ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 312. Ἡ δὲ γενικὴ μέθοδος τοῦ τὰς λοιπὰς ἀναγράφειν Ὑπερβολὰς, ἀμέλγεται τὰς ἐμφαινομένας ὑπὸ ἐξισώσεων, αἷς ἑκάτερον τῶν ἀγνώστων ἐκθέτην ἔχει τῆς μονάδος μείζονα, ἡ ἑξῆς ἐστίν· ἐπεὶ πᾶσαν τοιαύτην ἐξίσωσιν ἐμφαίνει ἡ κατὰ τὸ Υ· (ο) τὰ γὰρ μ καὶ ν ἢ ἑκάτερα ἀριθμοί εἰσιν ἄρτιοι, ἢ ἑκάτερα περιττοὶ, ἢ τὸ μὲν ἄρτιος τὸ δὲ περιττὸς ἀριθμός· κείσθω τὸ χν ἴσον τοῖς κατὰ τὸ Φ. καὶ ἀντ' αὐτοῦ τὸ ἴσον αὐτῷ τεθήτω ἐν τῇ κατὰ τὸ Υ ἐξισώσει. οὗ προκύψει ἡ κατὰ τὸ Χ ἐξίσωσις. ἐὰν οὖν τοῖς προειρημένοις μεθόδοις αἱ καμπύλαι ἀναγραφῶσιν, αἱ ὑπὸ τῶν ἐξισώσεων τῶν ἐν τοῖς Φ καὶ Χ ἐμφαινόμεναι, (ἐν αὐταῖς γὰρ τὸ ἕτερον τῶν ἀγνώστων τὴν μονάδα ἐκθέτην ἔχει.) σημεῖα ποριθήσονται, δι' ὧν ἡ ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ Υ ἐξισώσεως δηλουμένη Ὑπερβολὴ ἀναγραφήσεται. ὅπερ δὴ τοῖς ἑξῆς ἀναπτύσσεται προβλήμασι.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΓ'.

§. 313. Τὴν Ὑπερβολὴν ἀναγράψαι τὴν ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ Ψ δοθείσης ἐξισώσεως ἐμφαινομένην.

Οὐκοῦν ἐν τῇ κατὰ τὸ Υ γενικῇ ἐξισώσει τό, τε, μ καὶ τὸ ν ἄρτιοί εἰσιν ἀριθμοὶ, ἑκάτερον δὲ τούτων ἴσον τῷ 2. καὶ ἡ μὲν κατὰ τὸ Φ ἐξίσωσις, τὴν κατὰ τὸ Ω σημαίνει, ἡ δὲ κατὰ τὸ Χ τὴν κατὰ τὸ α.

Ἐκκείσθω οὖν εὐθεῖα ἡ ΝΡ, (π) καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτῇ ἔσω ἡ ΖΖ. τεμνέτωσαν δὲ δίχα τὰς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένας ὀρθὰς γωνίας αἱ ΗΧ, ΕΥ. καὶ ἀναγεγράφθωσαν Ὑπερβολαὶ μὲν αἱ ΔΟ, ΓΟ, αἱ ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ α δηλούμεναι ἐξισώσεως· Παραβολὴ δὲ κωνικὴ

(ο) Πίν. XXXVI. (π) Πίν. XXXVII. σχ. 4.

ἡ ΗΑΕ, ἣν ἡ κατὰ τὸ Ω σημαίνει ἐξίσωσις. (§. 307, 260.) εἰλήφθω δὲ ἡ ἀποτετμημένη $ΛΞ = y$, καὶ ἀπὸ τοῦ Ξ τετάχθω ἡ ΞΦ. ληφθέντος δὲ ἀπὸ τῆς ΗΧ τυχόντος σημείου τοῦ ς ἤχθω ἡ ΨςΤΨ τῇ ΖΞ παράλληλος. καὶ ἀπὸ μὲν τῶν ς καὶ Τ σημείων ἤχθωσαν αἱ ςΥ, ΤΧ τῇ ΝΡ παράλληλοι, ἀπὸ δὲ τοῦ Φ ἡ ΦΒ τῇ ΖΞ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΥΧ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐφ' ἑκάτερα, ὁμοίως ἐκβεβλήσθω καὶ ἡ ΦΞ, καὶ διὰ τοῦ Β ἤχθω ἡ ΨΒΨ τῇ ΝΡ παράλληλος. λέγω, ὅτι τὰ σημεῖα Ψ, Ψ, Ψ, Ψ ἐν τῇ ζητουμένῃ Ὑπερβολῇ εἰσὶ, τῇ ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ Ψ ἐξισώσεως ἐμφαινομένῃ.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ ἀποτετμημένη $ΛΞ = y$, ἡ ἄρα τεταγμένη $ΞΦ = π$, διὰ τὴν κατὰ τὸ α ἐξίσωσιν. ἐπεὶ δὲ ἡ ἀποτετμημένη $ΑΠ = ΞΦ = π$, ἡ ἄρα τεταγμένη $ΠΜ = χ$, διὰ τὴν κατὰ τὸ Ω ἐξίσωσιν. ἔστι δὲ ἡ $ΞΨ = ΛΝ = Νς = ΜΠ = χ$, ἡ ἄρα $ΨΞ = ΘΧ = ΛΘ = ΠΛ = -χ$. ὁμοίως ἡ μὲν $ΛΖ = -y$, ἡ δὲ $ΖΨ = ΞΨ = χ$, ἡ δὲ $ΨΖ = ΨΞ = -χ$. τὰ ἄρα Ψ, Ψ, Ψ, Ψ σημεῖα ἐν τῇ ζητουμένῃ Ὑπερβολῇ εἰσὶν, ἧς τὸ σχῆμα τὸ ΨΨΨΨ. σχ. 6.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΔ'.

§. 314. Τὴν ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ β (ρ) δοθείσης ἐξισώσεως ἐμφαινομένην ἀναγράψαι Ὑπερβολήν.

Ἐν τῇ κατὰ τὸ Υ ἄρα γενικῇ ἐξισώσει τὸ μὲν $μ = 2$, τὸ δὲ $ν = 3$, τὸ μὲν δῆθεν ἄρτιος, τὸ δὲ περιττός. καὶ ἡ μὲν κατὰ τὸ Φ ἐξίσωσις τὴν κατὰ τὸ γ σημαίνει, ἡ δὲ κατὰ τὸ Χ τὴν κατὰ τὸ δ.

Κείσθωσαν οὖν εὐθεῖαι αἱ ΒΛ, ΖΚ, ΕΥ, ΗΧ, (σ) ὡς καὶ ἐν τῷ προλαβόντι προβλήματι. καὶ ἀναγεγράφθωσαν Ὑπερβολαὶ αἱ ΔΟ, ΓΟ, αἱ ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ δ ἐξισώσεως δηλούμεναι, (§. 307.) ὡσαύτως καὶ Παραβο-

(ρ) Πίν. XXXVI. (σ) Πίν. XXXVII. σχ. 1.

βολὴ ἡ ΗΛΧ, ἣν ἡ κατὰ τὸ γ ἐξίσωσις ἐμφαίνει. (§. 294.) καὶ εἰλήφθω ἀποτετμημένη ἡ ΑΚ = y, καὶ ἀπὸ τῦ Κ τετάχθω ἡ ΚΦ. καὶ ἀπὸ μὲν τῦ Φ ἤχθω ἡ ΦΜ τῇ ΖΚ παράλληλος, ἀπὸ δὲ τῦ Μ ἡ Μϛ τῇ ΒΛ, ἀπὸ δὲ τῦ ϛ ἡ ΨϛΨ τῇ ΖΚ. καὶ ληφθείσης τῆς ΑΖ = ΑΚ, ἤχθω ἀπὸ τῦ Ζ ἡ ΖΨ τῇ ΒΛ παράλληλος. ἐκβεβλήσθω δὲ ἡ ΚΦ ἐπὶ τὸ Ψ. λέγω, ὅτι τὰ σημεῖα Ψ καὶ Ψ ἐν τῇ Ὑπερβολῇ εἰσὶ τῇ ὑπὸ της κατὰ τὸ β δοθείσης ἐξισώσεως ἐμφαινομένῃ.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ ἀποτετμημένη ΑΚ = y, ἡ ἄρα τεταγμένη ΚΦ = π. ἄρα καὶ ἡ ἀποτετμημένη ΑΠ = ΚΦ = π. ἡ ἄρα τεταγμένη ΠΜ = χ, διὰ τὴν κατὰ γ ἐξίσωσιν. ἄρα καὶ ἡ ΚΨ = ΛΝ = ϛΝ = ΜΠ = χ. ὡσαύτως ἡ μὲν ΑΖ = —y, ἡ δὲ ΖΨ = χ. ἐκῦν τὰ Ψ, Ψ σημεῖα ἐν τῇ ζητεμένῃ Ὑπερβολῇ εἰσίν. ἧς τὸ χῆμα (τ) τῷ ΒΕ, ΔΨ ὅμοιον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΕ'.

§. 315. Τὴν Ὑπερβολὴν ἀναγράψαι, τὴν δηλυμένην ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ ε (υ) δοθείσης ἐξισώσεως.

Οὐκῦν ἐν τῇ κατὰ τὸ Υ γενικῇ ἐξισώσει τὸ μὲν μ = 5, τὸ δὲ ν = 3, ἑκάτεροι δὲ περιττοὶ ἀριθμοί. καὶ ἡ μὲν κατὰ τὸ Φ ἐξίσωσις τὴν κατὰ τὸ ζ ἐμφαίνει, ἡ δὲ κατὰ τὸ Χ τὴν κατὰ τὸ η.

Κείσθωσαν εὐθεῖαι αἱ ΠΡ, ΖΝ, ΒΕ, ΗΓ, (φ) ὡς καὶ ἐν τῷ ιγ' προβλήματι. (§. 313.) καὶ ἀναγεγράφθω Παραβολὴ μὲν ἡ ΗΑΛ, ἡ ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ ζ δηλυμένη (§ 294.) ἐξισώσεως· Ὑπερβολαὶ δὲ αἱ ΙΘ, ΚΕ, αἱ ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ η ἐξισώσεως ἐμφαινόμεναι. (§. 310.) ληφθείσης δὲ τῆς ἀποτετμημένης ΑΠ = π, τετάχθω

(τ) Πίν. XXXVII, χ. 2. (υ) Πίν. XXXVI. (φ) Πίν. XXXVIII. χ. 2.

θω ἡ ΠΜ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Θ. καὶ ἀπὸ μὲν τοῦ Θ ἤχθω ἡ ΘΨ, ἀπὸ δὲ τοῦ Μ ἡ ΜϚ τῇ ΠΡ παράλληλος. ληφθείσης δὲ τῆς ΑΡ = ΑΠ, ἤχθω ἀπὸ μὲν τοῦ Ρ ἡ ΟΡΔ τῇ ΖΝ, ἀπὸ δὲ τῶν Ο καὶ Δ αἱ ΟΨ, ΔΤ τῇ ΠΡ, ἀπὸ δὲ τῶν Τ καὶ Ϛ αἱ ΤΨ, ϚΨ τῇ ΖΝ παράλληλοι. λέγω δὴ, ὅτι τὰ Ψ, Ψ σημεῖα ἐν τῇ Ὑπερβολῇ ἔσαι, τῇ ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ ε δοθείσης ἐξισώσεως σημαινομένῃ.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ ἀποτετμημένη ΑΠ = π, ἡ ἄρα τεταγμένη ΠΜ = χ, διὰ τὴν κατὰ τὸ ζ ἐξίσωσιν. ἀλλ' ἡ τεταγμένη ΘΝ = ΑΠ = π. ἡ ἄρα ἀποτετμημένη ΑΝ = ψ, διὰ τὴν κατὰ τὸ η ἐξίσωσιν. ἔσι δὲ ἡ μὲν ΑΡ = −π, ἡ δὲ ΡΛ = −χ. ἔσι δὲ ἡ ΡΛ = ΡΦ + ΦΛ καὶ ἡ μὲν ΡΦ = ΡΛ = ΝΔ, ἡ δὲ ΦΛ = ΛΤ = ΔΨ. διὸ ἡ ΡΛ = ΝΨ = −χ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, ἐκβληθείσης τῆς ΘΜ κατὰ τὸ Γ, δειχθήσεται ἡ ΖΨ = χ. ἡ δὲ ΛΖ = −ψ. διὸ τὰ σημεῖα Ψ, Ψ ἐν τῇ ζητουμένῃ Ὑπερβολῇ ἐσὶν, ἧς τὸ χῆμα τὸ Ψ, Ψ. χ. 3.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙϚʹ.

§. 316. Τὴν Ὑπερβολὴν ἀναγράψαι, τὴν ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ θ (χ) δοθείσης ἐξισώσεως σημαινομένην.

Ἐν τῇ κατὰ τὸ Υ ἄρα γενικῇ ἐξισώσει, τὸ μὲν μ = 3, τὸ δὲ ν = 2, ὅπερ ἐσὶ τὸ μὲν περιττὸς, τὸ δὲ ἄρτιος ἀριθμός. διὸ ἡ μὲν κατὰ τὸ Φ ἐξίσωσις δηλοῖ τὴν κατὰ τὸ ι, ἡ δὲ κατὰ τὸ Χ τὴν κατὰ τὸ κ. Κείσθωσαν αἱ ΒΑ, ΝΖ, ΔΟ, ΗΓ (ψ) εὐθεῖαι ὡς καὶ ἐν τῷ ιγ. προβλήματι. (§. 313.) καὶ ἀναγεγράφθω Παραβολὴ μὲν ἡ ΗΑΔ, ἡ ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ ι δηλουμένης ἐξισώσεως (§. 260.) Ὑπερβολαὶ δὲ, αἱ ΘΟ, ΕΟ, αἱ ὑπὸ

(χ) Πιν. XXXVI. (ψ) Πιν. XXXVIII. κ. 4.

ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ κ ἐμφαινόμεναι. (§. 307.) ληφθείσης δὲ τῆς ἀποτετμημένης ΑΠ $=\pi$, τετάχθω ἡ ΠΜ, καὶ ἐκβεβλήσθω κατὰ τὸ Ο. ἀχθείσης δὲ διὰ τοῦ Ο τῆς ϚΟΖ τῇ ΒΑ παραλλήλου, ἤχθω διὰ μὲν τοῦ Ϛ ἡ ϚΙ, τῇ ΜΟ παράλληλος, διὰ δὲ τῶν Μ καὶ Λ αἱ ΜΨ, ΛΨ τῇ ΒΑ. λέγω, ὅτι τὰ Ψ, Ψ σημεῖα ἐν τῇ Ὑπερβολῇ εἰσὶ, τῇ ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ θ δοθείσης ἐξισώσεως ἐμφαινομένῃ. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΑΠ$=\pi$, ἡ ἄρα τεταγμένη ΠΜ$=\chi$, διὰ τὴν κατὰ τὸ ι ἐξίσωσιν. ἐπεὶ δὲ ἡ ΖΟ $=$ ΑΠ $=\pi$, ἡ ἄρα ἀποτετμημένη ΑΖ$=y$, διὰ τὴν κατὰ τὸ κ ἐξίσωσιν. ἔστι δὲ ἡ μὲν ΑΒ $=$ ϚΖ $=$ ΖΑ $=y$, ἡ δὲ ΒΨ $=$ ΠΜ $=\chi$. ὁμοίως δὲ καὶ ἡ ΒΨ $=$ ΠΛ $=\chi$. ἐκ τούτων δὲ δῆλον, ὅτι τὸ τῆς ζητουμένης Ὑπερβολῆς σχῆμά ἐστι τὸ ΒΕ, ΔΨ. (ω)

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 317. Ὥσπερ διὰ τῶν τοῦ Κώνου τομῶν, οὕτω καὶ διὰ τῶν εἰρημένων καμπύλων πολλὰ τῶν γεωμετρικῶν ἐπιλύεται προβλήματα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΖ'.

§. 318. Δύω δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν α, β, δύω μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ.

Ἔστω ἡ $\alpha > \beta$. καὶ ἡ μὲν τῶν μέσων, ἡ ἐλάσσων, χ· ἡ δὲ, ἡ μείζων, y.

Οὐκοῦν ἔσται ὡς $\alpha : \chi :: \chi : y$, καὶ ὡς $\chi : y :: y : \beta$. ἐκ μὲν τῆς πρώτης ἄρα ἀναλογίας ἡ κατὰ τὸ λ ἐξίσωσις (α) γίνεται· ἐκ δὲ τῆς δευτέρας, ἡ κατὰ τὸ μ. ἑκατέρα δὲ τούτων τὴν κωνικὴν ἐμφαίνει Παραβολήν.

Ἐκκείσθω οὖν εὐθεῖα ἡ ΑΔ. (β) καὶ ληφθείσης τῆς ΑΒ $=\alpha$, ἤχθω ἀπὸ τοῦ Β τῇ ΑΔ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΕΓ. καὶ παρα-

(ω) Πίν. XXXVII. σχ. 2. (α) Πίν. XXXVI (β) Πίν. XXXVIII. σχ. 5.

ραμέτρῳ μὲν τῷ $α = AB$ γεγράφθω ἡ ΖΒΘ Παραβολὴ περὶ τὸν ΒΔ ἄξονα, κορυφὴν ἔχεσα τὸ Β· παραμέτρῳ δὲ τῷ $β = BΓ$ γεγράφθω περὶ τὸν ΒΕ ἄξονα Παραβολὴ ἡ ΖΒΗ, τὴν αὐτὴν ἔχεσα κορυφήν. ϗ ἀπὸ τῆς κοινῆς τῶν Παραβολῶν διατομῆς Ζ ἤχθω ἡ μὲν ΖΔ τῇ ΕΓ, ἡ δὲ ΖΕ τῇ ΑΔ παράλληλος. λέγω, ὅτι αἱ ΒΕ, ΒΔ εἰσὶν αἱ ζητέμεναι μέσαι ἀνάλογον τῶν δοθεισῶν α καὶ β.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ $AB . BΔ = \overline{ΔZ}^2$, (§. 235.) ὡς ἄρα $AB : ΔZ :: ΔZ : BΔ$, ἤτοι ὡς $α : χ :: χ : y$. ἔςι γὰρ διὰ τὴν κατὰ τὸ λ ἐξίσωσιν, (γ) ἡ μὲν ἀποτετμημένη $BΔ = y$, ἡ δὲ τεταγμένη $ZΔ = χ$. ἔτι δὲ ἡ $ΔZ = BE$. ἄρα καὶ ὡς $AB : BE :: BE : BΔ$. πάλιν ἐπεὶ τὸ $ΓB . BE = \overline{EZ}^2$, (§. 235.) ὡς ἄρα $ΓB : EZ :: EZ : BE$, ἤτοι ὡς $β : y :: y : χ$, διὰ τὴν κατὰ τὸ μ ἐξίσωσιν. ἔςι δὲ ἡ $EZ = BΔ$. ὡς ἄρα $ΓB : BΔ :: BΔ : BE$. ϗ ἀνάπαλιν ὡς $BE : BΔ :: BΔ : ΓB$. διὸ καὶ ὡς $AB : BE :: BE : BΔ :: BΔ : BΓ$, ἤτοι ὡς $α : χ :: χ : y :: y : β$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α΄.

§. 319. Ἐκ τῆς κατὰ τὸ λ ἐξισώσεως, ἡ κατὰ τὸ ν γίνεται. ϗ τῶν τετραγώνων ἑκατέρωθεν ληφθέντων, ἡ κατὰ τὸ ξ. ἐξ αὐτῆς δὲ καὶ τῆς κατὰ τὸ μ ἡ κατὰ τὸ ο, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ π. ἐξ ἧς δῆλον, ὅτι τὸ προκείμενον πρόβλημα τῦ τρίτυ βαθμῦ ἐςί. διὸ ἀμήχανον διὰ κύκλυ καὶ εὐθείας ἐπιλυθῆναι, ὥς τινες ἐνόμισαν.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β΄.

§. 320. Ἀπὸ τῦ προβλήματος τύτυ καὶ ἡ τῦ περιβοήτυ παρὰ τοῖς παλαιοῖς δηλιακῦ προβλήματος ἐπίλυσις ἤρτηται, ὅπερ ἦν τὸ διπλασιάσαι τὸν κύβον ἴσυ

(γ) Πίν. XXXVI.

ἴςω γὰρ ἡ μὲν τῦ δοθέντος κύβυ πλευρὰ α, ἡ δὲ τῦ ζητυμένυ διπλασίυ χ. ὐκῦν τὸ $2\alpha^3 = \chi^3$. ἐὰν ὖν τῆς πλευρᾶς α τῦ δοθέντος κύβυ, ϗ τῦ διπλασίυ αὐτῆς, ἤτυν τῦ 2α, δύω εὑρεθῶσι μέσαι ἀνάλογον, ἡ πρώτη αὐτῶν ἡ πλευρὰ ἔςαι τῦ ζητυμένυ κύβυ. ἔςω γὰρ ἡ μὲν πρώτη τῶν μέσων χ, ἡ δὲ δευτέρα y. ὐκῦν ὡς $\alpha : \chi :: \chi : y :: y : 2\alpha$. τὸ μὲν ἄρα $\alpha y = \chi^2$, τὸ δὲ $2\alpha\chi = y^2$. διὸ τὸ $\chi^3 = 2\alpha^3$.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 321. περὶ τῦ προβλήματος τύτυ ὁ Ἐρατοσθένης τῷ βασιλεῖ Πτολεμαίῳ τάδε ἔγραψε (δ) τῶν ἀρχαίων τινὰ τραγῳδοποιῶν, φασὶν, εἰσαγαγεῖν τὸν Μίνω τῷ Γλαύκῳ κατασκευάζοντα τάφον. πυθόμενον δὲ, ὅτι πανταχῦ ἑκατόμπεδος εἴη, εἰπεῖν· μικρόν γ' ἔλεξας βασιλικῦ σηκὸν τάφυ, διπλάσιον ἔςω. τῦ δὲ δὲ τῦ κύβυ μὴ σφαλεὶς, διπλασιάζων ἕκαςον κῶλον ἐν πάχει τάφυ, ἐδόκει διημαρτηκέναι. τῶν γὰρ πλευρῶν διπλασιαθεισῶν, τὸ μὲν ἐπίπεδον γίνεται τετραπλάσιον, τὸ δὲ ςερεὸν ὀκταπλάσιον. ἐζητεῖτο δὴ ϗ παρὰ τοῖς Γεωμέτραις, τίνα ἄντις τρόπον τὸ δοθὲν ςερεὸν διαμένον ἐν τῷ αὐτῷ σχήματι διπλασιάσειε. ϗ ἐκαλεῖτο τὸ τοιῦτον πρόβλημα, κύβυ διπλασιασμός. ὑποθέμενοι γὰρ κύβον, ἐζήτυν τῦτον διπλασιάσαι. πάντων δὲ διαπορύντων ἐπὶ πολὺν χρόνον, πρῶτον Ἱπποκράτης ὁ Χῖος ἐπενόησεν, ὅτι ἐὰν εὑρεθῇ δύω εὐθειῶν γραμμῶν, ὧν ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονός ἐςι διπλασία, δύω μέσας ἀνάλογον λαβεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, διπλασιασθήσεται ὁ κύβος. ὥςε τὸ ἀπόρημα αὐτῦ εἰς ἕτερον ὐκ ἔλασσον ἀπόρημα κατέςρεφε. μετὰ χρόνον δέτινα, φασὶ, Δηλίυς ἐπιβαλλομένης νόσυ κατὰ χρησμὸν διπλασια-

(δ) Παρ' Εὐτοκίῳ ἐν τῷ τῦ Ἀρχιμήδ. περὶ σφαίρ. ϗ κυλινδρ. β. βιβλ.

σιάσαι τινὰ τῶν βωμῶν ἐπιταχθέντας, ἐμπεσεῖν εἰς τὸ αὐτὸ ἀπόρημα. διαπεμψαμένες δὲ τὲς παρὰ τῷ Πλάτωνι ἐν Ἀκαδημίᾳ Γεωμέτρας, ἀξιεῖν αὐτοῖς εὑρεῖν τὸ ζητέμενον. τῶν δὲ φιλοπόνως ἐπιδιδόντων ἑαυτοῖς, καὶ ζητέντων, δύω δοθεισῶν, δύω μέσας λαβεῖν, Ἀρχύτας μὲν ὁ Ταραντῖνος, λέγεται, διὰ τῶν ἡμικυλίνδρων εὑρηκέναι, Εὔδοξος δὲ διὰ τῶν καλεμένων καμπύλων γραμμῶν. συμβέβηκε δὲ πᾶσιν αὐτοῖς ἀποδεικτικῶς γεγραφέναι, χειρεργῆσαι δὲ καὶ εἰς χρείαν πεσεῖν μὴ δύνασθαι, πλὴν ἐπὶ βραχύτι τῷ Μενέχμε, καὶ ταῦτα δυσχερῶς. ἐπινενόηται δέ τις ὑφ' ἡμῶν ὀργανικὴ ῥᾳδία, δι' ἧς εὑρήσομεν δύω τῶν δοθεισῶν, ἐ μόνον δύω μέσας, ἀλλ' ὅσας ἄντις ἐπιτάξῃ. τέτε δὲ εὑρισκομένε, δυνησόμεθα καθόλε τὸ δοθὲν στερεὸν παραλληλογράμμοις περιεχόμενον εἰς κύβον καθιστάναι, ἢ ἐξ ἑτέρε εἰς ἕτερον σχηματίζειν, καὶ ὅμοιον ποιεῖν καὶ ἐπαύξειν διατηρῦντας τὴν ὁμοιότητα. ὥστε, κτ. Ὁ δὲ φησι περὶ τῦ Μενέχμε, καὶ ταῦτα δυσχερῶς, ἐκ ἀληθές. εὐχερῶς γὰρ τῦτο ὁ Μένεχμος, καὶ ἐκ ὀργανικῶς λέλυκεν, ὥσπερ τῦτο διαφόροις ἔλυσαν μεθόδοις παρ' Εὐτοκίῳ σωζομέναις, (*) ὁ Πλάτων, ὁ Ἥρων, ὁ Φίλων ὁ Βυζάντιος, ὁ Ἀπολλώνιος ὁ Περγαῖος, ὁ Διοκλῆς, ὁ Πάππος, ὁ Σπόρος, ὁ Ἀρχύτας, ὁ Νικομήδης, καὶ αὐτὸς ὁ Ἐρατοσθένης. ἔστι δὲ ἡ τῦ Μενέχμε ἐπίλυσις ἡ αὐτὴ τῇ παρ' ἡμῶν προτεθείσῃ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΗ'.

§. 322. Τὴν δοθεῖσαν εὐθύγραμμον γωνίαν ΑΚΒ (ε) εἰς τρεῖς ἴσας γωνίας διελεῖν.

Κέντρῳ τῷ Κ, καὶ διαστήματι τῷ ΚΑ κύκλος γεγράφθω ὁ ΑΕΒ. κείσθω δὲ τὴν ΑΚΒ εἰς τρεῖς ἴσας διαιρεθῆ-

ρεθῆ-

(*) Ἐν τῷ προημ. σημειώ. Ὅρα δὲ καὶ Πρόβλ. 255. §. 626. τῆς τῦ Οὐολφ. Ἄλγεβρ. (ε) Πίν. XXXVIII. σχ. 6.

ται γωνίας τὰς ΑΚΕ, ΕΚΔ, ΔΚΒ. καὶ ἐπιζευχθεισῶν τῶν ΑΕ, ΕΔ, ΔΒ, ΑΒ, ἤχθω ἀπὸ τοῦ Ε ἡ ΕΦ τῇ ΔΚ παράλληλος. καὶ ἔστω ἡ μὲν ΑΚ $=\beta$, ἡ δὲ ΑΒ $=\alpha$, ἡ δὲ ΑΕ $=y$, ἡ δὲ ΕΖ $=\chi$.

Καὶ ἐπεὶ ἡ ΕΚΒ γωνία, ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ διπλασία ἐστὶ τῆς ΕΑΒ, τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ, ἔστι δὲ ἡ αὐτὴ ΕΚΒ διπλασία καὶ τῆς ΑΚΕ, (ἐξ ὑποθέσεως γὰρ εἰς τρεῖς ἴσας διήρηται ἡ ΑΚΒ) ἡ ἄρα ΕΑΒ, ἤτουν ἡ ΕΑΖ $=$ ΑΚΕ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΕΚ κοινὴ γωνία τῶν ΑΕΚ, ΑΕΖ τριγώνων. ἄρα καὶ ἡ ΕΖΑ $=$ ΚΑΕ. ἔστιν ἄρα ὡς ΕΚ $=$ ΑΚ : ΕΑ :: ΕΑ :: ΕΖ, ἤτοι ὡς $\beta : y :: y : \chi$. ἐκ ταύτης δὲ τῆς ἀναλογίας ἡ κατὰ τὸ ρ ἐξίσωσις γίνεται. (ζ) Ἐπεὶ δὲ ἡ γωνία ΕΖΑ $=$ ΚΑΕ, ἔστι δὲ ἡ μὲν ΕΖΑ $=$ ΚΖΗ, ἡ δὲ ΚΑΕ $=$ ΚΕΑ $=$ ΚΕΔ, ἡ ἄρα ΚΖΗ $=$ ΚΕΔ. διὸ ἡ ΑΒ τῇ ΕΔ παράλληλος. ἐπεὶ οὖν ἡ ΕΦΖ γωνία ἴση τῇ ἐναλλὰξ ΦΗΚ, ἡ δὲ ΦΗΚ τῇ ἐντὸς ΕΔΚ, ἡ ἄρα ΕΦΖ $=$ ΕΔΚ $=$ ΚΕΔ. τὰ τρίγωνα ἄρα ΕΦΖ, ΚΕΔ ὅμοιά εἰσι. διὸ ὡς ΕΚ : ΕΔ :: ΕΖ : ΖΦ, ἤτοι ὡς $\beta : y :: \chi : Z\Phi = \frac{y\chi}{\beta}$.

Ἐπεὶ δὲ ἡ μὲν ΑΖ $=$ ΑΕ, ἡ δὲ ΦΗ $=$ ΕΔ, ἡ δὲ ΒΗ $=$ ΒΔ, αἱ ἄρα ΑΖ $+$ ΦΗ $+$ ΗΒ $=$ ΑΕ $+$ ΕΔ $+$ ΔΒ. ἀλλ᾽ αἱ μὲν ΑΖ $+$ ΦΗ $+$ ΗΒ $=$ ΑΒ $+$ ΦΖ, αἱ δὲ ΑΕ $+$ ΕΔ $+$ ΔΒ $=$ 3ΑΕ. αἱ ἄρα ΑΒ $+$ ΦΖ $=$ 3ΑΕ. ἤτουν τὸ $\alpha + \frac{y\chi}{\beta} = 3y$. ἐκ τῆς ἐξισώσεως δὲ ταύτης ἡ κατὰ τὸ σ γίνεται, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ τ. ἐξ αὐτῆς δὲ ἡ ἑξῆς ἀναλογία, ὡς $3\beta - \chi : \alpha :: \beta : y$. ἀλλ᾽ ὡς $\beta : y ::$ $y : \chi$, ὡς ἀνωτέρω δέδεικται. ἄρα καὶ ὡς $3\beta - \chi : \alpha :: y : \chi$. ἐκ ταύτης δὲ τῆς ἀναλογίας ἡ κατὰ τὸ υ ἐξίσωσις γίνεται. καὶ προστεθέντων ἑκατέρωθεν τῶν ἴσων τῶν ἐν τῇ

(ζ) Πίν. XXXVI.

κατὰ τὸ ρ ἐξισώσει, προκύπτει ἡ κατὰ τὸ φ, ϗ τȣ̃ τετραγώνȣ πληρωθέντος, ἡ κατὰ τὸ χ. ϗ τεθέντος τȣ̃ $y + \frac{1}{2} \alpha = Z$, ἡ κατὰ τὸ ψ, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ ω. ϗ πληρωθέντος τȣ̃ τετραγώνȣ, ἡ κατὰ τὸ A. ϗ τεθέντος τȣ̃ μὲν $2\beta - \chi = \pi$, τȣ̃ δὲ $4\beta^2 + \frac{1}{2}\alpha^2 = \mu^2$, ἡ κατὰ τὸ C, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ D γίνεται.

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων ȣ̃ν τῶν ἐν τοῖς ρ ϗ D, ὧν ἡ μὲν Παραβολὴν, (§. 234.) ἡ δὲ κύκλον ἐμφαίνει, (§. 228.) ἡ τȣ̃ y, τȣτέςι ἡ τῆς ΛΕ εὕρεσις ἤρτηται ἧς τινος εὑρεθείσης τὸ προκείμενον ἐπιλύεται πρόβλημα. Παραμέτρῳ ȣ̃ν τῷ β ἀναγεγράφθω περὶ τὸν ΑΘ (η) ἄξονα Παραβολὴ ἡ ΑΓ, ἡ ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ ρ ἐξισώσεως δηλȣμένη. (§. 260.) ϗ ληφθείσης τῆς $\mathrm{A\Delta} = 2\beta$, ἤχθω ἀπὸ τȣ̃ Δ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΑΘ ἡ $\mathrm{\Delta K} = \frac{1}{2}\alpha$. ϗ κέντρῳ μὲν τῷ K, διαςήματι δὲ τῇ ἐπιζευχθείσῃ ΚΑ ἀναγεγράφθω ὁ ΑΓΙ κύκλος. ϗ διαχθείσης τῆς διαμέτρȣ ΖΙ, τετάχθω ἀπὸ τȣ̃ Γ ἡ ΓΕ. λέγω δὴ, ὅτι ἡ $\mathrm{\Gamma B} = y$.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ $\overline{\mathrm{KA}}^2 = \overline{\mathrm{K\Delta}}^2 + \overline{\mathrm{A\Delta}}^2$, ἡ ἄρα $\mathrm{KA} = \sqrt{\frac{1}{4}\alpha^2 + 4\beta^2} = \mu$. ἡ ἄρα ἀποτετμημένη $\mathrm{KE} = \pi$, διὰ τὴν κατὰ τὸ D ἐξίσωσιν, ἡ δὲ τεταγμένη $\mathrm{E\Gamma} = Z$. ἔςι δὲ τὸ μὲν $\pi = 2\beta - \chi$. διὸ τὸ $\chi = 2\beta - \pi = \mathrm{A\Delta} - \mathrm{B\Delta} = \mathrm{AB}$. διὸ ἡ $\mathrm{AB} = \chi$. τὸ δὲ $Z = \frac{1}{2}\alpha + y$. διὸ τὸ $y = Z - \frac{1}{2}\alpha = \mathrm{E\Gamma} - \mathrm{EB} = \mathrm{\Gamma B}$. ἡ ἄρα $\mathrm{\Gamma B} = y$.

Καὶ ἄλλως δὲ τὸ προκείμενον δειχθήσεται. ἐκ γὰρ τῆς γενομένης κατασκευῆς ἡ κατὰ τὸ σ (θ) προκύπτει

(η) Πίν. XXXIX. σχ. 1. (θ) Πίν. XXXVI.

ἐξίσωσις. ἐπιζευχθείσης γὰρ τῆς ΚΓ, τὸ $\overline{\text{ΚΓ}}^2 = \overline{\text{ΚΕ}}^2 + \overline{\text{ΕΓ}}^2$. ἐξ ἧ ἡ κατὰ τὸ Ρ ἐξίσωσις γίνεται· ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ Q, καὶ τῶν ἴσων ἀφαιρεθέντων τῶν ἐν τῇ κατὰ τὸ ρ ἐξισώσει, ἡ κατὰ τὸ L, ἐξ ἧς ἡ ἀναλογία αὕτη· ὡς $3\beta - \chi : \alpha :: y : \chi$. ἔστι δὲ ὡς $\beta : y :: y : \chi$. ἄρα καὶ ὡς $3\beta - \chi : \alpha :: \beta : y$. ἐκ τῆς ἀναλογίας δὲ ταύτης ἡ κατὰ τὸ Μ ἐξίσωσις συνίσταται, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ Ν, ἡ αὐτὴ ἔσα τῇ κατὰ τὸ σ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 323. Καὶ ταῦτα μὲν δὴ περὶ τῶν διὰ τῆς εἰδικῆς ἀριθμητικῆς ἐπιλυομένων προβλημάτων ἅλις. ἐξασκεῖν δὲ δεῖ ὅτι μάλιστα ἑαυτὸν ἐν τῇ τῶν προβλημάτων ἐπιλύσει. ὁ μὲν γὰρ τὴν τῆ ἐπιλύειν πᾶν τὸ προτεθὲν πρόβλημα ἕξιν κτησάμενος, τῆς ἀναλυτικῆς ἐπιστήμης ἐγκρατὴς ἐγένετο· ὁ δὲ ταύτης ἀποτυχὼν, τῶν ἑαυτῆς μόνον ἥψατο κρασπέδων.

ΚΕΦ. ΚϚʹ.

Περὶ τῶν καμπύλας ἐμφαινουσῶν ἐξισώσεων, ὧν τινὲς ὑπερβατικαὶ καλοῦνται.

ΟΡΙΣΜΟΙ.

§. 324. Αʹ. Ἐὰν εὐθεῖα ἡ ΑΓ (ι) πρὸς ὀρθὰς σαθῇ εὐθείᾳ τῇ ΒΔ, ἀπὸ δὲ τῆ πέρατος αὐτῆς Γ ἀχθῶσιν εὐθεῖαι ὁσαιδηποτοῦν, αἱ ΓΜ, ΓΜ, τὴν ΒΔ κατὰ τὰ Ψ, Ψ σημεῖα τέμνουσαι, ληφθῇ δὲ ἑκατέρα τῶν ΜΨ ἴση τῇ ΑΕ, ἡ μὲν διὰ τῶν σημείων Μ, Λ, Μ διϊοῦσα καμπύλη, **Κογχοειδὴς** λέγεται, (κ) ἡ δὲ ΒΔ εὐθεῖα **Κανὼν**, τὸ δὲ σημεῖον Γ **πόλος**.

(ι) Πίν. XXXIX. σχ. 2.

(κ) Εὑρετὴς αὐτῆς ὁ Νικομήδης, ὁ τῷ Ἐρατοσθένει συνακμάσας, τῷ κατὰ τὸ 194. ἔτ. πρὸ Χριστῦ τελευτήσαντι. ὅρα δὲ τὸν Εὐτόκ. εἰς τὸ 2. βιβλ. τῦ Ἀρχιμ. περὶ Σφαίρ. καὶ Κυλίνδ. σελ. 22. ἐν ᾧ καὶ ἡ δι᾽ ὀργάνου τῆς Κογχοειδῦς γραφή.