐν τῷ Ζ. ὁμοίως ἢ διαφορά τῶν ἐν τοῖς Η καὶ Θ εἶν ἢ ἐν τῷ Ι.

## ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε΄.

§. 69. Τὴν ἐν τῷ Κ δοθεῖσαν ρίζαν διὰ τῆς ἐν τῷ Λ πολλαπλασιάσαι.

## ΠΡΑΚΤΕΟΝ.

Ἡ ἑτέρα μετὰ τὴν ἑτέραν κατὰ σειράν γραφθήτω, καὶ μεταξὺ αὐτῶν τὸ τῆ πολλαπλασιασμῶ θείθω σημεῖον, ὡς ἐν τῷ Μ ὁράται. τῆτο δὲ εἶσι τὸ ἐξ αὐτῶν γινόμενων.

## ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α΄.

§. 70. Ἰστέον, ὅτι ἐν τῷ πολλαπλασιασμῷ, καὶ τῆ διαιρέσει αἱ τῆς αὐτῆς ὀνομασίας ἔχουσαι ρίζαι ὡς ὁμοειδεῖς ἐκλαμβάνονται, καὶ ἀλλήλων κατὰ τὰ ἄλλα διαφέρωσι.

## ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β΄.

§. 71. Καὶ τῆτο δὲ εἰδέναι δεῖ, ὡς αἱ μὴ τῆς αὐτῆς ὀνομασίας ἔχουσαι ρίζαι, οἷον αἱ ἐν τοῖς Ν καὶ Ξ, (διὰ τῶν Α καὶ Β σοιχείων ἢ ὁποιαδήποτε ἐμφαινέθω γραμματικῆ ἐκθεσις.) εἰς ἑτέρας τῆς αὐτῆς ὀνομασίας ἐχέουσαι μεταβάλλονται ἕτως· ἐπεὶ ἢ μὲν  $\sqrt{A} = A^{\frac{1}{2}}$  ἢ δὲ  $\sqrt[3]{B} = B^{\frac{1}{3}}$ , (§. 33.) τῶν  $\frac{1}{2}$  καὶ  $\frac{1}{3}$  εἰς τὰ  $\frac{3}{6}$  καὶ  $\frac{2}{6}$ ,

ΚΕΦ. Ζ'. ΠΕΡΙ ΠΡΟΣΘ. ΑΦΑΙΡ. ΠΟΛΛ. ἢ ΔΙΑΙΡ. 33

$\frac{2}{6}$ , τὰ τὲς αὐτὲς ὀνομασὰς ἔχοντα, μεταβληθέντων, ἔσεται τὸ μὲν  $A^{\frac{1}{2}} = A^{\frac{3}{6}}$ , τὸ δὲ  $B^{\frac{1}{3}} = B^{\frac{2}{6}}$ . ἀλλὰ τὸ μὲν  $A^{\frac{3}{6}} = \sqrt[6]{A^3}$ , τὸ δὲ  $B^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{B^2}$ . ἄρα ἢ μὲν  $\sqrt{A} = \sqrt[6]{A^3}$ , ἢ δὲ  $\sqrt[3]{B} = \sqrt[6]{B^2}$ . ἔκῃν αἰ  $\sqrt{A}$  καὶ  $\sqrt[3]{B}$ , αἰ μὴ τὲς αὐτὲς ὀνομασὰς ἔχουσαι εἰς τὰς  $\sqrt[6]{A^3}$  ἢ  $\sqrt[6]{B^2}$  μεταβλήθησαν, τὰς ἴσας αὐταῖς, ἢ τὲς αὐτὲς ὀνομασὰς ἔχουσαι.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

§. 72. Τὰς ὁποιασῶν ἄρα ρίζας ὡς ὁμοειδῆς πολλαπλασιάζειν ἢ διαιρεῖν ἔξεσι. καὶν γὰρ μὴ τὲς αὐτὲς ἔχουσαι ὀνομασὰς, εἰς ἑτέρας μεταβάλλονται τὲς αὐτὲς ὀνομασὰς ἔχουσαι.

Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α 5'.

§. 73. Τὴν ἐν τῷ Ο δοθεῖσαν ρίζαν διὰ τῆς ἐν τῷ Π πολλαπλασιάσαι.

Π Ρ Α Κ Τ Ε Ο Ν.

Πολλαπλασιασθήτωσαν οἱ ἐκτὸς τῶν ριζῶν συμπερακτορες, καὶ τῷ ἐξ αὐτῶν γινομένῳ προσγεγραφέτω τὸ γινόμενον ἐκ τῶν ἐντὸς τῶν ριζῶν ἐκθέσεων σὺν τῷ τῆς ρίζης σημείῳ. ἔσται δὴ ἐν τῷ μὲν ἐκ τῶν ἐν τοῖς Ο ἢ Π, τὸ ἐν τῷ Γ· τὸ δὲ ἐκ τῶν ἐν τοῖς Σ καὶ Τ, τὸ ἐν τῷ Υ· τὸ δὲ ἐκ τῶν ἐν τοῖς Φ καὶ Χ γινόμενον, τὸ ἐν τῷ Ψ.

Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α 7'.

§. 74. Τὴν ἐν τῷ Ω δοθεῖσαν ρίζαν διὰ τῆς ἐν τῷ C διελεῖν.

## ΠΡΑΚΤΕΟΝ.

Διαιρεθήτω ὁ συμπράκτωρ τῆς ἐν τῷ Ω διαιρέσεως, διὰ τῆς τῆς ἐν τῷ C διαιρέσεως καὶ τῷ πηλίκῳ προσγεγράφῃ τὸ ἐκ τῆς διαιρέσεως τῶν ἐντὸς τῶν ῥιζῶν ἐκθέσεων προκύψαν πηλίκον μετὰ τῆς τῆς ῥίζης σημείου, ἢ ἔσται δὴ τὸ ζητούμενον πηλίκον τὸ ἐν τῷ D ὁμοίως τὸ ἐκ τῶν E καὶ G, τὸ ἐν τῷ M.

## Κ Ε Φ. Η΄.

Περὶ προθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως, πολλαπλασιασμῶ καὶ διαιρέσεως τῶν ὀλοκλήρων ἐκθέσεων διὰ τῶν κεκλασμένων, καὶ τῶν ῥιζῶν.

## ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄.

§. 75. Τὴν ἐν τῷ Α (9) δοθεῖσαν ὀλόκληρον ἐκθεσιν τῆ ἐν τῷ Β ἐπισυναΐψαι κεκλασμένην.

## ΠΡΑΚΤΕΟΝ.

Ἐυθείας ὑπὸ τὴν ὀλόκληρον ἀχθείσης, ἢ μονὰς γεγράφῃ ὑπὲρ αὐτήν. ὡς ἔν κεκλασμένη τῆ ὀλοκλήρῳ λογιθείσῃ ἐπισυνήφῃ ἢ ἐν τῷ Β κεκλασμένη. (§. 58.) ἔσται δὴ ἔν τὸ ζητούμενον κεφάλαιον τὸ ἐν τῷ Γ.

Τῶν αὐτῶν δὴ πραχθέντων, ἀφαιρεθήσεται μὲν ἢ ἐν τῷ Δ ἀπὸ τῆς ἐν τῷ Ε, καὶ ἢ διαφορά αὐτῶν ἴση ἔσται τῆ ἐν τῷ Ζ. (§. 59.) πολλαπλασιασθήσεται δὲ ἢ ἐν τῷ Η διὰ τῆς ἐν τῷ Θ, καὶ τὸ ἐξ αὐτῶν γινόμενον ἔσται τὸ ἐν τῷ Ι. (§. 60.) διαιρεθήσεται δὲ ἢ ἐν τῷ Κ διὰ τῆς ἐν τῷ Λ, καὶ τὸ ἐξ αὐτῶν προκύψαν πηλίκον ἔσται (§. 61.) τὸ ἐν τῷ Μ.

ΠΡΟΒ.