ΚΕΦ. ΚΔ΄.

Περὶ γεωμετρικῶν τόπων, ϗ τῶν δι' αὐτῶν ἐπιλυομένων ἀορίστων προβλημάτων.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α΄.

§. 282. Τόπος γεωμετρικὸς λέγεται εὐθεῖα, ἢ κύκλος, ἢ κώνου τομὴ, ἢ ὁποιαοῦν καμπύλη, δι' ἧς τὸ ἀόριστον ἐπιλύεται πρόβλημα.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β΄.

§. 283. Ἅπαντα τὰ ἀόριστα γεωμετρικὰ προβλήματα διὰ τῶν γεωμετρικῶν ἐπιλύεται τόπων· τινὰ μὲν τῇ εὐθείας καὶ κύκλου, τινὰ δὲ τῇ εὐθείας ϗ κώνου τομῆς ἢ καμπύλης, τινὰ δὲ τῇ δύο κώνου τομῶν, ἢ δύο ὁποιωνοῦν καμπύλων διατομῇ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄.

§. 284. Δοθείσης τῆς θέσεως τῶν ΑΥ, ΑΨ, (σ) ἔτι τῆς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένης ΥΑΨ γωνίας, εὑρεῖν μεταξὺ αὐτῶν σημεῖα, ἀφ' ὧν αἱ ἀγόμεναι εὐθεῖαι ϗ γωνίας περιέχουσαι δοθείσας, λόγον ἔχουσι δοθέντα πρὸς ἀλλήλας, οἷον ὃν ἔχει τὸ α : γ.

Ἔστω ἓν τῶν ζητουμένων σημείων τὸ Γ. ϗ ἤχθωσαν ἀπ' αὐτοῦ αἱ ΓΖ, ΓΦ, γωνίας περιέχουσαι δοθείσας. οὖν γνωσταὶ μὲν ἔσονται αἱ ΓΖΑ, ΓΦΑ γωνίαι, γνωστὸς δὲ καὶ ὁ λόγος ὃν ἔχει ἡ ΓΖ : ΓΦ, ὅστις ἐστὶν ὁ λόγος, ὃν ἔχει τὸ α : γ. ἀχθείσης οὖν ἀπὸ τοῦ Γ τῆς μὲν ΓΚ παραλλήλου τῇ ΑΦ, τῆς δὲ ΓΤ τῇ ΑΨ, γνωστὴ ἔσεται ἑκατέρα τῶν ΓΚΖ, ΓΤΦ γωνιῶν. ἑκατέρα γὰρ ἴση τῇ δοθείσῃ ΥΑΨ. γνωστὸς ἄρα ἔσται ϗ ὁ λόγος ὃν ἔχει ἤτε ΓΚ : ΓΖ, καὶ ἡ ΓΤ : ΓΦ. τῶν γὰρ γνωστῶν γωνιῶν, γνωστὰ καὶ τὰ ἡμίτονα, τὰ δὲ τῶν

γω-

(σ) Πιν. XXVII. σχ. 6.

γωνιῶν ἡμίσεια ἀνάλογα ταῖς τὰς γωνίας ὑποτεινούσαις πλευραῖς. ἐὰν ἄρα ᾖ, ἡ μὲν ΑΚ = Η = χ, ἡ δὲ ΚΓ = y, καὶ ὡς μὲν ΓΚ : ΓΖ :: $\alpha : \beta$, ὡς δὲ ΓΤ : ΓΦ :: α : ε, ἔσται ὡς μὲν $\alpha : \beta :: y$: ΓΖ = $\frac{\beta y}{\alpha}$, ὡς δὲ α : $\varepsilon :: \chi$: ΓΦ = $\frac{\varepsilon\chi}{\alpha}$. ἄρα καὶ ὡς $\frac{\beta y}{\alpha} : \frac{\varepsilon\chi}{\alpha} :: \alpha : \gamma$.

Ἐκ τῆς ἀναλογίας ταύτης ἡ κατὰ τὸ Η (τ) ἐξίσωσις γίνεται, τρίγωνον (§ 223.) ἐμφαίνουσα. διὸ δῆλον, ὅτι ὁ γεωμετρικὸς τόπος, δι' οὗ τὸ προκείμενον ἐπιλύεται πρόβλημα εὐθεῖά ἐστιν, ἐν ᾗ τὰ ζητούμενα εἰσὶ σημεῖα.

Ἐκβληθείσης οὖν κατὰ τὸ συνεχὲς τῆς ΑΨ, (υ) εἰλήφθω ἡ ΑΨ = $\frac{\beta\gamma}{\alpha}$. καὶ ἀπὸ τοῦ Ψ ἀχθείσης τῆς ΨΗ παραλλήλου τῇ ΑΥ καὶ ἴσης τῷ ε, ἐπεζεύχθω ἡ ΑΗ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη. λέγω ὅτι τὰ τῆς ΑΗ σημεῖα τὰ ζητούμενά εἰσιν.

Ἐπεὶ γὰρ ὡς ΑΨ : ΨΗ :: ΑΚ : ΚΓ, ἔσται καὶ ὡς $\frac{\beta\gamma}{\alpha} : \varepsilon :: \chi : y$. αἱ ἄρα ἀπὸ τοῦ Γ ἀχθεῖσαι ΓΖ, ΓΦ, αἵτινες καὶ δοθείσας περιέχουσι γωνίας, λόγον ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας ὃν τὸ $\alpha : \gamma$. διὰ τὰ αὐτὰ δή, ληφθείσης τῆς ΑΔ = χ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ ἀχθείσης τῆς ΔΕ παραλλήλου τῇ ΑΥ, αἱ ἀπὸ τοῦ Ε ἀγόμεναι ΕΘ, ΕΥ καὶ γωνίας περιέχουσαι ταῖς δοθείσαις ἴσας, λόγον ἕξουσι πρὸς ἀλλήλας ὃν τὸ $\alpha : \gamma$. καὶ τῆς ΑΛ δὲ ληφθείσης ἴσης τῷ $-\chi$, καὶ τῆς ΛΜ ἀχθείσης παραλλήλου τῇ ΗΨ, ἔσται καὶ τὸ Μ ἓν τῶν ζητουμένων σημείων. ἀφ' οὗ ἐὰν ἀχθῶσιν αἱ ΜΟ, ΜΝ, γωνίας περιέχουσαι ἴσας ταῖς δοθείσαις, ἕξουσι λόγον πρὸς ἀλλήλας, ὃν τὸ $\alpha : \gamma$. ἔστι γὰρ ὡς ΑΨ : ΨΗ :: ΑΛ : ΛΜ, ἤτοι ὡς $\frac{\beta\gamma}{\alpha} : \varepsilon :: -\chi : -y$.

ΣΗ.

(τ) Πίν. XXXIII. (υ) Πίν. XXVII. σχ. 6.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ

§. 285. Ἐπειδὴ γενικῶν κανόνων ἀποροῦμεν τὴν τῶν γεωμετρικῶν προβλημάτων λύσιν ποριζόντων, τοῦτο τὰ μέγιστα συντελεῖ, ἀμέλειτοι τὸ ὡς γνωστὸν ἐκλαμβάνειν τὸ ζητούμενον. ἐκ συνεπείας δὲ εἰς συνέπειαν μεταβαίνοντας, ἄλλοτε μὲν παραλλήλους, ἢ καθέτους ταῖς δοθείσαις εὐθείαις ἄγοντας, ἄλλοτε δὲ γωνίας ἴσας ταῖς δοθείσαις, ἢ τρίγωνα τοῖς δοθεῖσιν ὅμοια κατασκευάζοντας, ἐπ' ἐκείνης τελευταῖον ἵστασθαι τῆς συνεπείας, ἐξ ἧς προκύπτει ἡ ἐξίσωσις, ἀφ' ἧς ἡ τοῦ προκειμένου προβλήματος ἤρτηται ἐπίλυσις. οἷον ἐν τῷ προλαβόντι προβλήματι, ἑνὸς τῶν ζητουμένων σημείων λογισθέντος τοῦ Γ, καὶ ἀχθεισῶν τῶν ΓΖ, ΓΦ, τὴν δε ἐποριζάμεθα τὴν συνέπειαν· γνωσταὶ ἄρα αἱ ΓΖΛ, ΓΦΛ γωνίαι, καὶ ὁ λόγος ὃν ἔχει ἡ ΓΖ : ΓΦ. πάλιν ἀχθεισῶν τῶν ΓΚ, ΓΤ παραλλήλων ταῖς ΛΦ, ΛΨ, ἐποριζάμεθα τὴν δε· ϗ αἱ γωνίαι ἄρα ΓΚΖ, ΓΤΦ γνωσταί εἰσιν· ἐκ τούτου δὲ καὶ τὸ γνωστὸν εἶναι τὸν λόγον τῆς τε ΓΚ : ΓΖ, καὶ τῆς ΓΤ : ΓΦ· ἐκ τούτου δὲ αἱ ἀναλογίαι γεγόνασι, δι' ὧν αἱ ἐκθέσεις εὕρηνται, αἱ τὰς ΓΖ, ΓΦ ἐμφαίνουσαι. ἐξ οὗ τελευταῖον καὶ ἡ ἐσχάτη γέγονεν ἀναλογία, ἐξ ἧς ἡ ἐξίσωσις συνέστη, ἢ τὸ τρίγωνον ἐμφαίνουσα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'.

§. 286. Δοθέντος τοῦ ΛΓΒ ὀρθογωνίου τριγώνου, (χ. 7.) εὑρεῖν τρίγωνα βάσιν μὲν ἔχοντα τὴν ἑτέραν τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν ΛΓΒ περιεχουσῶν πλευρῶν, τὴν ΛΓ, τὰς δὲ πλευρὰς αὐτῶν ἀναλόγους ταῖς λοιπαῖς τοῦ δοθέντος τριγώνου πλευραῖς.

Ἔστω δὴ ἓν τῶν ζητουμένων τριγώνων τὸ ΛΨΓ. καὶ δίχα τμηθείσης τῆς ΛΓ κατὰ τὸ Φ, ἤχθω ἀπὸ τοῦ

Λ Ψ

Ψ ἡ ΨΖ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΑΓ. καὶ ἔσω ἡ μὲν $\text{ΑΓ} = 2\alpha$, ἡ δὲ $\text{ΓΒ} = \beta$, ἡ δὲ $\text{ΦΖ} = \chi$, ἡ δὲ $\text{ΖΨ} = y$.

Οὐκοῦν ἡ μὲν $\text{ΑΖ} = \alpha + \chi$, ἡ δὲ $\text{ΓΖ} = \alpha - \chi$. διὸ ἡ μὲν $\text{ΑΨ} = \sqrt{\alpha^2 + 2\alpha\chi + \chi^2 + y^2}$, ἡ δὲ $\text{ΨΓ} = \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha\chi + \chi^2 + y^2}$, ἡ δὲ $\text{ΑΒ} = \sqrt{4\alpha^2 + \beta^2}$. ὡς ἄρα $\sqrt{\alpha^2 + 2\alpha\chi + \chi^2 + y^2} : \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha\chi + \chi^2 + y^2} :: \sqrt{4\alpha^2 + \beta^2} : \beta$. ἄρα καὶ ὡς $\alpha^2 + 2\alpha\chi + \chi^2 + y^2 : \alpha^2 - 2\alpha\chi + \chi^2 + y^2 :: 4\alpha^2 + \beta^2 : \beta^2$. ἐκ ταύτης δὲ τῆς ἀναλογίας ἡ κατὰ τὸ Θ ἐξίσωσις (φ) γίνεται· ἐξ ἧς ἡ ἐν τῷ Ι· ἐξ αὐτῆς δὲ ἡ ἐν τῷ Κ. τεθέντος δὲ τοῦ $\frac{\beta^2}{\alpha} + 2\alpha = 2\mu$, καὶ πληρωθέντος τοῦ τετραγώνου, ἡ ἐν τῷ Λ. ἐξ ἧς τεθέντος τοῦ μὲν $\mu - \chi = Z$, τοῦ δὲ $\mu^2 - \alpha^2 = \gamma^2$, ἡ ἐν τῷ Μ γίνεται, κύκλον ἐμφαίνουσα, ἡμιδιάμετρον ἔχοντα (§. 230.) τὸ γ. δῆλον ἄρα ὅτι ὁ γεωμετρικὸς τόπος κύκλος ἐστὶν, οὗ ἀναγραφέντος, λυθήσεται τὸ πρόβλημα.

Ἤχθω οὖν ἀπὸ τοῦ Β (χ) ἡ ΒΚ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΑΒ, τέμνουσα τὴν ΑΓ ἐκβληθεῖσαν κατὰ τὸ Κ. καὶ ἐπεὶ ὡς $\text{ΑΓ} : \text{ΓΒ} :: \text{ΓΒ} : \text{ΓΚ}$, ἤτοι ὡς $2\alpha : \beta :: \beta : \text{ΓΚ}$, ἔσται ἡ $\text{ΓΚ} = \frac{\beta^2}{2\alpha}$. ἡ ἄρα $\text{ΦΚ} = \alpha + \frac{\beta^2}{2\alpha} = \mu$. διὸ τὸ $\mu^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \frac{\beta^4}{4\alpha^2}$. ἀλλὰ τὸ $\mu^2 - \alpha^2 = \gamma^2$. ἄρα καὶ τὸ $\alpha^2 + \beta^2 + \frac{\beta^4}{4\alpha^2} - \alpha^2 = \beta^2 + \frac{\beta^4}{4\alpha^2} = \gamma^2$. τὸ ἄρα

(φ) Πίν. XXXIII. (χ) Πίν. XXVII. σχ. 7.

ἄρα $\gamma = \frac{\beta}{2\alpha}\sqrt{4\alpha^2 + \beta^2}$. ἀλλὰ ϗ ἡ $BK = \frac{\beta}{2\alpha}\sqrt{4\alpha^2 + \beta^2}$, (ἔστι γὰρ τὸ $\overline{BK}^2 = \overline{B\Gamma}^2 + \overline{\Gamma K}^2$, ἤτοι τὸ $\overline{BK}^2 = \beta^2 + \frac{\beta^4}{4\alpha^2}$.) ἡ ἄρα $BK = \gamma$. ὁ ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ K, διαστήματι δὲ τῷ KB γραφόμενος κύκλος, ὁ ἐμφαινόμενός ἐστιν ὑπὸ τῆς προκειμένης ἐξισώσεως. ἐπεὶ δὲ ἡ μὲν $\Phi Z = \chi$, ἡ δὲ $\Phi K = \mu$, ἡ ἄρα $KZ = \Phi K - \Phi Z = \mu - \chi = Z$, ἡ δὲ $Z\Psi = y$.

Αἱ ἄρα ἀπὸ τῶν σημείων τῆς περιφερείας τοῦ ΒΨΔ κύκλου ἐπὶ τὰ Α ϗ Γ σημεῖα ἐπιζευγνύμεναι εὐθεῖαι, τὰ ζητούμενα συστήσωσι τρίγωνα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ.

§. 287. Δοθεισῶν τῶν ΑΔ, ΗΘ εὐθειῶν, (σχ. 8.) εὑρεῖν μὲν εὐθεῖαν, τεμεῖν δὲ τὴν ΑΔ, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ὑπὸ τῆς εὑρεθησομένης καὶ τῆς δοθείσης ΗΘ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἔστω ἡ μὲν ζητουμένη εὐθεῖα $= y$, ἡ δὲ $A\Delta = \alpha$, ἧς κατὰ τὸ Γ τμηθείσης, ἔστω $A\Gamma = \chi$. οὐκοῦν ἡ $\Gamma\Delta = \alpha - \chi$.

Τὸ ἄρα $A\Gamma.\ \Gamma\Delta = y.\ H\Theta$, εἴτουν τὸ $\alpha\chi - \chi^2 = \beta y$. ἐκ ταύτης δὲ τῆς ἐξισώσεως ἡ κατὰ τὸ N (ψ) γίνεται, καὶ τοῦ τετραγώνου πληρωθέντος, ἡ κατὰ τὸ Ξ. καὶ τεθέντος, τοῦ μὲν $\chi - \frac{\alpha}{2} = Z$, τοῦ δὲ $\frac{\alpha^2}{4} - \beta y = \beta \Omega$,

 ἡ

(ψ) Πίν. XXXIII.

ἡ κατὰ τὸ Ο, Παραβολὴν (§. 234.) ἐμφαίνουσα. Παραβολὴ ἄρα ἐςὶν ὁ γεωμετρικὸς τόπος, δι᾽ ὃ τὸ προκείμενον ἐπιλύεται πρόβλημα.

Τετμήσθω οὖν δίχα ἡ ΑΔ κατὰ τὸ β, (ω) καὶ ἤχθω ἀπ᾽ αὐτοῦ τῇ ΑΔ πρὸς ὀρθὰς ἡ $HB=\frac{\alpha^2}{4\beta}$, καὶ παραμέτρῳ τῷ $\beta=H\Theta$ (§. 236.) ἀναγεγράφθω Παραβολὴ ἡ ΑΗΔ. ληφθείσης οὖν τῆς ἀποτετμημένης $HZ=\Omega$, ἔσεται ἡ τεταγμένη $ZE=Z$. ἀχθείσης δὲ ἀπὸ τοῦ Ε τῆς ΕΓ παραλλήλου τῇ ΗΒ, ἔσεται ἡ μὲν $A\Gamma=X$, ἡ δὲ $\Gamma E=y$. ἐπεὶ γὰρ τὸ $\chi-\frac{\alpha}{2}=Z$, ἔσεται τὸ $\chi=Z+\frac{\alpha}{2}$. ἔςι δὲ ἡ μὲν $AB=\frac{\alpha}{2}$, ἡ δὲ $B\Gamma=ZE=Z$. διὸ ἡ $AB+B\Gamma=A\Gamma=\frac{\alpha}{2}+Z=\chi$. ἐπεὶ δὲ τὸ $\frac{\alpha^2}{4}-\beta y=\beta\Omega.$, τὸ ἄρα $y=\frac{\alpha^2}{4\beta}-\Omega$. ἔςι δὲ τὸ $BH-HZ=\frac{\alpha^2}{4\beta}-\Omega$. τὸ ἄρα $BH-HZ=BZ=\Gamma E=y$.

Ἡ ἀπὸ παντὸς ἄρα σημείου τῆς ΑΗΔ ἀγομένη κάθετος τῇ ΑΔ, ἡ ζητουμένη ἔςαι, ἥτις τεμεῖ τὴν ΑΔ, ὥςε τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ὑπ᾽ αὐτῆς τῆς τεμνούσης καὶ τῆς ΗΘ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'.

§. 288. Δοθεισῶν τῶν εὐθειῶν ΖΚ, ΖΓ (σχ. 9.) τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν, τὴν ΓΖΚ, καὶ τῶν Β καὶ Γ σημείων, εὑρεῖν ἐφ᾽ ἑκάςην τῶν Παραβολῶν, ὧν τὸ Β κο-

(ω) Πίν. XXVII. σχ. 8.

κορυφὴ, σημεῖον ἐφ' ὃ ἡ ἀπὸ τȣ̃ Γ ἐπιζευγνυμένη πρὸς ὀρθὰς ᾖ τῇ Παραβολῇ, εἴτȣν τῇ κατὰ τὸ εἰρημένον σημεῖον ἐφαπτομένη τῆς Παραβολῆς.

Ἔςω μία τῶν Παραβολῶν ἡ ΒΜΘ, ϗ τὸ ἐν αὐτῇ ζητέμενον σημεῖον τὸ Μ. ἡ ἄρα ἀπὸ τȣ̃ Γ ἐπὶ τὸ Μ ἐπιζευχθεῖσα ΓΜ πρὸς ὀρθάς ἐςι τῇ τῆς Παραβολῆς ἐφαπτομένῃ ΦΜ. ἤχθω ȣ̃ν ἀπὸ τȣ̃ Μ ἡ μὲν ΜΚ τῇ ΓΖ, ἡ δὲ ΜΗ τῇ ΖΚ παράλληλος. ϗ ἔςω ἡ μὲν ΓΖ $=\alpha$, ἡ δὲ ΖΒ $=\beta$, ἡ δὲ ΒΚ $=\chi$, ἡ δὲ ΚΜ $=y$. ϗ ἔςαι δὴ ἡ μὲν ΗΜ $=$ ΖΚ $=$ ΖΒ $+$ ΒΚ $=\beta+\chi$, ἡ δὲ ΓΗ $=$ ΓΖ $-$ ΗΖ $=$ ΓΖ $-$ ΜΚ $=\alpha-y$, ἡ δὲ (§. 274.) ΦΚ $=2\chi$.

Ἐπεὶ δὲ τὰ ΦΜΚ, ΜΗΓ τρίγωνα ὅμοιά εἰσιν, ἔςιν ἄρα ὡς ΦΚ : ΚΜ :: ΗΓ : ΗΜ, ἤτοι ὡς $2\chi : y :: \alpha-y : \beta+\chi$. ἐκ ταύτης δὲ τῆς ἀναλογίας ἡ κατὰ τὸ Π ἐξίσωσις γίνεται (α) ἐξ ἧς, τȣ̃ τετραγώνȣ πληρωθέντος, ἡ ἐν τῷ Ρ· τεθέντος δὲ τȣ̃ $\chi+\frac{\beta}{2}=$ Π, ἡ ἐν τῷ Σ· καὶ πάλιν τȣ̃ τετραγώνȣ πληρωθέντος, ἡ ἐν τῷ Τ. τεθέντος δὲ τȣ̃ μὲν $y-\frac{\alpha}{2}=$ Ζ, τȣ̃ δὲ $\frac{\alpha^2+\beta}{4}=\gamma^2$, ἡ ἐν τῷ Υ, ἐξ ἧς ἡ ἐν τῷ Φ, Ἔλλειψιν (§. 243.) ἐμφαίνȣσα. δῆλον ἄρα, ὅτι ὁ γεωμετρικὸς τόπος, δι' ȣ̃ τὸ προκείμενον ἐπιλύεται πρόβλημα Ἔλλειψίς ἐςι.

Τετμήσθω ȣ̃ν δίχα ἡ ΓΖ (β) κατὰ τὸ Ο, ϗ ἤχθω διὰ τȣ̃ Ο ἡ ΟΨ παράλληλος τῇ ΖΚ. ὁμοίως δίχα τμηθείσης τῆς ΖΒ κατὰ τὸ Τ, ἤχθω ἀπὸ τȣ̃ Τ ἡ ΤΕ παράλληλος ὁποτέρᾳ τῶν ΓΖ, ΨΚ. καὶ γεγράφθω Ἔλλειψις ἡ ΕΛΑΙ, ἧς μείζων μὲν διάμετρος ἡ ΕΑ

(α) Πίν. XXXIII. (β) Πίν. XXVIII. (σχ. 9.)

ΣΔ $= 2\gamma$, (§. 244.) ἐλάσσων δὲ ἡ ΙΛ $= \frac{2\gamma.}{\sqrt{2}}$ (§. 245.) καὶ ἔςαι δὴ τὸ Δ τὸ τῆς Ἐλλείψεως κέντρον. ἔςι γὰρ ἡ ΔΨ $=$ ΤΚ $= \frac{\beta + \chi}{2} =$ Π. διὸ ἡ ΨΜ $=$ ΨΚ $-$ ΜΚ $= \frac{\alpha - y}{2} =$ Z

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε΄.

§. 289. Δοθείσης τῆς διαφορᾶς τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν τῶν ἐπὶ τῆς αὐτῆς ΑΒ (χ. 10.) βάσεως τριγώνων, εὑρεῖν τὸν γεωμετρικὸν τόπον, ἐν ᾧ αἱ κορυφαὶ αὐτῶν.

Ἔςω μία τῶν ζητεμένων κορυφῶν ἡ τῦ ΑΓΒ τριγώνυ Γ. Ἐὰν ἄρα, δίχα τμηθείσης τῆς ΑΒ κατὰ τὸ Κ, ἀχθῇ ἀπὸ τῦ Κ ἡ ΚΕ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΑΒ, ἢ ἀπὸ τῦ Α ἐπὶ τὸ Ε ἐπιζευχθῇ ἡ ΑΕ, ἔσεται ἡ γωνία ΕΑΒ $=$ ΕΒΑ. διὸ ἡ ΓΑΕ, ἡ διαφορά ἐςι τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν ΓΑΒ, ΓΒΑ τῦ ΑΓΒ τριγώνυ. ληφθείσης ὖν τῆς ΑΖ $=$ ΑΚ, ἀπὸ μὲν τῦ Ζ ἤχθω ἡ ΖΨ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΑΓ, τὴν ἐφαπτομένην τῆς δοθείσης γωνίας ΓΛΕ ἐμφαίνυσα· ἀπὸ δὲ τῦ Ε ἡ ΕΡ τῇ ΖΨ παράλληλος· ἀπὸ δὲ τῦ Γ ἡ ΓΦ τῇ ΑΒ κάθετος. ἢ ἐκβληθεῖσαι αἱ ΑΓ, ΚΕ συμβαλλέτωσαν ἀλλήλαις κατὰ τὸ Δ.

Ἔςω δὲ ἡ μὲν ΑΚ $=$ ΚΒ $=$ ΑΖ $= \alpha$, ἡ δὲ ΖΨ $= \beta$, ἡ δὲ ΚΦ $= \chi$, ἡ δὲ ΦΓ $= y$. καὶ ἔςαι δὴ ἡ μὲν ΒΦ $= \alpha + \chi$, ἡ δὲ ΑΦ $= \alpha - \chi$, ἡ δὲ ΑΨ $= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$

Ἐπεὶ δὲ ὡς ΒΦ : ΦΓ :: ΒΚ : ΚΕ, ἤτοι $\alpha + \chi : y :: \alpha :$ ΚΕ, ἔσεται ἡ ΚΕ $= \frac{\alpha y.}{\alpha + \chi}$ ὁμοίως ἐπειδὴ ὡς ΑΦ : ΑΚ :: ΦΓ : ΚΔ, ἤτοι $\alpha - \chi : \alpha :: y :$ ΚΔ, ἔσεται

ται ἡ ΚΔ $=\frac{\alpha y}{\alpha-\chi}$. ἡ ἄρα ΔΕ $=$ ΔΚ $-$ ΚΕ $=\frac{\alpha y}{\alpha-\chi}-\frac{\alpha y}{\alpha+\chi}=\frac{2\alpha y\chi}{\alpha^2-\chi^2}$. ἐπεὶ δὲ τὸ $\overline{AE}^2=\overline{AK}^2+\overline{KE}^2$, ἡ ἄρα ΑΕ $=$

$$\sqrt{\alpha^2+\frac{\alpha^2 y^2}{\overline{\alpha+\chi}^2}}=\frac{\alpha}{\alpha+\chi}\sqrt{\alpha^2+2\alpha\chi+\chi^2+y^2}.$$

ἔστι δὲ καὶ ὡς ΑΨ : ΨΖ :: ΑΕ : ΕΡ, ἤτουν ὡς $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$: $\beta :: \frac{\alpha}{\alpha+\chi}\sqrt{\alpha^2+2\alpha\chi+\chi^2+y^2}$: ΕΡ. διὸ ἡ ΕΡ $=$

$$\frac{\alpha\beta\sqrt{\alpha^2+2\alpha\chi+\chi^2+y^2}}{\overline{\alpha+\chi}\cdot\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}.$$

πάλιν ἐπεὶ τὸ $\overline{A\Delta}^2=\overline{AK}^2+\overline{K\Delta}^2$, ἔσεται ἡ ΑΔ $=\frac{\alpha}{\alpha-\chi}\sqrt{\alpha^2-2\alpha\chi+\chi^2+y^2}$

ἔστι δὲ καὶ ὡς ΔΕ : ΕΡ :: ΑΔ : ΑΚ. διὸ ὡς $\frac{2\alpha y\chi}{\alpha^2-\chi^2}$: $\frac{\alpha\beta}{\alpha+\chi}\cdot$

$$\frac{\sqrt{\alpha^2+2\alpha\chi+\chi^2+y^2}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}::\frac{\alpha}{\alpha-\chi}\sqrt{\alpha^2-2\alpha\chi+\chi^2+y^2}:\alpha.$$

ἐκ ταύτης δὲ τῆς ἀναλογίας, ἡ κατὰ τὸ Χ (γ) ἐξίσωσις γίνεται, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ Ψ, ϗ τῶν τετραγώνων ἑκατέρων ληφθέντων ἡ κατὰ τὸ Ω, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ α· ἐξ αὐτῆς δὲ ἡ κατὰ τὸ β, καὶ ἡ ἐφεξῆς ἡ κατὰ τὸ γ· ϗ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἑκατέρωθεν ἐξαχθείσης ἡ κατὰ τὸ δ, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ ε, καὶ τοῦ τετραγώνου πληρωθέντος, ἡ κατὰ τὸ ζ, τεθέντος δὲ τοῦ $\chi+\frac{\alpha y}{\beta}=$ Ζ, ἡ κατὰ τὸ η, ϗ τεθέντος τοῦ $\frac{y}{\beta}$.

(γ) Πίν. XXXIII.

$\frac{y}{\beta}\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\Phi$, ἡ κατὰ τὸ Θ. ἥτις Ὑπερβολὴν ἰσόπλευρον, τετέςι τὰς διαμέτρες ἴσας ἔχεσαν ἐμφαίνει· ἴσης γὰρ ἔσης τῆς πλαγίας πλευρᾶς τῇ παραμέτρῳ, (ὅρα τὸ §. 253.) ἴση ἔςαι κ̀ ἡ δευτέρα Διάμετρος τῇ πλαγίᾳ πλευρᾷ, μέση ἀνάλογον ἔσα αὐτῆς τε (δ) καὶ τῆς παραμέτρε.

Ἤχθω ἒν ἀπὸ τῦ Β ἡ ΒΤ (ε) πρὸς ὀρθὰς τῇ ΑΒ καὶ ἴση τῇ ΖΨ$=\beta$. καὶ ἀπὸ τῦ Κ ἐπὶ τὸ Τ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΚΤ, ἐκβεβλήσθω κατὰ τὸ συνεχές. ἤχθω δὲ ἀπὸ τῦ Γ ἡ ΓϚΟ τῇ ΑΒ παράλληλος, κ̀ τῇ ΚΤ ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ Ο συμβάλλεσα. ἐκῦν ἔσεται ἡ ΚΤ$=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$. ἐπεὶ δὲ ὡς ΒΤ : ΚΤ :: ΚϚ : ΚΟ, ἤτοι ὡς $\beta:\sqrt{\alpha^2+\beta^2}::y:$ ΚΟ, ἔσεται ἡ ΚΟ$=\frac{y}{\beta}\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\Phi$. ἔςι δὲ καὶ ὡς ΒΤ : ΒΚ :: ΚϚ : ϚΟ, ἤτοι ὡς $\beta:\alpha::y:$ ϚΟ, ἡ ἄρα ϚΟ$=\frac{\alpha y}{\beta}$. ἐὰν ἄρα ἀπὸ τῦ Γ ἀχθῇ ἡ ΓΠ τῇ ΚΟ παράλληλος, ἔσεται ἡ μὲν ΓΠ$=$ΚΟ$=\Phi$, ἡ δὲ ΦΠ$=$ϚΟ$=\frac{\alpha y}{\beta}$. διὸ ἡ ΚΠ$=\frac{\alpha y}{\beta}+\chi=$ Ζ. Ἀναγραφείσης ἄρα τῆς ΑΓΗ Ὑπερβολῆς, ἧς πλαγία μὲν πλευρὰ ἡ ΑΒ$=2\alpha$, κέντρον δὲ τὸ Κ, ἔσεται ἀποτετμημένη μὲν ἡ ΚΠ$=$ Ζ, τεταγμένη δὲ ἡ ΠΓ$=\Phi$. δῆλον δὲ, ὅτι ἐν τῇ ΑΗ, ἔσονται αἱ κορυφαὶ τῶν ἐπὶ τῆς βάσεως ΑΒ τριγώνων.

ΚΕΦ.

(δ) Κατὰ τὸν κδ'. ὁρισμ. τῶν Κων. Τομ. τὸν ἐν σελ. 85 τῦ β'. Τόμ.

(ε) Πιν. XXVII. σχ. 10.