ἐξίσωσις. ἐπιζευχθείσης γὰρ τῆς ΚΓ, τὸ $\overline{\text{ΚΓ}}^2 = \overline{\text{ΚΕ}}^2 + \overline{\text{ΕΓ}}^2$. ἐξ ὃ ἡ κατὰ τὸ Κ ἐξίσωσις γίνεται· ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ Ϛ, καὶ τῶν ἴσων ἀφαιρεθέντων τῶν ἐν τῇ κατὰ τὸ ρ ἐξισώσει, ἡ κατὰ τὸ L, ἐξ ἧς ἡ ἀναλογία αὕτη· ὡς $3\beta - \chi : \alpha :: y : \chi$. ἔστι δὲ ὡς $\beta : y :: y : \chi$. ἄρα καὶ ὡς $3\beta - \chi : \alpha :: \beta : y$. ἐκ τῆς ἀναλογίας δὲ ταύτης ἡ κατὰ τὸ Μ ἐξίσωσις συνίσταται, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ Ν, ἡ αὐτὴ ἔσα τῇ κατὰ τὸ σ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 323. Καὶ ταῦτα μὲν δὴ περὶ τῶν διὰ τῆς εἰδικῆς ἀριθμητικῆς ἐπιλυομένων προβλημάτων ἅλις. ἐξασκεῖν δὲ δεῖ ὅτι μάλιστα ἑαυτὸς ἐν τῇ τῶν προβλημάτων ἐπιλύσει. ὁ μὲν γὰρ τὴν τῦ ἐπιλύειν πᾶν τὸ προτεθὲν πρόβλημα ἕξιν κτησάμενος, τῆς ἀναλυτικῆς ἐπιστήμης ἐγκρατὴς ἐγένετο· ὁ δὲ ταύτης ἀποτυχὼν, τῶν ἑαυτῆς μόνον ἥψατο κρασπέδων.

ΚΕΦ. ΚϚ΄.

Περὶ τῶν καμπύλας ἐμφαινυσῶν ἐξισώσεων, ὧν τινὲς ὑπερβατικαὶ καλῦνται.

ΟΡΙΣΜΟΙ.

§. 324. Α΄. Ἐὰν εὐθεῖα ἡ ΑΓ (ι) πρὸς ὀρθὰς ςαθῇ εὐθείᾳ τῇ ΒΔ, ἀπὸ δὲ τῦ πέρατος αὐτῆς Γ ἀχθῶσιν εὐθεῖαι ὁσαιδηποτῦν, αἱ ΓΜ, ΓΜ, τὴν ΒΔ κατὰ τὰ Ψ, Ψ σημεῖα τέμνυσαι, ληφθῇ δὲ ἑκατέρα τῶν ΜΨ ἴση τῇ ΑΕ, ἡ μὲν διὰ τῶν σημείων Μ, Α, Μ διῖῦσα καμπύλη, **Κογχοειδὴς** λέγεται, (κ) ἡ δὲ ΒΔ εὐθεῖα **Κανὼν**, τὸ δὲ σημεῖον Γ **πόλος**.

(ι) Πίν. XXXIX. σχ. 2.

(κ) Εὑρετὴς αὐτῆς ὁ Νικομήδης, ὁ τῷ Ἐρατοσθένει συνακμάσας, τῷ κατὰ τὸ 194. ἔτ. πρὸ Χριςῦ τελευτήσαντι. ὅρα δὲ τὸν Εὐτόκ. εἰς τὸ 2. βιβλ. τῦ Ἀρχιμ. περὶ Σφαίρ. καὶ Κυλίνδ. σελ. 22. ἐν ᾧ καὶ ἡ δι' ὀργάνυ τῆς Κογχοειδῦς γραφή.

§. 325. Β΄. Ἐὰν ἀπὸ μὲν τοῦ ἑτέρου τῶν περάτων τῆς τοῦ ἡμικυκλίου ΑΟΒ (χ. 3.) Διαμέτρου ἀχθῇ πρὸς ὀρθὰς αὐτῇ ἡ ΒΓ· ἀπὸ δὲ τοῦ ἑτέρου, τοῦ Α, εὐθεῖαι ὁσαιδηποτοῦν, αἱ ΑΗ, ΑΓ, τὸ μὲν ἡμικύκλιον τέμνουσαι, τῇ δὲ ΒΓ συμβάλλουσαι· ληφθῇ δὲ τῇ μὲν ΗΙ, τῇ ἀπὸ τῆς περιφερείας κ. τῆς εὐθείας ΒΓ ἀπολαμβανομένῃ, ἴση ἡ ΑΜ, τῇ δὲ ΑΝ χορδῇ, ἡ ΛΓ, ἡ διὰ τῶν Μ κ. Λ σημείων διϊοῦσα καμπύλη **Κισσοειδὴς** λέγεται (λ).

§. 326. Γ΄. Ἐὰν τὸ τῆς κύκλου περιφερείας τεταρτημόριον ΑΒ (χ. 4.) εἰς ὁποσαδηποτοῦν ἴσα μέρη τμηθῇ, τὰ ΑΝ, Νν, νν, νΒ, εἰς τοσαῦτα δὲ κ. ἡ ΑΓ ἡμιδιάμετρος τὰ ΑΠ, Ππ, ππ, πΓ· ἐπιζευχθεισῶν δὲ τῶν ἡμιδιαμέτρων ΓΝ, Γν, Γν, ἀχθῶσιν αἱ ΠΜ, πμ, πμ τῇ ΓΒ παράλληλοι, ἡ τὰ σημεῖα Λ, Μ, μ, μ ἐπιζευγνῦσα γραμμὴ, **Τετραγωνίζουσα** καλεῖται. (μ)

§. 327. Δ΄. Ἐὰν ἡ τοῦ κύκλου ΑΠπΑ περιφέρεια (χ. 5.) εἰς ὁσαδήποτε ἴσα μέρη τμηθῇ, εἰς τοσαῦτα δὲ καὶ ἡ ἡμιδιάμετρος ΓΑ, ἀχθεισῶν δὲ τῶν Διαμέτρων ΠΠ, ππ, κτ, ληφθῇ ἡ μὲν ΓΜ ἴση ἑνὶ τῶν εἰρημένων τῆς ἡμιδιαμέτρου μερῶν, ἡ δὲ Γμ = 2, ἡ δὲ Γμ = 3, ἡ δὲ Γμ = 4, καὶ οὕτως ἐφεξῆς, ἡ τὰ Μ, μ, μ, κτ σημεῖα ἐπιζευγνῦσα γραμμὴ **Σπεῖρα** λέγεται, ἢ **Ἕλιξ ἀρχιμήδιος**. (*)

ΣΗ.

(λ) Εὑρετὴς αὐτῆς ὁ Διοκλῆς, ὁ πρὸ τοῦ ε. αἰῶνος πρὸ Χριστοῦ ἀκμάσας. ὅρα δὲ τὰ περὶ τῆς Κισσοειδ. ἐν σελ. 26. τοῦ ἐν τῇ προλ. σημ. ἀριθμ. βιβλ.

(μ) Ὁ Δεινόστρατος, ὁ τῷ Πλάτωνι συνακμάσας, εὑρετὴς αὐτῆς.

(*) Ὁ περίπυστος Ἀρχιμήδης, ὁ βιβλίον ὅλον περὶ ἑλίκων συνταξάμενος, εὑρετὴς αὐτῆς ἐστιν. ἀνῃρέθη δὲ ἔτει ὑπὸ στρατιώτου ἐν τῇ ὑπὸ τῶν Ῥωμαίων τῆς Σικελίας αἰχμαλωσίᾳ, ἔτ. πρὸ Χριστοῦ 212.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 328. Αὕτη μὲν πρώτη Σπεῖρα, κύκλυ δὲ γραφέντος, ἡμιδιάμετρον ἔχοντος διπλασίαν τῆς ΓΛ, δευτέρα γραφθήσεται· καὶ πάλιν κύκλυ γραφέντος ἡμιδιάμετρον ἔχοντος τριπλασίαν τῆς ΓΛ, τρίτη γραφθήσεται, ὁμοίως καὶ τετάρτη, καὶ πέμπτη, καὶ ἄλλαι ὅσας ἄν τις ἐπιτάξῃ.

§. 329. Ε'. Ἐὰν κύκλος ὁ δαβ (χ. 6.) ἐπὶ τῆς ΑΓ εὐθείας περιενεχθῇ, τὸ ἐν τῇ περιφερείᾳ αὐτῦ σημεῖον, ἔσω τὸ α, καμπύλην γράψει τὴν ΛΒΓ, Κυκλοειδῆ καλυμένην.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 330. Ὅλη μὲν ἄρα ἡ περιφέρεια τῦ κύκλυ ἴση τῇ ΑΓ εὐθείᾳ· ἡ δὲ ἡμίσεια ἴση τῇ τῆς εὐθείας ἡμισείᾳ, ἤτοι τῇ ΑΔ, καὶ τὸ τόξον αδ τῇ Αδ εὐθείᾳ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'.

§. 331. Τὴν Κογχοειδῆ ἐμφαίνυσαν ἐξίσωσιν εὑρεῖν.

Ἤχθω ἀπὸ τῦ Μ ἡ μὲν ΜΠ τῇ ΒΔ, ἡ δὲ ΜΡ τῇ ΑΓ παράλληλος. καὶ ἔστω ἡ μὲν $\Psi M = AE = \alpha$, (§. 324.) ἡ δὲ $E\Gamma = \beta$, ἡ δὲ $MP = E\Pi = \chi$, ἡ δὲ $EP = \Pi M = y$. ὀκῦν ἔσαι ἡ $\Gamma\Pi = \beta + \chi$. καὶ ἐπεὶ ὡς $\Pi E : M\Psi :: E\Gamma : \Gamma\Psi$, (διὰ τὴν τῶν ΠΓΜ, ΕΓΨ τριγώνων ὁμοιότητα) ἤτοι ὡς $\chi : \alpha :: \beta : \Gamma\Psi$, ἔσεται ἡ $\Gamma\Psi = \frac{\alpha\beta}{\chi}$. διὸ ἡ $\Gamma M = \alpha + \frac{\alpha\beta}{\chi} = \frac{\alpha\chi + \alpha\beta}{\chi}$. ἔστι δὲ $\overline{\Gamma M}^2 = \overline{\Gamma\Pi}^2 + \overline{\Pi M}^2$. διὸ δὴ ἡ κατὰ τὸ Q (ν) ἐξίσωσις γίνεται, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ R, ἥτις Κογχοειδῆ ἐμφαίνει καμπύλην.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'.

§. 332. Τὴν ἐξίσωσιν εὑρεῖν, τὴν Κισσοειδῆ ἐμφαίνυσαν.

(ν) Πιν. XXXVI.

Ἔςω ἡ μὲν τȣ̃ κύκλȣ Διάμετρος (ξ) ΑΒ $=\alpha$, ἡ δὲ ἀποτετμημένη ΑΠ $=\chi$, ἡ δὲ τεταγμένη ΠΜ $=y$. ἀπὸ δὲ τȣ̃ κέντρȣ Ζ καὶ τȣ̃ σημείȣ Ι ἤχθωσαν αἱ ΖΟ, ΙΚ τῇ ΠΜ παράλληλοι. καὶ ἐπεὶ ὡς ΑΠ : ΚΒ :: ΑΜ : ΙΗ, (διὰ τὴν τῶν τριγώνων ΑΗΒ, ΑΜΠ ὁμοιότητα) ἔςι δὲ ἡ ΑΜ = ΙΗ, (§. 325.) ἄρα καὶ ἡ ΑΠ = ΚΒ $=\chi$. διὸ καὶ ἡ ΑΚ = ΒΠ $=\alpha-\chi$. ἐπεὶ δὲ ὡς ΑΚ : ΚΙ :: ΚΙ : ΚΒ, ἤτοι ὡς $\alpha-\chi$: ΚΙ :: ΚΙ : χ, ἔσεται ἡ ΚΙ $=\sqrt{\alpha\chi-\chi^2}$. πάλιν ἐπεὶ ὡς ΑΚ : ΚΙ :: ΑΠ : ΠΜ, ἔσεται καὶ ὡς $\overline{\text{ΑΚ}}^2 : \overline{\text{ΚΙ}}^2 :: \overline{\text{ΑΠ}}^2 : \overline{\text{ΠΜ}}^2$, ἤτοι ὡς $\alpha^2-2\alpha\chi+\chi^2 : \alpha\chi-\chi^2 :: \chi^2 : y^2$. ἐκ ταύτης δὲ τῆς ἀναλογίας ἡ κατὰ τὸ ϛ (ο) ἐξίσωσις γίνεται, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ V, Κισσοειδῆ ἐμφαίνȣσα, ἧς ὁ γεννήτωρ κύκλος ἴσην τῷ α διάμετρον ἔχει.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 333. Ἐν τῇ ἐξισώσει ἄρα, τῇ τὴν Κισσοειδῆ ἐμφαινέσῃ ὁ ἀπὸ τῆς ἀποτετμημένης κύβος ἴσος ἐςὶ ςερεῷ γινομένῳ ἐκ τȣ̃ τετραγώνȣ τῆς τεταγμένης καὶ τῆς διαφορᾶς τῆς μεταξὺ τῆς διαμέτρȣ τȣ̃ κύκλȣ τȣ̃ γεννήτορος καὶ τῆς ἀποτετμημένης.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'.

§. 334. Τὴν ἐξίσωσιν εὑρεῖν, τὴν ἐμφαίνȣσαν τὴν Τετραγωνίζȣσαν καμπύλην.

Κείσθω τὸ μὲν τῆς περιφερείας τȣ̃ κύκλȣ τεταρτημόριον ΑΒ $=\alpha$, (π) ἡ δὲ ἡμιδιάμετρος ΑΓ $=\beta$, τὸ δὲ τόξον ΑΝ $=\chi$, ἡ δὲ ΑΠ $=y$. ἐπεὶ δὲ ὡς ΑΒ : ΑΝ :: ΑΓ : ΑΠ, (§. 326.) ἔςιν ἄρα ὡς $\alpha : \chi :: \beta : y$.

(ξ) Πίν. XXXIX. Σχ. 3. (ο) Πίν. XXXVI. (π) Πίν. XXXIX. Σχ. 4.

ἐξ ὧ ἡ κατὰ τὸ W (ϛ) ἐξίσωσις πορίζεται, τὴν Τετραγωνίζεσαν ἐμφαίνεσα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ΄.

§. 335. Τὴν ἐξίσωσιν εὑρεῖν, τὴν Σπεῖραν δηλᾶσαν.

Ἔςω ἡ μὲν τᾶ κύκλε περιφέρεια $=\pi$, (σ) ἡ δὲ ἡμιδιάμετρος $=\eta$. ϗ μέρος μὲν τῆς περιφερείας τὸ Απ $=\chi$, μέρος δὲ τῆς ἡμιδιαμέτρε τὸ πμ $=y$. καὶ ἐπεὶ ὡς ὅλη ἡ περιφέρεια, πρὸς τὸ μέρος Απ, ὅτως ὅλη ἡ ἡμιδιάμετρος, πρὸς τὸ μέρος πμ, (§. 327.) ἐςιν ἄρα ὡς $\pi:\chi::\eta:y$. ἐκ τέτε ἐν ἡ κατὰ τὸ ΛΑ ἐξίσωσις (τ) γίνεται, Σπεῖραν δηλᾶσα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε΄.

§. 336. Τὴν ἐξίσωσιν εὑρεῖν τὴν Κυκλοειδῆ ἐμφαίνεσαν.

Ἤχθω ἀπὸ τᾶ Π (υ) ἡ ΠΛ τῇ ΑΓ παράλληλος. ϗ ἴσω ἡ μὲν τᾶ γεννήτορος κύκλε περιφέρεια $=\pi$, ἡ δὲ εὐθεῖα ΑΓ $=\alpha$, τὸ δὲ ὡς ἀποτετμημένη ἐκλαμβανόμενον τόξον ΒΜ $=\chi$, ἡ δὲ τεταγμένη ΜΠ $=y$. ἐκῶν ἔςαι ἡ μὲν περιφέρεια βΠδ $=\frac{1}{2}\pi$, ἡ δὲ ΑΔ $=\frac{1}{2}\alpha$. καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν βΠδ $=$ ΑΔ. τὸ δὲ τόξον Πδ $=$ Λδ, (§. 330.) ἔςιν ἄρα ϗ Πβ ἡ λοιπὴ περιφέρεια ἴση λοιπῇ εὐθείᾳ τῇ δΔ. ἔςι δὲ ἡ ΝΛ $=$ δΔ, ἄρα ἡ ΝΛ $=$ Πβ. ἔςι δὲ ἡ ΜΑ $=$ ΠΝ, (ἴσων γὰρ ὄντων τῶν Πβ, ΜΒ τόξων, ἴσα εἰσὶ ϗ τὰ ὀρθὰ αὐτῶν ἡμίτονα ΜΑ, ΠΝ) ἄρα ἡ ΝΛ $=$ δΔ $=$ ΠΜ $=y$. ἐπεὶ δὲ ὡς ΑΔ : βΠδ :: δΔ : Πβ, ἔσεται ϗ ὡς ΑΔ : βΠδ :: ΠΜ : ΒΜ, ἤτοι

(ϛ) Πίν. XXXVI. (σ) Πίν. XXXIX. χ. 5. (τ) Πίν. XXXVI. (υ) Πίν. XXXIX. χ. 6.

ἤτοι ὡς $\frac{1}{2}\alpha : \frac{1}{2}\pi :: y : z$. ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ ΒΒ (φ) προκύπτει ἐξίσωσις, τὴν Κυκλοειδῆ ἐμφαίνουσα.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 337. Ἐν τῇ ἐξισώσει ἐν τῇ τὴν Κυκλοειδῆ ἐμφαινούσῃ ἡ ἀποτετμημένη z ἴση ἐστὶ τῇ τεταγμένῃ y. ἔστι γὰρ (§. 330) τὸ $\pi = \alpha$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 338. Ἰστέον, ὅτι αἱ μὲν ἐξισώσεις, αἱ διὰ τοῦ λόγου συνιστάμεναι, ὃν πρὸς ἀλλήλους ἔχουσιν αἱ ἐν ταῖς καμπύλαις εὐθεῖαι, οἷον αἱ ἀποτετμημέναι, καὶ τεταγμέναι, καὶ οἱ ἄξονες, καὶ αἱ Διάμετροι καὶ Παράμετροι, **Ἀλγεβραϊκαὶ** λέγονται· αἱ δὲ συγκροτούμεναι διὰ τοῦ λόγου, ὃν ἔχουσι τόξα κύκλων πρὸς τὰς εἰρημένας εὐθείας, **Ὑπερβατικαί.** δῆλον ἄρα ὅτι αἱ μὲν τὴν Τετραγωνίζουσαν, καὶ τὴν Σπεῖραν, καὶ τὴν Κυκλοειδῆ ἐμφαίνουσαι ἐξισώσεις, Ὑπερβατικαί εἰσιν· αἱ δὲ λοιπαί, περὶ ὧν ἐν τοῖς προλαβοῦσι καὶ τῷ παρόντι εἴρηται κεφαλαίῳ, Ἀλγεβραϊκαί.

(φ) Πίν. XXXVI.