ΚΕΦ. ΚΕ΄.

Περὶ τῶν ἐξισώσεων τῶν ἐμφαινȣσῶν τὰς τῶν ἀνωτέρων βαθμῶν καμπύλας, καὶ τῆς ἀναγραφῆς αὐτῶν, καὶ τῶν δἰ αὐτῶν ἐπιλυομένων προβλημάτων.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α΄.

§. 290. Αἱ τῶν ἀνωτέρων βαθμῶν ἐξισώσεις ἀπειράριθμοί εἰσι κατά τε τὰ γένη καὶ τὰ εἴδη. κατὰ μὲν γὰρ τὰ γένη τοσαῦταί εἰσιν, ὅσοι οἱ μετὰ τὴν δυάδα ἀριθμοί· κατὰ δὲ τὰ εἴδη, ἔτι πολλῷ πλείονες. ὑπάγεται γὰρ ὑπὸ ἕκαςον τῶν γενῶν διάφορα εἴδη. ἐκ τȣ́τȣ δὲ δῆλον, ὅτι ἀμήχανόν ἐςιν ἁπάσας εὑρεῖν τὰς τῶν ἀνωτέρων βαθμῶν ἐξισώσεις, ὥσπερ καὶ αἱ τȣ͂ δευτέρȣ βαθμȣ͂ ἕυρηνται.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Β΄.

§. 291. Τὴν ὑπὸ τῆς τȣ͂ ἀνωτέρȣ βαθμȣ͂ ἐξισώσεως καμπύλην ἀναγράψαι βȣλόμενοι, δἰ ἐπεισαγωγῆς ἑτέρȣ ἀγνώςȣ εἰς ἑτέρας ἀναλύομεν ἐξισώσεις, καμπύλας γνωςὰς ἐμφαινȣ́σας. ὧν ἀναγραφεισῶν, σημεῖα πορίζονται, δἰ ὧν ἀναγράφεται ἡ ζητȣμένη καμπύλη.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 292. Οἷον, προκείσθω ἡ ἐν τῷ Α (ζ) τȣ͂ τρίτȣ βαθμȣ͂ ἐξίσωσις, ἥτις διὰ μὲν τȣ͂ χ πολλαπλασιασθεῖσα εἰς τὴν ἐν τῷ Β μεταβάλλεται, τῆς τετραγωνικῆς δὲ ῥίζης ἑκατέρωθεν ἐξαχθείσης εἰς τὴν ἐν τῷ Γ. κείσθω ȣ̓͂ν τὸ Ζ ἴσον τοῖς ἐν τῷ Δ. τεθέντος ȣ̓͂ν ἐν τῇ κατὰ

(ζ) Πιν. XXXIV.

τὸ Γ ἐξισώσει τῷ Ζ ἀντὶ τῷ $\sqrt{2a\chi - \chi^2}$, ἡ κατὰ τὸ Ε ἐξίσωσις γίνεται. ἐκ δὲ τῆς κατὰ τὸ Δ ἡ κατὰ τὸ Ζ, κύκλον ἐμφαίνουσα. §. 228.

Διαμέτρῳ οὖν τῇ ΑΨ$=2a$ (η) ἀναγεγράφθω κύκλος ὁ ΑΜΨΓ, (§. 230.) καὶ ληφθείσης τῆς ΑΒ$=\chi$, ἀπὸ τοῦ Β τετάχθω ἡ ΒΓ. καὶ ἀπὸ τοῦ Γ ἀχθείσης διὰ τοῦ κέντρου τῆς ΓΚΜ, ἐπιζευχθείσης τε τῆς ΑΜ, ἐκβεβλήσθω ἡ ΓΒ κατὰ τὸ Ρ. λέγω δὴ, ὅτι τὸ σημεῖον Ρ ἐν τῇ ζητουμένῃ καμπύλῃ ἐστίν. ἐπεὶ γὰρ ἡ ΑΒ$=\chi$, ἡ ἄρα ΨΒ$=2a-\chi$. διὸ ἡ ΒΓ$=$Ζ. ἔστι δὲ ὡς ΓΒ : ΒΑ :: ΒΑ : ΒΡ, ἤτοι ὡς Ζ : χ :: χ : ΒΡ. ἡ ἄρα ΒΡ$=\frac{\chi^2}{Z}$. ἀλλὰ τὸ $\frac{\chi^2}{Z}=y$, ὡς ἐκ τῆς κατὰ τὸ (θ) Ε ἐξισώσεως δῆλον, ἡ ἄρα ΒΡ$=y$. ἐπεὶ οὖν ἡ μὲν ΑΒ$=\chi$, (ι) ἡ δὲ ΒΡ$=y$, δῆλον ἄρα ὅτι τὸ σημεῖον Ρ ἐν τῇ ζητουμένῃ καμπύλῃ ἐστί. τῷ αὐτῷ δὴ τρόπῳ ληφθείσης τῆς ΑΔ$=\chi$, καὶ ταχθείσης τῆς ΔΖ, ἀχθείσης τε διὰ τοῦ κέντρου τῆς ΖΚΝ, καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς ΑΝ, καὶ ἐκβληθείσης τῆς ΖΔ κατὰ τὸ Ε, δειχθήσεται ἡ ΔΕ$=y$. διὸ καὶ τὸ σημεῖον Ε ἐν τῇ ζητουμένῃ καμπύλῃ ἔσται. ὁμοίως καὶ ἕτερα ἔνεστι πορίσασθαι σημεῖα ἄχρις οὗ ἡ ἀποτετμημένη χ ἴση ληφθῇ τῇ ΑΚ. τότε γὰρ ἡ ἀπὸ τοῦ Κ τεταγμένη ΚΗ$=y$, ἡ μεγίστη τῶν ἐν τῇ ζητουμένῃ καμπύλῃ τεταγμένων ἔσται. ἐὰν δὲ ληφθῇ ἡ μὲν ΨΙ$=$ΑΒ, ἡ δὲ ΨΞ$=$ΑΔ, ἀχθῇ δὲ ἡ μὲν ΙΛ$=$ΒΡ καὶ παράλληλος αὐτῇ, ἡ δὲ ΞΟ τῇ ΔΕ, ἔσται καὶ τὰ Λ, Ο σημεῖα ἐν τῇ ζητουμένῃ καμπύλῃ. τὰ αὐτὰ δὲ σημεῖα καὶ

(η) Πίν. XXXI. χ. 4. (θ) Πίν. XXXIV. (ι) Πίν. XXXI. χ. 4.

ϗ ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη, εἴτουν τὰ Θ εὑρεθήσονται. ἐξ οὗ δῆλον, ὅτι ἐλλειψοειδές ἐστι τὸ τῆς ζητουμένης καμπύλης σχῆμα.

ΣΥΜΕΙΩΣΙΣ Γ΄.

§. 293. Τῶν τὰς Παραβολὰς ἐμφαινουσῶν ἐξισώσεων, (κ) μία μέν ἐστιν ἡ τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, ἡ κατὰ τὸ Η, (§.234.) ἡ τὴν ἐκ τῆς τοῦ Κώνου τομῆς προκύπτουσαν δηλοῦσα· δύω δὲ αἱ τοῦ τρίτου, αἱ ἐν τῷ Θ· τρεῖς δὲ αἱ τοῦ τετάρτου, αἱ κατὰ τὸ Ι. ἐξ οὗ δῆλον, ὅτι αἱ τοῦ βαθμοῦ ν παραβολικαὶ ἐξισώσεις ἰσάριθμοι μέν εἰσι τῷ ν—1, σημαίνονται δὲ ὑπὸ τῶν ἐν τῷ Κ, ἢ ὑπὸ τῶν ἐν τῷ Λ ἐξισώσεων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄.

§. 294. Τὴν ὑπὸ τῆς ἐν τῷ Μ δοθείσης ἐξισώσεως ἐμφαινομένην τοῦ τρίτου βαθμοῦ Παραβολὴν ἀναγράψαι. Ἐπεὶ ἡ ἐν τῷ Μ ἐξίσωσις ἡ αὐτή ἐστι τῇ ἐν τῷ Ν, κείσθω τὸ y^2 ἴσον τοῖς ἐν τῷ Ξ. ἐκεῖν ἀντ' αὐτοῦ τεθέντος τοῦ ἴσου αὐτῷ ἐν τῇ κατὰ τὸ Ν ἐξισώσει, προκύψει ἡ ἐν τῷ Ο.

Παραμέτρῳ οὖν τῷ a=ΑΓ (λ) ἀναγεγράφθω Παραβολὴ ἡ ΔΑΕ, ἡ ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ Ξ ἐξισώσεως ἐμφαινομένη. (§. 236.) ληφθείσης δὲ τῆς ἀποτετμημένης ΑΒ=Ζ, τετάχθω ἡ ΒΕ, ϗ ἐπιζευχθείσης τῆς ΒΓ, ἐκβεβλήσθωσαν αἱ ΑΓ, ΒΕ. καὶ ἀπὸ μὲν τῶν Ε, Δ σημείων ἤχθωσαν αἱ ΖΕΦ, ΔΚ τῷ ΑΒ ἄξονι παράλληλοι, διὰ δὲ τοῦ Α ἡ ΚΛΦ τῇ ΓΒ. λέγω ὅτι τὰ Φ καὶ Κ σημεῖα ἐν τῇ ζητουμένῃ Παραβολῇ εἰσίν.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ ἀποτετμημένη ΑΒ=Ζ, ἡ ἄρα τεταγμένη ΒΕ=y, διὰ τὴν κατὰ τὸ Ξ ἐξίσωσιν. ἔστι δὲ ὡς

(κ) Πίν. XXXIV, (λ) XXXI. κ. 5.

ὡς ΑΓ : ΑΒ : : ΑΖ : ΖΦ, ἤτοι ὡς $\alpha : Z :: y :$ ΖΦ. διὸ ἡ ΖΦ $= \frac{Zy}{\alpha} = \chi$. ἔστι δὲ καὶ ὡς ΑΓ : ΑΒ : : ΑΥ : ΥΚ, εἴτουν ὡς $\alpha : Z :: -y :$ ΥΚ. ἡ ἄρα ΥΚ $= -\frac{Zy}{\alpha} = -\chi$. ἔστιν ἄρα ἡ μὲν ΑΖ $= y$; ἡ δὲ ΖΦ $= \chi$ καὶ ἡ μὲν ΑΥ $= -y$, ἡ δὲ ΥΚ $= -\chi$. ἐπεὶ δὲ τὸ $\frac{Zy}{\alpha} = \chi$, ἔσεται ἄρα τὸ $Z = \frac{\alpha\chi}{y}$. τεθέντος δὲ ἐν τῇ κατὰ τὸ Ξ ἐξισώσει (μ) ἀντὶ τοῦ Ζ τοῦ $\frac{\alpha\chi}{y}$, ἡ κατὰ τὸ Μ προκύψει ἐξίσωσις.

Τῷ αὐτῷ δὴ τρόπῳ, καὶ ἄλλων πορισθέντων σημείων, ἀναγραφείσεται ἡ ΦΑΚ Παραβολὴ, (ν) ἐν ᾗ ἑκάστη μὲν τῶν ΑΖ, ΑΗ, ΑΙ τὸ y ἐμφαίνουσιν, ἑκάστη δὲ τῶν ΖΓ, ΗΘ, ΙΛ, τὸ χ· ὡσαύτως ἑκάστη μὲν τῶν ΑΥ, ΑΜ, ΑΞ τὸ $-y$, ἑκάστη δὲ τῶν ΥΡ, ΜΝ, ΞΟ, τὸ $-\chi$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'.

§. 295. Τὴν ὑπὸ τῆς ἐν τῷ Π δοθείσης (ξ) ἐξισώσεως ἐμφαινομένην ἀναγράψαι Παραβολήν.

Κείσθω τὸ y^3 ἴσον τοῖς ἐν τῷ Ρ. τεθέντος οὖν ἐν τῇ κατὰ τὸ Π ἐξισώσει ἀντὶ τοῦ y^3 τοῦ ἴσου αὐτῷ, ἡ κατὰ τὸ Σ ἐξίσωσις γίνεται.

Ἀναγεγράφθω οὖν ἡ κυβικὴ Παραβολὴ ΕΑΔ, (ο) ἡ ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ Ρ ἐξισώσεως ἐμφαινομένη. (§. 294.) καὶ εἰλήφθωσαν ἀποτετμημέναι ἡ ΑΒ $= Z$, καὶ ἡ ΑΛ $= -Z$,

(μ) Πίν. XXXIV. (ν) Πίν. XXXI. σχ. 6. (ξ) Πίν. XXXIV. (ο) Πίν. XXXV. σχ. 1.

Ζ, κὴ τετάχθω ἡ μὲν ΒΕ $= y$, ἡ δὲ ΛΔ $= -y$. ἤχθω, δὲ διὰ μὲν τοῦ Α ἡ ΖΑΥ ἑκατέρᾳ τῶν ΕΒ, ΛΔ παράλληλος, διὰ δὲ τῶν Ε κὴ Δ αἱ ΖΕΦ, ΔΚ, τῷ ΛΒ ἄξονι παράλληλοι. κὴ ληφθείσης τῆς ΑΓ $= \alpha$, ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓΒ, ΓΛ. καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τοῦ Α ἡ μὲν ΑΦ τῇ ΓΒ, ἡ δὲ ΑΚ τῇ ΓΛ παράλληλος. λέγω ὅτι τὰ Φ κὴ Κ σημεῖα ἐν τῇ Παραβολῇ εἰσὶ, τῇ ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ Η ἐξισώσεως ἐμφαινομένῃ.

Ἐπεὶ γὰρ ὡς ΑΓ : ΑΒ :: ΑΖ : ΖΦ, ἤτοι ὡς α : Ζ :: y : ΖΦ, ἡ ἄρα ΖΦ $= \frac{Zy}{\alpha} = \chi$. ὁμοίως ἐπεὶ ὡς ΑΓ : ΑΛ :: ΑΥ : ΥΚ, εἴτουν ὡς $\alpha : -Z :: -y$: ΥΚ ἡ ἄρα ΥΚ $= \frac{Zy}{\alpha} = \chi$. ἔστιν οὖν ἡ μὲν ΑΖ $= y$, ἡ δὲ ΖΦ $= \chi$, καὶ ἡ μὲν ΑΥ $= -y$, ἡ δὲ ΥΚ $= \chi$. Ἐκ τούτων οὖν δῆλον, ὅτι τὸ τῆς ζητουμένης Παραβολῆς σχῆμα ὅμοιόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς τοῦ Κώνου τομῆς.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ΄.

§. 296. Τὴν ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ Τ (π) δοθείσης ἐξισώσεως ἐμφαινομένην Παραβολὴν ἀναγράψαι.

Κείσθω τὸ y^4 ἴσον τοῖς ἐν τῷ Υ. ἐκοῦν ἐν τῇ κατὰ τὸ Τ ἐξισώσει τεθέντος ἀντὶ τοῦ y^4 τοῦ ἴσου αὐτῷ, ἡ κατὰ τὸ Φ προκύψει ἐξίσωσις.

Ἀναγεγράφθω οὖν Παραβολὴ ἡ ΔΑΕ, (ρ) ἡ ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ Υ ἐμφαινομένη ἐξισώσεως. (§. 294.) κὴ τῆς αὐτῆς κατασκευῆς γινομένης, τῆς κὴ ἐν τῷ πρώτῳ προβλήματι, ἔσονται τὰ Φ καὶ Κ σημεῖα ἐν τῇ ζητου-

(π) Πίν. XXXIV. (ρ) XXXI. σχ. 5.

τημένη Παραβολῇ. διὸ ἡ ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ Τ δηλουμένη ἐξισώσεως Παραβολὴ ἔσεται (χ. 6.) ἡ ΦΑΚ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 297. Ἐνθεῦθεν πορίζεται ἡ γενικὴ μέθοδος τοῦ πάσας ἀναγράφειν τὰς Παραβολάς, τὰς ὑπὸ ἐξισώσεων ἐμφαινομένας, ἐν αἷς τὸ ἕτερον τῶν ἀγνώστων, οἷον τὸ χ, τὴν μονάδα ἐκθέτην ἔχει. ἐμφαινέτω γὰρ ἡ κατὰ τὸ Χ ἐξίσωσις (σ) ἑκάστην τῶν εἰρημένων. καὶ κείσθω τὸ ψ^ν⁻¹ ἴσον τοῖς ἐν τῷ Ψ. καὶ ἐν τῇ κατὰ τὸ Χ ἐξισώσει, τῇ αὐτῇ ἴσῃ τῇ κατὰ τὸ Ω τεθήτω ἀντ' αὐτοῦ τὸ ἴσον αὐτῷ. ἐκεῖν προκύψει ἡ κατὰ τὸ α ἐξίσωσις, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ β γίνεται, ἐξ αὐτῆς δὲ ἡ κατὰ τὸ γ. διὰ τῶν ἐξισώσεων οὖν τῶν ἐν τοῖς Ψ καὶ γ πορισθήσονται τὰ σημεῖα, δι' ὧν ἀναγραφήσεται ἡ ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ Χ ἐξισώσεως δηλουμένη Παραβολή. καὶ ἐὰν μὲν τὸ ν περιττὸν σημαίνῃ ἀριθμόν, κατασκευῇ μὲν χρηστέον τῇ τοῦ πρώτου προβλήματος, (§. 294.) τὸ δὲ τῆς Παραβολῆς σχῆμα, ἔσεται τὸ ΦΑΚ· (τ) ἐὰν δὲ ἄρτιον, τῇ τοῦ δευτέρου, (§. 295) τὸ δὲ σχῆμα τὸ τῆς κωνικῆς ἔσεται Παραβολῆς.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ

§. 298. Ἡ δὲ γενικὴ μέθοδος τοῦ ἀναγράφειν τὰς Παραβολάς, τὰς ὑπὸ ἐξισώσεων ἐμφαινομένας, ἐν αἷς ἑκάτερον τῶν ἀγνώστων ἐκθέτην ἔχει τῆς μονάδος μείζονα, ἐστὶν ἡ ἑξῆς· ἡ ἐν τῷ δ ἐξίσωσις (υ) ἑκάστην τῶν εἰρημένων δηλοῖ ἐξισώσεων. ἔστι δὲ τὸ μ μεῖζον τοῦ ν, ἐμφαίνει δὲ ἑκάτερα ἀριθμοὺς ἤτοι περιττούς, ἢ ἀρτίους ἢ τὸ μὲν περιττὸν ἀριθμόν, τὸ δὲ ἄρτιον. καίσθω δὴ τὴν ἐν τῷ δ ἐξίσωσιν ἐκ τῶν ἐν τοῖς ε καὶ ζ γίνεσθαι δι

(σ) Πίν. XXXIV. (τ) XXXI. χ. 6. (υ) Πίν. XXXIV.

ὧν ἑκατέρα ἐκ τῶν προδιαληφθεισῶν ἐξισώσεων ἐςὶν, ἐν αἷς δῆθεν τὸ ἕτερον τῶν ἀγνώςων τὴν μονάδα ἐκθέτην ἔχει. ἀναγραφεισῶν δὲ τῶν ὑπ' αὐτῶν ἐμφαινομένων Παραβολῶν, τό, τε y καὶ x εὑρεθήσονται, καὶ σημεῖα πορισθήσονται, δι' ὧν ἡ Παραβολὴ γραφθήσεται, ἡ ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ δ ἐξισώσεως σημαινομένη. ἰςέον δὲ, ὅτι διὰ τὸ Z ἴσον εἶναι τῷ Π. τέτε γὰρ κειμένε, ἐκ τῶν ἐν τοῖς ε καὶ ζ ἐξισώσεων ἡ κατὰ τὸ δ γίνεται. ἐπεὶ γὰρ τὸ μὲν Z^{y} ἴσον τοῖς ἐν τῷ ε, τὸ δὲ Π^{μ} τοῖς ἐν τῷ ζ, τὸ μὲν ἄρα Z ἴσον τοῖς ἐν τῷ η, τὸ δὲ Π τοῖς ἐν τῷ θ. ἐξ ὧν ἡ κατὰ τὸ ι ἐξίσωσις γίνεται. καὶ τῆς μὲν ν δυνάμεως ἑκατέρωθεν ληφθείσης, ἡ ἐν τῷ κ' τῆς δὲ μ, ἡ ἐν τῷ λ' πάντων δὲ τῶν αὐτῆς μερῶν διὰ τῦ $\alpha^{\mu\nu-\mu}$ διαιρεθέντων, ἡ ἐν τῷ μ ἐξίσωσις γίνεται, ἐξ ἧς ἡ ἐν τῷ ν, ἡ αὐτὴ ἴσα τῇ κατὰ τὸ δ. λευκαίνεται δὲ ἡ μέθοδος αὕτη διὰ τῶν ἑξῆς προβλημάτων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'.

§. 299. Τὴν ὑπὸ τῆς ἐν τῷ ξ δοθείσης ἐξισώσεως ἐμφαινομένην ἀναγράψαι Παραβολήν.

Ἔςιν ἄρα ἐν τῇ κατὰ τὸ δ γενικῇ ἐξισώσει τὸ μὲν $\mu=3$, τὸ δὲ $\nu=2$· ὅπερ ἐςὶ τὸ μὲν μ περιττὸν, τὸ δὲ ν ἄρτιον σημαίνει ἀριθμόν. καὶ ἡ μὲν κατὰ τὸ ε ἐξίσωσις τὴν κατὰ τὸ ο ἐμφαίνει, ἡ δὲ κατὰ τὸ ζ τὴν κατὰ τὸ π.

Ἐκκείσθω ὖν εὐθεῖά τις ἡ ΗΝ, (φ) πρὸς ὀρθὰς δὲ αὐτῇ ἔςω ἡ ΣΔΡ. καὶ τεμνέτωσαν δίχα τὰς περὶ τὸ Λ ὀρθὰς γωνίας αἱ ΕΔ, ΓΒ. ἀναγεγράφθωσαν δὲ Παραβολαὶ, ὅτε ΕΑΒ, ἣν ἡ κατὰ τὸ ο ἐξίσωσις ἐμφαίνει, (§. 260.) καὶ

(φ) Πιν. XXXV. σχ. 2.

ϰ ἡ ΕΛΔ, ἡ ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ π δηλεμένη. (§. 294.) εἰλήφθω δὲ ἡ ἀποτετμημένη ΑΝ = y. ϰαὶ ἀπὸ τῦ Ν τετάχθω ἡ ΝΜ. ϰ ἤχθω ἀπὸ μὲν τῦ Μ ἡ ΜΖ τῇ ΑΝ, ἀπὸ δὲ τῦ Ζ ἡ ΖΟ τῇ ϛΡ, ἀπὸ δὲ τῶν Ο ϰαὶ Κ αἱ ΟΠ, ΚΨ τῇ ΑΝ, ἀπὸ δὲ τῦ Π ἡ ΠΨ τῇ ϛΡ παράλληλος. λέγω δὴ, ὅτι τὰ σημεῖα Λ, Ψ ἐν τῇ ζητεμένῃ Παραβολῇ εἰσὶ, τῇ ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ ξ δοθείσης ἐξισώσεως ἐμφαινομένῃ.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ μὲν ΔΝ = y, ἡ ἄρα τεταγμένη ΝΜ = Ζ, διὰ τὴν κατὰ τὸ ο ἐξίσωσιν. ἄρα ϰ ἡ ΦΖ = ΜΝ = Ζ. ἀλλὰ τὸ Ζ = Π, (§. 298.) ἄρα ἡ ΦΖ = Π. ἐπεὶ ὖν ἡ τεταγμένη ΖΦ = Π, ἡ ἄρα ἀποτετμημένη ΑΦ = χ διὰ τὴν κατὰ τὸ π ἐξίσωσιν. ἔςι δὲ ϰαὶ ἡ ΦΛ = ΚΝ = ΑΝ = y. ἐπεὶ δὲ ἡ μὲν ΑΗ = ΗΠ = ΦΟ = ΑΦ = χ, ἡ ἄρα ΑΗ = − χ, ἡ δὲ ΗΨ = ΦΛ = y. ἐκῦν ἡ μὲν ἀποτετμημένη ΑΦ = χ, ἡ δὲ τεταγμένη ΦΛ = y, ϰαὶ ἡ μὲν ΑΗ = − χ, ἡ δὲ ΗΨ = y. τὰ ἄρα Λ ϰ Ψ σημεῖα ἐν τῇ ζητεμένῃ Παραβολῇ εἰσὶν, ἧς ϛῆμα (σχ. 3.) τὸ ΔΛΨ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε'.

§. 300. Τὴν ὑπὸ τῆς ἐν τῷ ϱ (χ) δοθείσης ἐξισώσεως ἐμφαινομένην ἀναγράψαι Παραβολήν.

Ἔςιν ἄρα ἐν τῇ κατὰ τὸ δ γενικῇ ἐξισώσει, τὸ μὲν μ = 5, τὸ δὲ ν = 3, ἑκάτεροι δὲ ἀριθμοὶ περιττοί. διὸ ἡ μὲν κατὰ τὸ ϱ ἐξίσωσις, τὴν κατὰ τὸ σ ἐμφαίνει· ἡ δὲ κατὰ τὸ ς, τὴν κατὰ τὸ τ.

Κείσθωσαν ὖν εὐθεῖαι αἱ ΗΝ, Ρϛ, ΓΒ, ΕΔ (ψ) ὡς ϰ ἐν τῷ προλαβόντι προβλήματι. ϰ ἀναγεγράφθωσαν Παραβολαὶ ἥτε ΕΜΑΔ, ἡ ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ σ ἐμφαινομένη

(χ) Πιν. XXXIV. (ψ) Πιν. XXXV σχ. 4.

μένη ἐξισώσεως, (§. 294.) καὶ ἡ ΕΖΑΔ, ἡ ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ τ δηλεμένη. (§. 296.) καὶ εἰλήφθω ἡ ἀποτετμημένη ΑΝ=y. καὶ ἀπὸ τῆ Ν τετάχθω ἡ ΝΜ, καὶ ἐκβεβλήσθω κατὰ τὸ Τ. καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ μὲν τῶν Μ, Κ, Τ σημείων αἱ ΜΖ, ΚΛ, ΤΨ τῇ ΗΝ, ἀπὸ δὲ τῆ Ζ ἡ ΖΦ τῇ ΡϚ, ἀπὸ δὲ τῆ Ο ἡ ΟΠ τῇ ΗΝ, ἀπὸ δὲ τῆ Π ἡ ΠΨ τῇ ΡϚ παράλληλος. λέγω δή, ὅτι τὰ σημεῖα Λ καὶ Ψ ἐν τῇ ζητεμένῃ Παραβολῇ ἔσονται, τῇ ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ ρ ἐξισώσεως ἐμφαινομένῃ.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ ἀποτετμημένη ΑΝ=y, ἡ ἄρα τεταγμένη ΝΜ=Ζ, διὰ τὴν κατὰ τὸ σ ἐξίσωσιν. ἐπεὶ δὲ τὸ Ζ=Π, (§. 298.) ἔστιν ἄρα ἡ ΝΜ=Π. ἄρα καὶ ἡ ΖΦ=Π. ἐπεὶ ἂν ἡ τεταγμένη ΖΦ=Π, ἡ ἄρα ἀπετετμημένη ΛΦ=χ, διὰ τὴν κατὰ τὸ τ ἐξίσωσιν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΛΦ=ΚΝ=ΑΝ=y. πάλιν ἐπειδὴ ἡ ΑΗ=ΠΡ=ΡΑ=ΟΦ=ΛΦ, ἡ ἄρα ΑΗ=−χ, ἡ δὲ ΗΨ=ΝΤ=ΑΝ=y. τὰ μὲν ἄρα Λ καὶ Ψ σημεῖα ἐν τῇ ζητεμένῃ Παραβολῇ εἰσὶ, τὸ δὲ σχῆμα αὐτῆς ὅμοιον τῷ ἑκατέρας τῶν ἐν τῇ κατασκευῇ ἀναγραφθεισῶν Παραβολῶν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ϛ΄.

§. 301. Τὴν Παραβολὴν ἀναγράψαι, τὴν ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ y (ω) δοθείσης ἐξισώσεως ἐμφαινομένην.

Ἐν τῇ κατὰ τὸ δ ἄρα γενικῇ ἐξισώσει τὸ μὲν μ=4, τὸ δὲ ν=2, ἑκάτεροι δὲ ἀριθμοὶ ἄρτιοι. διὸ δὴ ἡ μὲν κατὰ τὸ ε ἐξίσωσις τὴν κατὰ τὸ φ σημαίνει, ἡ δὲ κατὰ τὸ ζ τὴν κατὰ τὸ χ.

Κείσθωσαν ἂν εὐθεῖαι αἱ ΟΝ, ΧΥ, ΕΔ, ΓΒ, (α) ὡς καὶ ἐν τῷ τετάρτῳ προβλήματι. (§. 299.) καὶ ἀναγεγράφ-

(ω) Πίν. XXXIV. (α) Πίν. XXXV. Σχ. 5.

γραφθω Παραβολὴ ἡ μὲν ΕΜΛΒ, ἡ ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ φ ἐξισώσεως δηλυμένη, ἡ δὲ ΕΖΛΒ, ἡ ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ χ. (§. 260. 299.) καὶ ληφθείσης τῆς ἀποτετμημένης ΛΝ = y, τετάχθω ἡ ΝΜ, καὶ ἐκβεβλήσθω κατὰ τὸ Π. καὶ ἀπὸ τῶν Μ, Κ, Π σημείων ἤχθωσαν αἱ ΜΖ, ΚΨ, ΠΤ τῇ ΛΝ, ἀπὸ δὲ τῦ Ζ ἡ Ζϛ τῇ ΧΥ, ἀπὸ δὲ τῦ Ρ ἡ ΡΗ τῇ ΛΝ, διὰ δὲ τῦ Η ἡ ΨΗΤ τῇ ΧΥ. λέγω δὴ, ὅτι τὰ σημεῖα Λ, ϛ, Ψ, Τ ἐν τῇ ζητυμένῃ εἰσὶ Παραβολῇ, ἧς ἡ ἐξίσωσις ἐν τῷ y.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ ἀποτετμημένη ΛΝ = y, ἡ ἄρα τεταγμένη ΝΜ = Ζ, διὰ τὴν κατὰ τὸ φ ἐξίσωσιν. ἀλλὰ τὸ Ζ = Π, (§. 298.) ἄρα καὶ ἡ ΝΜ = ΖΦ = Π. ἐπεὶ ὖν ἡ τεταγμένη ΖΦ = Π, ἡ ἄρα ἀποτετμημένη ΛΦ = χ, διὰ τὴν κατὰ τὸ χ ἐξίσωσιν. ἔτι δὲ καὶ ἡ ΛΦ = ΚΝ = ΛΝ = y. πάλιν ἐπεὶ ἡ Φϛ = ΝΠ = ΛΝ, ἡ ἄρα Φϛ = $-y$. ἐπεὶ δὲ καὶ ἡ ΛΟ = ΟΗ = ΦΡ = ΛΦ, ἡ ἄρα ΛΟ = $-$χ, ἡ δὲ ΟΤ = Φϛ = $-y$, ἡ δὲ ΟΨ = ΔΦ = y. τὰ ἄρα Λ, ϛ, Ψ, Τ σημεῖα ἐν τῇ ζητυμένῃ Παραβολῇ εἰσίν. ἐξ ὗ δῆλον, ὅτι τὸ σχῆμα αὐτῆς ἐςὶ τὸ ΨΛΤΛΛϛ. χ. 6.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ζ′.

§. 302. Τὴν ὑπὸ τῆς ἐν τῷ ψ (β) δοθείσης ἐξισώσεως ἐμφαινομένην ἀναγράψαι Παραβολήν.

Οὐκῦν ἐν τῇ κατὰ τὸ δ γενικῇ ἐξισώσει, τὸ μὲν μ = 4, τὸ δὲ ν = 3, καὶ τὸ μὲν ἄρτιος, τὸ δὲ περιττὸς ἀριθμός. ἡ μὲν ἄρα κατὰ τὸ ε ἐξίσωσις, τὴν κατὰ τὸ ω ἐμφαίνει· ἡ δὲ κατὰ τὸ ζ, τὴν κατὰ τὸ Λ.

Κα-

(β) πι. XXXIV.

Κάθθωσαν ἐν εὐθείᾳ αἱ ΡΥ, ΗΝ, ΕΔ, ΓΒ, (γ) ὡς καὶ ἐν τῷ τετάρτῳ προβλήματι. (§. 299.) καὶ ἀναγεγράφθω Παραβολὴ ἡ ΕΜΛΔ, ἡ ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ ω ἐξισώσεως δηλȣμένη, (§. 294.) ὡσαύτως ἡ ΕΖΛΒ, ἣν ἐμφαίνει ἡ κατὰ τὸ Α. (§. 295.) καὶ ληφθείσης τῆς ἀποτετμημένης ΑΝ = y, τετάχθω ἡ ΝΜ, καὶ ἐκβεβλήσθω κατὰ τὸ Π. καὶ ἀπὸ μὲν τῶν Μ, Κ, Π σημείων ἤχθωσαν αἱ ΜΖ, ΚΛ, ΠΨ τῇ ΗΝ παράλληλοι, ἀπὸ δὲ τȣ̃ Ζ ἡ ΖΨ τῇ ΜΠ. λέγω, ὅτι τὰ Λ, Ψ σημεῖα ἐν τῇ ζητȣμένῃ Παραβολῇ εἰσὶ, τῇ ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ ψ ἐμφαινομένῃ δοθείσης ἐξισώσεως.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ μὲν ἀποτετμημένη ΑΝ = y, ἡ ἄρα τεταγμένη ΝΜ = Ζ, διὰ τὴν κατὰ τὸ ω ἐξίσωσιν. ἔστι δὲ τὸ Ζ = Π, (§. 298.) ἡ ἄρα ΝΜ = Π. διὸ καὶ ἡ ΖΦ = ΝΜ = Π. ἡ ἄρα ἀποτετμημένη ΑΦ = χ, διὰ τὴν κατὰ τὸ Α ἐξίσωσιν. ἔστι δὲ ἡ μὲν ΦΛ = ΝΚ = ΑΝ = y, ἡ δὲ ΦΨ = ΝΠ = ΝΚ = − y. διὸ τὰ Λ, Ψ σημεῖα ἐν τῇ ζητȣμένῃ Παραβολῇ εἰσὶ, σχῆμα ἐχȣ́σῃ τῷ τῆς κωνικῆς Παραβολῆς ὅμοιον.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'.

§. 303. Τῶν Παραβολῶν τȣ́των ἀναγραφεισῶν, καὶ αἱ λοιπαὶ αἱ τȣ̃ ὁποιȣ̃ν βαθμȣ̃ τῷ αὐτῷ ἀναγραφθήσονται τρόπῳ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'.

§. 304. Αἱ περὶ τὸν αὐτὸν ἄξονα ἤδη ἀναγεγραμμέναι Παραβολαὶ, καὶ κοινὴν ἔχȣσαι τὴν κατὰ κορυφὴν αὐτῶν ἐφαπτομένην συμβάλλȣσιν ἀλλήλαις κατὰ τὸ σημεῖον, καθ' ὃ ἡ εὐθεῖα ἡ διχοτομȣ̃σα τὴν ὀρθὴν γωνίαν, οἷον ἡ ΔΕ, αὐτὰς τέμνει. ἔστω γὰρ τὸ Π ἴσον ὂν τῷ Ζ, (§. 298.) ἑκατέρας τῶν Παραβολῶν

(γ) Πιν. ΧΧΧV. σ. 7.

λων τεταγμένην ἐμφαίνει· καὶ πρὸ μὲν τῆς συμπτώσεως αἱ Παραβολαὶ κεῖνται μεταξὺ τῆς κατὰ κορυφὴν ἐφαπτομένης, οἷον τῆς ΒΥ, καὶ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν διχοτομούσης ΑΓ· μετὰ δὲ τὴν σύμπτωσιν, μεταξὺ τῆς αὐτῆς εὐθείας καὶ τοῦ ἄξονος. καὶ ταῦτα μὲν περὶ τῶν Παραβολῶν, ῥητέον δὲ καὶ περὶ τῶν Ὑπερβολῶν.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Γ'.

§. 305. Ἡ μὲν κοινὴ Ὑπερβολὴ μία ἐστὶ, ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ Α (δ) ἐξισώσεως ἐμφαινομένη (§. 257.) αἱ δὲ τοῦ δευτέρου βαθμοῦ δύο εἰσὶν, ὑπὸ τῶν κατὰ τὸ Β δηλούμεναι, καὶ ὥσπερ μία ἐκλαμβανόμεναι διὰ τὴν τῶν ἐκθετῶν ταυτότητα· αἱ δὲ τοῦ τρίτου τρεῖς, ὑπὸ τῶν κατὰ τὸ Γ σημαινόμεναι, καὶ ὡς δύο συλλογιζόμεναι διὰ τὸν αὐτὸν λόγον· αἱ δὲ τοῦ τετάρτου τέσσαρες, αἱ ἐν τῷ Δ κείμεναι, καὶ ὡς δύο νομιζόμεναι. ἡ γὰρ πρώτη τῆς τετάρτης οὐδὲν διαφέρει, ὡσαύτως καὶ ἡ δευτέρα τῆς τρίτης. ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐξισώσεων τοῦ βαθμοῦ ν, τῷ μὲν $\frac{1}{2}\nu$ ἴσος ἔσται, ἐὰν τὸ ν ἄρτιον ἐμφαίνῃ ἀριθμόν· τῷ δὲ $\frac{\nu+1}{2}$, ἐὰν περιττόν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Η'.

§. 306. Τὴν Ὑπερβολὴν ἀναγράψαι τὴν ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ Α δοθείσης ἐξισώσεως ἐμφαινομένην.

Ἐκκείσθω εὐθεῖα ἡ ΖΕ, (ε) πρὸς ὀρθὰς δὲ ἔστω αὐτῇ ἡ ΓΚ. καὶ εἰλήφθω ἡ μὲν ΑΓ $= \beta$, ἡ δὲ ΑΒ $= \alpha$, τυχοῦσα δέ τις ἡ ΑΕ $=$ ΑΖ $= \gamma$. καὶ ἐπιζευχθεισῶν τῶν ΓΕ, ΓΖ, ἤχθωσαν ἀπὸ μὲν τῶν Ε, Β, Ζ σημείων αἱ ΕΦ, ΒΔ, ΖΨ τῇ ΑΓ παράλληλοι, ἀπὸ δὲ τοῦ Γ ἡ ΓΔ τῇ ΖΕ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ ἡ μὲν ΔΦ τῇ ΓΕ, ἡ δὲ

(δ) Πιν. XXXVI. (ε) Πιν. XXXV. σχ. 8.

δὲ ΔΨ τῇ ΓΖ. λέγω, ὅτι τὰ Φ καὶ Ψ σημεῖα ἐν τῇ ζητουμένῃ Ὑπερβολῇ ἔσονται, τῇ ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ Α δοθείσης ἐξισώσεως ἐμφαινομένῃ.

Ἐπεὶ γὰρ ὅμοιά εἰσι τὰ ΓΑΕ, ΓΔΜ τρίγωνα, ἐστὶν ὡς ΑΕ : ΑΓ :: ΓΔ : ΔΜ, ἤτοι ὡς $y : \beta :: \alpha :$ ΔΜ. ἡ ἄρα ΔΜ $= \frac{\alpha\beta}{y}$. ἀλλὰ τὸ $\frac{\alpha\beta}{y} = \chi$, ὡς ἐκ τῆς δοθείσης ἐξισώσεως δῆλον. ἡ ἄρα ΔΜ $= \chi$. διὸ καὶ ἡ ΕΦ $=$ ΔΜ $= \chi$. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ΑΖ : ΑΓ :: ΖΗ : ΖΨ, ἤτοι ὡς $-y : \beta :: \alpha :$ ΖΨ $= \frac{\alpha\beta}{-y} = -\chi$.

Τῷ αὐτῷ τρόπῳ καὶ ἄλλων ὁρισθέντων σημείων γραφθήσεται ἐν ταῖς ἀσυμπτώτοις ΙΚ, ΖΕ ἡ κωνικὴ Ὑπερβολή, ἡ ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ Λ δοθείσης ἐξισώσεως ἐμφαινομένη.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Θ΄.

§. 307. Τὴν Ὑπερβολὴν τοῦ δευτέρου βαθμοῦ ἀναγράψαι, τὴν ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ Ε (ζ) δοθείσης ἐξισώσεως ἐμφαινομένην.

Κείσθω τὸ $y\chi$ ἴσον τῷ ἐν τῷ Ζ. οὐκοῦν τεθέντος ἀντ' αὐτοῦ ἐν τῇ κατὰ τὸ Ε ἐξισώσει τοῦ αZ, προκύψει ἡ κατὰ τὸ Η ἐξίσωσις.

Ἐν ταῖς ἀσυμπτώτοις οὖν ΦΡ, ΖΓ (η) γεγράφθωσαν ἀντικείμεναι Ὑπερβολαὶ αἱ ΔΛ, ΚΗ, αἱ ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ Η ἐξισώσεως ἐμφαινόμεναι. (§. 306.) καὶ ληφθείσης τῆς μὲν ΑΒ $= \alpha$, τῆς δὲ τῇ ΑΦ παραλλήλου ΒΛ $= \beta$, καὶ τῆς ἀποτετμημένης ΑΓ $= y$, τετάχθω ἡ ΓΔ. καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς ΑΔ, ληφθείσης τε τῆς ΑΖ $=$ ΑΓ, ἤχθω ἀπὸ μὲν τοῦ Ν ἡ ΨΝΕ τῇ ΖΓ παραλ-

(ζ) Πιν. XXXVI. (η) Πιν. XXXVII. σχ. 1.

ράλληλος, ἀπὸ δὲ τῦ Ζ ἡ ΖΨ τῇ ΦΡ. λέγω, ὅτι τὰ Ε καὶ Ψ σημεῖα ἐν τῇ ζητυμένῃ Ὑπερβολῇ εἰσὶ, τῇ ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ Ε σημαινομένῃ δοθείσης ἐξισώσεως.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ ἀποτεμημένη ΑΓ $=y$, ἡ ἄρα τεταγμένη ΓΔ $=$ Ζ, διὰ τὴν κατὰ τὸ Η ἐξίσωσιν. (ι) ἔςι δὲ ὡς ΑΓ : ΓΔ :: ΑΒ : ΒΝ $=$ ΓΕ, ἤτοι ὡς y : Ζ :: α: ΓΕ $=\frac{\alpha Z}{y}$. ἀλλὰ τὸ $\frac{\alpha Z}{y}=\chi$, ὡς ἐκ τῆς κατὰ τὸ Ζ ἐξισώσεως δῆλον, ἡ ἄρα ΓΕ $=\chi$. ἔςι δὲ καὶ ἡ ΑΖ $=-y$, καὶ ἡ ΖΨ $=$ ΓΕ $=\chi$. διὸ τὰ Ε καὶ Ψ σημεῖα ἐν τῇ ζητυμένῃ Ὑπερβολῇ εἰσίν. ἐξ ὧ δῆλον ὅτι τὸ σχῆμα αὐτῆς ἐςὶ τὸ ΒΕ, ΔΨ. (κ)

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'.

§. 308. Τὴν Ὑπερβολὴν ἀναγράψαι, τὴν ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ Θ (Πίν. XXVI.) δοθείσης ἐξισώσεως ἐμφαινομένην.

Κείσθω τὸ $y\chi$ ἴσον τῷ ἐν τῷ Ι. ὧκῦν ἀντ' αὐτῦ τεθέντος τῦ ἴσυ αὐτῷ ἐν τῇ κατὰ τὸ Θ ἐξισώσει, ἡ κατὰ τὸ Κ γίνεται ἐξίσωσις.

Ἀναγεγράφθωσαν ἐν Ὑπερβολαὶ αἱ ΛΔ, ΚΟ, (Πίν. XXXVII. χ. 3.) αἱ ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ Κ ἐμφαινόμεναι ἐξισώσεως. καὶ ληφθείσης τῆς μὲν ΑΒ $=\alpha$, τῆς δὲ ΒΛ $=\beta$, τῆς δὲ ἀποτετμημένης ΑΓ $=$ ΑΖ $=y$, τετάχθω ἡ ΓΔ. καὶ ἀχθείσης τῆς ΔΚ τῇ ΖΓ παραλλήλυ, καὶ ἀπὸ τῦ Α τῆς ΑΦ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΖΓ, ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΦΓ, ΦΖ. καὶ διὰ μὲν τῦ Μ ἤχθω ἡ μὲν ΜΕ τῇ ΦΓ, ἡ δὲ ΜΨ τῇ ΦΖ παράλληλος, διὰ δὲ τῦ Ζ ἡ ΚΖΨ τῇ ΦΑ. λέγω, ὅτι τὰ Ε καὶ Ψ σημεῖα ἐν τῇ ζητυμένῃ Ὑπερ-

(ι) Πίν. XXXVI. (κ) Πίν. XXXVII. χ. 2.

Υ'περβολῆ εἰσὶ, τῆ ἐμφαινομένη ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ Θ δοθείσης ἐξισώσεως.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ ἀποτετμημένη ΑΓ $=y$, ἡ ἄρα τεταγμένη ΓΔ$=Z$ διὰ τὴν κατὰ τὸ Κ ἐξίσωσιν. ἔςι δὲ διὰ τὴν τῶν τριγώνων ΦΑΓ, ΦΝΜ ὁμοιότητα ὡς ΑΓ: ΑΦ :: ΦΜ : ΜΝ, ἤτοι ὡς $y : Z :: \alpha :$ ΜΝ. διὸ ἡ ΜΝ $= \frac{\alpha Z}{y} = \chi$. ἐπεὶ δὲ καὶ ὡς ΑΖ : ΑΦ :: ΦΜ : ΦΗ, ἤτε ὡς $-y : Z :: \alpha :$ ΦΗ, ἡ ἄρα ΦΗ$= \frac{\alpha z}{-y} = -\chi$. ἀλλ' ἡ ΖΨ$=$ΦΗ, ἡ ἄρα ΖΨ $=-\chi$. τὰ ἄρα Ε καὶ Ψ σημεῖα ἐν τῆ ζητεμένη Υ'περβολῆ εἰσίν· ἧς τὸ σχῆμα ὅμοιον τῷ τῶν ἐν τοῖς ἀσυμπτώτοις ἀντικειμένων κωνικῶν Ὑπερβολῶν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΑ'.

§. 309. Τὴν Υ'περβολὴν ἀναγράψαι, τὴν ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ Λ (λ) δοθείσης ἐξισώσεως ἐμφαινομένην.

Κείσθω τὸ $y\chi$ ἴσον τῷ ἐν τῷ Μ. ἐκεῖν ἀντ' αὐτῦ τῦ ἴσυ αὐτῷ τεθέντος ἐν τῆ κατὰ τὸ Λ ἐξισώσει, προκύψει ἡ ἐν τῷ Ν ἐξίσωσις.

Ἀναγεγράφθωσαν ἒν Ὑπερβολαὶ αἱ ΛΔ, ΚΗ (μ) αἱ ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ Ν ἐξισώσεως ἐμφαινόμεναι. (§. 308.) καὶ γενομένης τῆς αὐτῆς κατασκευῆς, τῆς καὶ ἐν τῷ ἐννάτῳ προβλήματι, (§. 307.) εὑρεθήσονται τὰ Ε καὶ Ψ σημεῖα ἐν τῆ ζητεμένη Ὑπερβολῆ, ἧς τὸ σχῆμα τῷ ΒΕ, ΔΨ ὅμοιον. κ. ἃ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΒ'.

§. 310, Τὴν ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ Ξ (ν) δοθείσης ἐξισώσεως ἐμφαινομένην ἀναγράψαι Ὑπερβολήν.

 Κεί-

(λ) Πι. XXXVI. (μ) XXXVII. κ. 1. (ν) Πιν. XXXVI.

Κάθα τὸ y/χ. ἴσον τῷ ἐν τῷ Ο. ἀντ' αὐτῦ ἔν τῶ ἴσυ αὐτῷ ἐν τῇ κατὰ τὸ Ξ ἐξισώσει τεθέντος, ἡ κατὰ τὸ Π ἐξίσωσις προκύψει.

Ἀναγεγράφθωσαν ἔν Ὑπερβολαὶ αἱ ΛΔ, ΚΟ, (ξ) αἱ ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ Π ἐξισώσεως σημαινόμεναι. (§. 308.) ϗ γενομένης τῆς αὐτῆς κατασκευῆς, τῆς καὶ τῷ ἀκάτω προβλήματι, εὑρεθήσονται τὰ Ε. καὶ Ψ σημεῖα ἐν τῇ ζητεμένῃ Ὑπερβολῇ κείμενα, ἧς τὸ χῆμα ὅμοιον τῷ ΛΔ, ΚΠ, (σχ. 1.) τυτέςι τῷ τῶν κωνικῶν Ὑπερβολῶν.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 311. Ἐντεῦθεν ἡ γενικὴ μέθοδος πορίζεται τῦ ἀναγράφειν πᾶσαν Ὑπερβολὴν ὑπὸ ἐξισώσεως δηλεμένην, ἐν ᾗ τὸ ἕτερον τῶν ἀγνώςων τὴν μονάδα ἐκθέτην ἔχει. ἐπεὶ γὰρ πᾶσαν τοιαύτην ἐξίσωσιν ἡ κατὰ τὸ Ρ σημαίνει, ἐὰν τεθῇ τὸ χ/y ἴσον τοῖς ἐν τῷ Σ, καὶ ἀντ' αὐτῦ τὸ ἴσον αὐτῷ τεθῇ ἐν τῇ κατὰ τὸ Ρ ἐξισώσει, ἡ κατὰ τὸ Τ γίνεται ἐξίσωσις. ἀναγραφείσης ἔν τῆς Ὑπερβολῆς, τῆς ὑπ' αὐτῆς δηλεμένης, εὑρεθήσονται τὰ χ καὶ y, ὅπερ ἐςὶ τὰ σημεῖα, δι' ὧν ἡ ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ Ρ ἐξισώσεως ἐμφαινομένη Ὑπερβολὴ ἀναγραφήσεται. καὶ ἐὰν μὲν τὸ ν—1 ἄρτιος ᾖ ἀριθμὸς, κατασκευῇ χρηςέον, τῇ τῦ δεκάτυ προβλήματος· τὸ δὲ τῆς Ὑπερβολῆς χῆμα, τὸ ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ Ρ δοθείσης ἐξισώσεως ἐμφαινόμενον ὅμοιον ἔσεται τῷ τῶν κωνικῶν Ὑπερβολῶν, τῶν ἐν ταῖς ἀσυμπτώτοις· ἐὰν δὲ τὸ ν—1 περιττὸς, κατασκευῇ μὲν χρηςέον τῇ τῦ ἐννάτυ προβλήματος, τὸ δὲ τῆς ζητεμένης Ὑπερβολῆς χῆμα ὅμοιον ἔςαι τῷ ΒΕ, ΔΨ. (χ. 2.)

ΣΗ.

(ξ) Πίν. XXXVII. χ. 3.