Π. Ζ=ΚΤ. ΤΘ, ἤτοι τὸ ΚΗ. ΗΡ=ΚΤ. ΤΘ. ὡς ἄρα ΚΗ : ΚΤ : : ΤΘ : ΗΡ.

ΚΕΦ. ΚΒ'.

Περὶ τῆς ἐν ἐπιπέδῳ τῶν κωνικῶν Τομῶν ἀναγραφῆς.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Λ'.

§. 260. Τὴν τυχοῦσαν Παραβολὴν γράψαι.

Κανόνι ἠυλακισμένῳ τῷ ΑΒ (μ) γνώμων ἐνηρμόσθω ὁ ΗΔΘ, ᾧ νῆμα ἐφήρμοσται τὸ ΔΕΦ. καὶ ἀχθείσης εὐθείας τῆς ΖΦ πρὸς ὀρθὰς τῷ ΑΒ κανόνι, ἐπὶ τυχόντος αὐτῆς σημείου τοῦ Φ ςῆσον τὸ ἕτερον τῶν τοῦ νήματος περάτων. καὶ δίχα τμηθείσης τῆς ΦΖ κατὰ τὸ Γ, ἐπ' αὐτῆς τῆς ΖΦ κειμένου τοῦ ΗΔΘ γνώμονος, ἧλος παρεντεθεὶς ὁ Ε, ἐπὶ τοῦ Γ πρῶτον ςήτω, εἶτα ἐπὶ τὰ Β μέρη φερόμενος, συμφερέτω τὸν γνώμονα, τοῦ μὲν ΦΕ μέρους τοῦ νήματος ἐντεταμένου διαπαντὸς διαμένοντος, τοῦ δὲ λοιποῦ τῷ γνώμονι ἐνηρμοσμένου. λέγω ὅτι ἡ ΓΕ καμπύλη, ἡ ὑπὸ τοῦ ἥλου φερομένου γραφεῖσα, Παραβολή ἐςιν. Ἤχθω γὰρ ἀπό τινος αὐτῆς σημείου, τοῦ Ε ἡ ΕΚ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΖΦ. καὶ ἔςω ἡ μὲν ΖΦ= 2α, ἡ δὲ ΓΚ=χ, ἡ δὲ ΕΚ=y. οὐκοῦν ἔςαι ἡ μὲν ΖΓ=ΓΦ=α, ἡ δὲ ΦΚ=$\alpha-\chi$, ἡ δὲ ΦΕ=ΕΔ= ΖΚ=$\alpha+\chi$.

Ἐπεὶ οὖν τὸ $\overline{\Phi E}^2 = \overline{\Phi K}^2 + \overline{KE}^2$, ἐκ τούτου ἄρα ἡ ἐν τῷ Α ἐξίσωσις γίνεται, (ν) ἐξ ἧς ἡ ἐν τῷ Β, Παραβολὴν ἐμφαίνουσα, παράμετρον ἔχουσαν τὸ 4α. (§. 236.)

ΠΟ-

(μ) Πίν. XXX. σχ. 4. (ν) Πίν. XXXII.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α'.

§. 261. Τὸ ἄρα Φ σημεῖον, (ξ) ὅπερ Ἑστία τῆς Παραβολῆς καλεῖται, ἀπὸ μὲν τῆς κορυφῆς Γ τῆς Παραβολῆς ἀπέχει ἀποστήματι ἴσῳ τεταρτημορίῳ τῆς παραμέτρε· ἔστι γὰρ ἡ ΓΦ=α· ἀπὸ δὲ τῆ κανόνος ΑΒ, τῷ τῆς παραμέτρε ἡμίσει. ἔστι γὰρ ἡ ΦΖ=2α.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β'.

§. 262. Διὰ κανόνος ἄρα, γνώμονος, νήματος καὶ ἥλε ᾧ εἴρηται τρόπῳ (§. 260.) πᾶσα Παραβολὴ γραφθήσεται, ἧς ἡ ἐξίσωσις δέδοται, ἐὰν ληφθῇ ἀπὸ τῆς εὐθείας, τῆς πρὸς ὀρθὰς τῷ κανόνι ἀχθείσης, οἷον τῆς ΖΦ, μέρος ἴσον τῷ τῆς παραμέτρε ἡμίσει, ὅπερ ἐστὶ τῷ ἡμίσει τῆ τῆς ἀποτετμημένης χ (§. 236.) πολλαπλασιαστῆ, οἷον ἐν τῇ προκειμένῃ κατὰ τὸ Β ἐξισώσει, (ο) τῷ 2α.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'.

§. 263. Τὴν τυχῆσαν Ἔλλειψιν ἀναγράψαι.

Νήματος μήκες τυχόντος τὰ πέρατα Φ καὶ Ζ (π) ἐν τυχόντι ἀποστήματι τῷ ΦΖ ἐλάσσονι τῆ νήματος πεπήχθω. ἧλος δὲ παρεντεθεὶς τῷ νήματι ἐντεταμένῳ διαμένοντι περιαγέσθω πρῶτον μὲν ἐπὶ τὰ Δ μέρη, εἶτα καὶ ἐπὶ τὰ ἐναντία. λέγω δὴ, ὅτι ἡ τῇ τοιᾶδε φορᾷ ὑπὸ τῆ ἥλε γραφεῖσα καμπύλη, Ἔλλειψίς ἐστιν.

Ἤχθω γὰρ ἀπό τινος τῶν ἑαυτῆς σημείων, τῆ Δ, ἡ ΔΓ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΦΖ, δίχα τμηθείσῃ κατὰ τὸ Κ. καὶ ἔστω ἡ μὲν ΚΓ=χ, ἡ δὲ ΔΓ=y, ἡ δὲ ΦΖ=2β, τὸ δὲ τῆ νήματος μῆκος, εἴτεν τὸ ΦΔ+ΔΖ=2α. ἐκῆν ἔσαι ἡ μὲν ΦΓ=β+χ, ἡ δὲ ΖΓ=β−χ.

(ξ) Πίν. ΧΧΧ. σχ. 4. (ο) Πίν. ΧΧΧΙΙ. (π) Πίν. ΧΧΧ. σχ. 5.

Ἐπεὶ δὲ τὸ μὲν $\overline{\Phi\Delta}^2 = \beta^2 + 2\beta\chi + \chi^2 + y^2$, τὸ δὲ $\overline{\Delta Z}^2 = \beta^2 - 2\beta\chi + \chi^2 + y^2$, ἔσεται ἄρα τὸ μὲν $\Phi\Delta = \sqrt{\beta^2 + 2\beta\chi + \chi^2 + y^2}$, τὸ δὲ $\Delta Z = \sqrt{\beta^2 - 2\beta\chi + \chi^2 + y^2}$ διὸ τὸ $\Phi\Delta + \Delta Z = \sqrt{\beta^2 + 2\beta\chi + \chi^2 + y^2} + \sqrt{\beta^2 - 2\beta\chi + \chi^2 + y^2}$. ἐκ τέτε ἦν προκύπτει ἡ κατὰ τὸ Γ ἐξίσωσις, (ρ) ἐξ ἧς ἡ ἐν τῷ Δ γίνεται. τῶν τετραγώνων δὲ ἑκατέρωθεν ληφθέντων ἡ ἐν τῷ Ε, ἐξ ἧς ἡ ἐν τῷ Ζ, καὶ τῶν τετραγώνων πάλιν ληφθέντων, ἡ ἐν τῷ Η, ἐξ ἧς ἡ ἐν τῷ Θ, ἡ αὐτὴ ἴσα τῇ ἐν τῷ Ι, ἐξ ἧς ἡ ἐν τῷ Κ γίνεται, Ἔλλειψιν (§. 243.) ἐμφαίνεσα, πλαγίαν πλευρὰν, ἢ μείζονα διάμετρον, ἔχεσαν τὸ 2α· ἐλάσσονα δὲ, (§. 245.) τὸ $2\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α'.

§. 264. Τὸ μὲν ἄρα μῆκος τε νήματος ἴσον τῇ πλαγίᾳ τῆς Ἐλλείψεως πλευρᾷ. ἐςι γὰρ $\Phi\Delta + \Delta Z = 2\alpha$· (σ) τὸ δὲ ἀπόςημα τῶν Φ, Ζ σημείων τῶν καλεμένων Ἑςιῶν τῆς Ἐλλείψεως, ἴσον τῇ τετραγωνικῇ ῥίζῃ τῆς ὑπεροχῆς, καθ' ἣν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τε μείζονος ἄξονος, ἤτεν τῆς πλαγίας πλευρᾶς, ὑπερέχει τὸ ἀπὸ τε ἐλάσσονος. ἔςι γὰρ τὸ μὲν ἀπὸ τε μείζονος, $4\alpha^2$· τὸ δὲ ἀπὸ τε ἐλάσσονος, $4\alpha^2 - 4\beta^2$· διὸ ἡ ὑπεροχὴ ἐςι τὸ $4\alpha^2 - 4\alpha^2 + 4\beta^2 = 4\beta^2$. ἔτινος τετραγωνικὴ ῥίζα τὸ 2β.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β'.

§. 265. Διὰ ἥλε ἄρα καὶ νήματος, ᾧ εἴρηται τρόπῳ, πᾶσαν Ἔλλειψιν ἀναγράψομεν, ἧς ἡ ἐξίσωσις δι-

(ρ) Πίν. XXXII. (σ) Πίν. XXX. χ. 5.

δίδοται, ἐὰν τὸ μὲν τοῦ νήματος μῆκος ἴσον λάβωμεν τῷ μείζονι τῆς Ἐλλείψεως ἄξονι, οἷον ἐν τῇ προκειμένῃ ἐξισώσει, τῷ 2α· τὸ δὲ ἀπόστημα ΦΖ, ἐφ' οὗ στῆσαι δεῖ τὰ τοῦ νήματος πέρατα, ἴσον τῇ τετραγωνικῇ ῥίζῃ τῆς εἰρημένης (§. 204.) ὑπεροχῆς, ἤτοι τῷ 2β. (τ)

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ΄.

§. 266. Τὴν τυχοῦσαν Ὑπερβολὴν ἀναγράψαι.

Τῷ ΒΑ κανόνι (υ) νῆμα ἐφηρμόσθω ἔλαττον αὐτοῦ τῷ τυχόντι μεγέθει, οἷον τῷ ΑΖ. τὸ τυχὸν δὲ ἀπόστημα ΑΓ λαβὼν, ἐν μὲν τῷ ἑτέρῳ τῶν αὐτοῦ περάτων Α οὕτω στῆσον τὸν ΒΑ κανόνα, ὥστε περὶ τὸ Α σημεῖον ἐξεῖναι περιάγειν αὐτόν· ἐν δὲ τῷ ἑτέρῳ, τῷ Γ, τὸ ἕτερον τῶν τοῦ νήματος περάτων. κείσθω δὲ πρῶτον ὁ κανὼν ἐπὶ τῆς ΑΓ, εἶτα ἧλος ὁ Δ περεντεθεὶς, φερέσθω ἐπὶ τὰ Ε μέρη, συμπεριάγων καὶ τὸν κανόνα, μέρους μὲν τοῦ νήματος, οἷον τοῦ ΔΓ, ἐντεταμένου διαμένοντος, τοῦ λοιποῦ δὲ τῷ κανόνι ἐφηρμοσμένου, λέγω, ὅτι ἡ τῇ τοιᾷδε τοῦ ἥλου φορᾷ γραφομένη καμπύλη Ὑπερβολή ἐστιν.

Ἔστω γὰρ ἓν τῶν τῆς καμπύλης σημείων τὸ Δ. καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἤχθω πρὸς ὀρθὰς τῇ ΑΓ ἡ ΔΦ. δίχα δὲ τμηθείσης τῆς ΑΓ κατὰ τὸ Κ, ἔστω ἡ μὲν $ΚΦ = \chi$, ἡ δὲ $ΔΦ = y$, τὸ δὲ ΑΓ ἀπόστημα $= 2\beta$, ἡ δὲ τοῦ νήματος καὶ τοῦ κανόνος διαφορὰ, ἤτοι ἡ $ΑΖ = 2\alpha$. οὐκοῦν ἔσεται ἡ μὲν $ΑΦ = \beta + \chi$, ἡ δὲ $ΓΦ = \beta - \chi$.

Οὐκοῦν ἡ μὲν $ΑΔ = \sqrt{\beta^2 + 2\beta\chi + \chi^2 + y^2}$, ἡ δὲ $ΓΔ = \sqrt{\beta^2 - 2\beta\chi + \chi^2 + y^2}$. ἐπεὶ δὲ ἡ $ΑΔ - ΓΔ = ΑΔ - ΔΖ = ΑΖ$, ἔσεται ἄρα ἡ $ΑΔ - ΓΔ = 2\alpha$. ἐκ τούτου οὖν ἡ ἐν τῷ Α ἐξίσωσις γίνεται· (φ) ἐξ ἧς ἡ ἐν

(τ) Πίν. XXXII. (υ) Πίν. XXX. σχ. 6. (φ) Πίν. XXXII.

τῷ Μ· καὶ τῶν τετραγώνων ἑκατέρωθεν ληφθέντων, ἡ ἐν τῷ Ν, ἐξ ἧς ἡ ἐν τῷ Ξ· καὶ τῶν τετραγώνων πάλιν ἑκατέρωθεν ληφθέντων, ἡ ἐν τῷ Ο· ἐξ ἧς ἡ ἐν τῷ Π, ἡ αὐτὴ οὖσα τῇ ἐν τῷ Ρ· ἐξ ἧς ἡ ἐν τῷ Σ, ἡ Ὑπερβολὴν ἐμφαίνουσα, (§. 250.) ἧς πλαγία μὲν πλευρὰ τὸ 2α, (§. 252.) παράμετρος δὲ (§. 253.) τὸ $\frac{2\beta^2 - 2\alpha^2}{\alpha}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄.

§. 267. Ἡ τοῦ κανόνος ἄρα καὶ τοῦ νήματος διαφορὰ ἴση ἐςὶ τῇ πλαγίᾳ τῆς Ὑπερβολῆς πλευρᾷ· τὸ δὲ ἀπόςημα τῶν Α καὶ Γ σημείων, (χ) ἅπερ Ἑςίαι τῆς Ὑπερβολῆς καλοῦνται, ἴσον τῇ τετραγωνικῇ ῥίζῃ τοῦ κεφαλαίου τῆς πλαγίας πλευρᾶς καὶ τῆς παραμέτρου, δι᾽ αὐτῆς τῆς πλαγίας πλευρᾶς πολλαπλασιασθέντος, εἴτουν τῷ $2\alpha + \frac{2\beta^2 - 2\alpha^2}{\alpha} \cdot 2\alpha = 4\alpha^2 + 4\beta^2 - 4\alpha^2 = 4\beta^2$, οὗτινος ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα $= 2\beta$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 268. Ἔςι δὲ καὶ ἄλλως ἀπὸ τῆς δοθείσης ἐξισώσεως πορίσασθαι τὸ τῶν Ἑςιῶν ἀπόςημα ΑΓ. ὁρισθείσης γὰρ τῆς πλαγίας πλευρᾶς καὶ τῆς παραμέτρου, καὶ ἡ δευτέρα διάμετρος μέση ἀνάλογον αὐτῶν οὖσα, (ψ) γνωςὴ ἔσεται. ἡ τετραγωνικὴ δὲ ῥίζα τοῦ κεφαλαίου τοῦ ἀπ᾽ αὐτῆς καὶ τῆς πλαγίας πλευρᾶς τετραγώνου ἴση ἐςὶ τῷ τῶν Ἑςιῶν ἀποςήματι ΑΓ. οἷον, εὑρεθείσης μέσης ἀναλόγου τῶν 2α, καὶ $\frac{2\beta^2 - 2\alpha^2}{\alpha}$, τῆς $2\sqrt{\beta^2-\alpha^2}$, ἔσε-

(χ) Πίν. ΧΧΧ. σχ. 6.
(ψ) Κατὰ τὸν κδ΄. τοῦ Κων. Τομ. ὁρισμ. τὸν ἐν σελ. 85. τοῦ Β΄. τόμ.

ἔσεται τὸ $4\beta^2 - 4\alpha^2 + 4\alpha^2 = 4\beta^2$, οὗ ἡ ῥίζα 2β τὸ τῶν Ἑστιῶν ἐστὶν ἀπόστημα.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄.

§. 269. Διὰ κανόνος ἄρα, ἥλου καὶ νήματος τῷ διαληφθέντι τρόπῳ πᾶσα Ὑπερβολὴ, ἧς δέδοται ἡ ἐξίσωσις, γραφθήσεται, ἐὰν ἡ μὲν διαφορὰ ἡ μεταξὺ τοῦ μήκους τοῦ κανόνος καὶ τοῦ νήματος ἴση ληφθῇ τῇ πλαγίᾳ τῆς Ὑπερβολῆς πλευρᾷ, οἷον ἐν τῇ προκειμένῃ ἐξισώσει, τῷ 2α (ω) τὸ δὲ τῶν Ἑστιῶν Λ καὶ Γ (α) ἀπόστημα ἴσον τῇ τετραγωνικῇ ῥίζῃ τοῦ γινομένου ἐκ τῆς πλαγίας πλευρᾶς, καὶ τοῦ κεφαλαίου αὐτῆς τῆς πλαγίας πλευρᾶς καὶ τῆς παραμέτρου, εἴτουν τῷ 2β.

ΚΕΦ. ΚΓ΄.

Περὶ τῆς μεθόδου τοῦ εὐθεῖαν ἐφαπτομένην ἄγειν ἀπὸ δοθέντος σημείου τῆς ὁποιασοῦν καμπύλης, ἧς δέδοται ἡ ἐξίσωσις

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄.

§. 270. Τὴν ἔκθεσιν εὑρεῖν τὴν ἐμφαίνουσαν τὴν ὑφαπτομένην πάσης καμπύλης.

Ἐμφαινέτω ὁποιανδήποτε καμπύλην ἡ ΓΦϚ, (β) ἧς ἄξων μὲν ἡ ΓΨ, ἐφαπτομένη δὲ κατὰ τὸ Φ ἡ ΛΦ, τῷ ἄξονι ἐκβληθέντι κατὰ τὸ Λ συμπίπτουσα. καὶ ταχθείσης ἀπὸ τοῦ Φ τῆς ΦΒ, εἰλήφθω σημεῖον τὸ Ζ ὡς ἔγγιστα τοῦ Φ. καὶ ἀπὸ μὲν τοῦ Ζ ἤχθω ἡ ΖΕ τῇ ΦΒ παράλληλος, ἀπὸ δὲ τοῦ Φ ἡ ΦΡ τῇ ΑΨ.

Κ 4 Οὐκοῦν

(ω) Πίν. XXXII. (α) Πίν. XXX. Σχ. 6. (β) Πίν. XXXI. Σχ. 2.

Οὐκοῦν διὰ τὴν τῶν σημείων Φ καὶ Ζ καθ' ὑπεροχὴν ἐγγύτητα τῆς μὲν ΦΔ τῆς ἴσης ΒΕ ἀπειράκις μείζων ἡ ΓΒ, τῆς δὲ ΚΔ ἡ ΒΦ ἡ ἴση τῇ ΕΔ. (ἀπειράκις μείζων καὶ ἀπειροπλάσιος λέγοντες, νοοῦμεν ὅτι ἡ μὲν ΒΕ τῆς ΓΒ, ἡ δὲ ΚΔ τῆς ΔΕ τοσοῦτον ἐλάσσων ἐστὶν, ὥστε ὡς οὐδὲν λογισθεῖσαν μηδεμίαν αἰσθητὴν ἐπιφέρειν αὔξησιν ἢ μείωσιν.) ἐπεὶ δὲ γωνία ἡ ΖΦΔ τῇ ΖΦΚ παραβαλλομένη, ἀπειροπλάσιος αὐτῆς ἐστὶ, καὶ τὸ ἡμίτονον ἄρα τῆς ΖΦΔ τῷ τῆς ΖΦΚ παρατιθέμενον, εἴτουν ἡ ΖΔ τῇ ΖΚ, (γ) ἀπειράκις μεῖζον.

Ἔστω δὴ οὖν ἡ μὲν ΓΒ $=$ χ, ἡ δὲ ΒΕ, ἀπειροστημόριον οὖσα τῆς ΓΒ, ἐμφαινέσθω διὰ τοῦ δχ. ὁμοίως ἔστω ἡ μὲν ΦΒ $= y$, ἡ δὲ ΚΔ $= \delta y$.

Ἐπεὶ οὖν τὰ ΖΔΦ, ΦΒΑ τρίγωνα ὅμοιά εἰσιν, ἔσται ἄρα ὡς ΖΔ : ΔΦ : : ΦΒ : ΒΑ. ἐπεὶ δὲ ἡ ΖΔ ἀπειροπλάσιος τῆς ΖΚ, ἀλογουμένης ἄρα τῆς ΖΚ, ἀπροσπταίστως ἀντὶ τῆς ΖΔ, τὴν ΚΔ ἐκλαβεῖν ἔξεστιν. οὐκοῦν ἔσται ὡς ΚΔ : ΔΦ : : ΦΒ : ΒΑ, εἴτουν ὡς $\delta y : \delta \chi : : y :$ ΒΑ, ἡ ἄρα ΒΑ $= \dfrac{y\delta\chi}{\delta y}$.

Ἐπεὶ δὲ ἡ ΒΑ ἡ ὑφαπτομένη ἐστὶ τῆς καμπύλης, δῆλον ἄρα ὅτι ἡ $\dfrac{y\delta\chi}{\delta y}$, ἡ ζητουμένη ἔκθεσίς ἐστιν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'.

§. 271. Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου Φ, (σχ. 3.) τοῦ διὰ τῆς κατὰ τὸ Τ δοθείσης ἐξισώσεως (δ) ἐμφαινομένου κύκλου εὐθεῖαν ἐφαπτομένην ἀγαγεῖν.

Ἐι

(γ) Κατὰ τὸ δ'. Θεώρ. τῆς Τριγωνομ. τὸ ἐν σελ. 64. τοῦ β' Τόμ.
(δ) Πίν. XXXII.

Ἐν τῇ κατὰ τὸ Τ ἐξισώσει ἀντὶ μὲν τοῦ χ, τεθέντος τοῦ $\chi + \delta\chi$, ἀντὶ δὲ τοῦ χ^2 τοῦ $\overline{\chi + \delta\chi}^2$, καὶ ἀντὶ τοῦ y^2 τοῦ $\overline{y + \delta y}^2$, ἡ ἐν τῷ Υ ἐξίσωσις γίνεται, ἐξ ἧς ἀφαιρεθέντων τῶν ἴσων, εἴτουν τοῦ y^2 καὶ τοῦ $2\alpha\chi - \chi^2$, καὶ τῶν ἀπειροσημορίων, ἤτοι τοῦ δy^2, καὶ $\delta\chi^2$, (ἐστι γὰρ τὸ δy^2 ἀπειροστὸν τῷ δy παρατιθέμενον. ὡς γὰρ $1 : \delta y :: \delta y : \delta y^2$. ἀπειροπλασίου δὲ οὔσης τῆς μονάδος τοῦ δy, ἀπειροπλασιόν ἐστι καὶ τὸ δy τῷ δy^2 παραβαλλόμενον) ἡ ἐν τῷ Φ. ἐξ ἧς δῆλον, ὅτι τὸ $\delta\chi$ ἴσον τοῖς ἐν τῷ Χ. ἐν τῇ ἐκθέσει οὖν $\frac{y\delta\chi}{\delta y}$ τῇ ἐμφαινούσῃ τὴν ὑφαπτομένην πάσης καμπύλης, ἀντὶ τοῦ $\delta\chi$ τεθήτω τὸ ἀρτίως εὑρεθὲν αὐτῷ ἴσον. προκύψει οὖν ἡ κατὰ τὸ Ψ ἐξίσωσις. τεθέντος δὲ ἀντὶ τοῦ y^2 τοῦ ἴσου αὐτῷ, τοῦ ἐν τῷ Τ, ἡ ἐν τῷ Ω ἐξίσωσις γίνεται. ἐξ ἧς δῆλον, ὅτι ἡ τοῦ κύκλου ὑφαπτομένη ἴση τῷ $\frac{2\alpha\chi - \chi^2}{\alpha - \chi}$. Ἐὰν οὖν ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου Φ ταχθῇ (e) ἐπὶ τὴν ΓΔ διάμετρον ἡ ΦΒ, ληφθῇ δὲ ἡ $ΓΒ = \chi$, ἐπεὶ ἡ $ΓΔ = 2\alpha$, (§. 228.) ἔσεται ἡ μὲν $ΔΒ = 2\alpha - \chi$, ἡ δὲ $ΚΒ = \alpha - \chi$, τοῦ Κ κέντρου ὄντος τοῦ κύκλου. διὸ ἐὰν τῶν ΚΒ, ΔΒ, καὶ ΓΒ, ἤτοι τῶν $\alpha - \chi$, $2\alpha - \chi$ καὶ χ, τετάρτη ἀνάλογον εὑρεθῇ, ληφθῇ δὲ ἴση αὐτῇ ἡ ΑΒ, ἔσεται ἡ $ΑΒ = \frac{2\alpha\chi - \chi^2}{\alpha - \chi}$ ἡ τοῦ κύκλου ὑφαπτομένη. ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Α

(e) Πίν. XXXI. σχ. 3.

ἐπὶ τὸ Φ ἐπιζευχθεῖσα ΑΦ ἐφάψεται τοῦ κύκλου κατὰ τὸ Φ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ΄.

§. 272. Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου Φ τῆς Παραβολῆς (σχ. 2.) τῆς ἐμφαινομένης ὑπὸ τῆς δοθείσης ἐξισώσεως, τῆς κατὰ τὸ Α, (ζ) εὐθεῖαν ἐφαπτομένην ἀγαγεῖν.

Ἐν τῇ κατὰ τὸ Α ἐξισώσει τεθέντος ἀντὶ μὲν τοῦ χ, τοῦ $\chi + \delta\chi$, ἀντὶ δὲ τοῦ y^2, τοῦ $\overline{y+\delta y}^2$, ἡ ἐν τῷ C ἐξίσωσις γίνεται, ἐξ ἧς ἀφαιρεθέντων τῶν ἴσων, καὶ τῶν διὰ τὴν σμικρότητα ὡς μηδὲν λογιζομένων, ἡ ἐν τῷ D. ἐν τῇ οὖν ἐκθέσει τῇ τὴν ὑφαπτομένην ἐμφαινούσῃ πάσης καμπύλης, τεθέντος ἀντὶ τοῦ $\frac{\delta\chi}{\delta y}$ τοῦ ἄρτι εὑρεθέντος αὐτῷ ἴσου, ἡ ἐν τῷ E προκύπτει ἐξίσωσις. ἀντὶ δὲ τοῦ y^2 τεθέντος τοῦ ἴσου αὐτῷ, τοῦ κατὰ τὸ Α, ἡ ἐν τῷ F γίνεται. ἐξ ἧς δῆλον, ὅτι ἡ τῆς Παραβολῆς ὑφαπτομένη ἴση τῷ 2χ. Ἐὰν οὖν ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου Φ (η) ταχθῇ ἡ ΦΒ· ἐκβληθείσης δὲ τῆς ΨΓ ἐπὶ τὰ Α μέρη, ληφθῇ ἡ $ΑΓ = ΓΒ = \chi$, ἔσεται ἡ $ΒΑ = 2\chi$. διὸ ἡ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Φ ἐπιζευχθεῖσα ΑΦ ἐφάψεται τῆς Παραβολῆς κατὰ τὸ Φ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄.

§. 273. Ἐὰν ἀπὸ τοῦ Φ ἀχθῇ ἡ ΦΨ (θ) πρὸς ὀρθὰς τῇ ἐφαπτομένῃ ΑΦ, ἢ τῷ ἄξονι συμπίπτουσα κατὰ τὸ Ψ, ἔσεται ἡ μὲν ὑποκάθετος $ΒΨ = \alpha$, ἡ δὲ κάθετος $ΦΨ = \sqrt{2\alpha\chi + \alpha^2}$, ἡ δὲ ἐφαπτομένη ΑΦ $\sqrt{4\chi^2 + 2\alpha\chi}$. ἐπεὶ γὰρ ὡς ΑΒ : ΒΦ :: ΒΦ : ΒΨ, οὕτως ὡς $2\chi : y :: y : ΒΨ$, ἔσεται ἡ $ΒΨ = \frac{y^2}{2\chi}$. τεθέντος

(ζ) Πίν. XXXII (η) Πίν. XXXI. σχ. 2. (θ) Πίν. XXVII. σχ. 4.

τεις δὲ τῦ $2\alpha\chi$ ἀντὶ τῦ y^2, ἔσεται ἡ $B\Psi = \frac{2\alpha\chi}{2\chi} = \alpha$. ἐκ τέτε δὲ δῆλον, ὅτι ἡ $A\Psi = 2\chi + \alpha$. ἐπεὶ δὲ καὶ ὡς $A\Psi : \Psi\Phi :: \Psi\Phi : \Psi B$, ἤτοι ὡς $2\chi + \alpha : \Phi\Psi :: \Phi\Psi : \alpha$, ἔσεται τὸ $\overline{\Phi\Psi}^2 = 2\alpha\chi + \alpha^2$. διὸ ἡ $\Phi\Psi = \sqrt{2\alpha\chi + \alpha^2}$. ἐπεὶ δὲ καὶ ὡς $\Psi A : A\Phi :: A\Phi : AB$, τετέστιν ὡς $2\chi + \alpha : A\Phi :: A\Phi : 2\chi$, τὸ ἄρα $\overline{A\Phi}^2 = 4\chi^2 + 2\alpha\chi$. διὸ ἡ $A\Phi = \sqrt{4\chi^2 + 2\alpha\chi}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β'.

§. 374. Οὐκῦν ἐν τῇ Παραβολῇ ἡ μὲν ὑφαπτομένη ΑΒ διπλασία ἐστὶ τῆς ἀποτετμημένης ΓΒ, ἡ δὲ παράμετρος, ἤτοι τὸ 2α, τῆς ὑποκαθέτε ΒΨ.

ΠΟΡΙΣΜΑ, Γ'.

§. 275. Ἡ ἀπὸ τῦ σημείε τῆς ἐπαφῆς Φ ἐπὶ τῆς Ἑστίας Π ἐπιζευχθεῖσα ΦΠ ἴση ἐστὶ τῇ ΑΠ τῇ ἀπὸ τῆς Ἑστίας Π καὶ τῆς ἐφαπτομένης ΦΑ ἀπολαμβανομένῃ. Ἐπεὶ γὰρ ἡ $\Gamma\Pi = \frac{1}{2}\alpha$, (§. 261.) ἔσεται ἡ μὲν $B\Pi = \chi - \frac{1}{2}\alpha$, ἡ δὲ $A\Pi = AB - B\Pi = 2\chi - \chi + \frac{1}{2}\alpha = \chi + \frac{1}{2}\alpha$. ἔστι δὲ τὸ $\overline{\Phi\Pi}^2 = \overline{\Phi B}^2 + \overline{B\Pi}^2$, ἤτοι τὸ $\overline{\Phi\Pi}^2 = y^2 + \chi^2 - \alpha\chi + \frac{\alpha^2}{4}$, καὶ ἀντὶ τῦ y^2 τεθέντος τῦ ἴσε αὐτῷ, τῦ ἐν τῷ Α, (ι) τὸ $\overline{\Phi\Pi}^2 = 2\alpha\chi + \chi^2 - \alpha\chi + \frac{\alpha^2}{4} = \chi^2 + \alpha\chi + \frac{1}{4}\alpha^2$. διὸ ἡ $\Phi\Pi = \chi + \frac{1}{2}\alpha$. (κ) ἡ ἄρα $\Phi\Pi = A\Pi$.

ΠΟ-

(ι) Πίν. XXXII. (κ) Πίν. XXVII. σχ. 4.

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ'.

§. 276. Τῆς δευτέρας διαμέτρου ΦΡ (λ) παράμετρός ἐστι τὸ τετραπλάσιον τῆς ΦΠ. ταχθείσης γὰρ ἀπὸ τῆς κορυφῆς Γ τῆς ΓΔ, ἔσεται ἡ μὲν $ΦΔ = ΛΓ$, ἡ δὲ $ΓΔ = ΛΦ$. (ἐστι γὰρ ἡ μὲν ΓΔ τῇ ΛΦ, ἡ δὲ ΦΡ τῇ ΛΨ παράλληλος) διὸ ἡ μὲν $ΦΔ = χ$, ἡ δὲ $ΓΔ = \sqrt{4χ^2 + 2αχ}$. (§. 273.) οὐκοῦν τὸ $\overline{ΓΔ}^2 = 4χ^2 + 2αχ$. ἐπεὶ δὲ ἡ $ΦΠ = χ + \frac{1}{2}α$, τὸ ἄρα $4ΦΠ = 4χ + 2α$. διὸ τὸ $ΦΔ. 4ΦΠ = χ. \overline{4χ + 2α} = 4χ^2 + 2αχ$. τὸ ἄρα $\overline{ΓΔ}^2 = ΦΔ. 4ΦΠ$. ὡς ἄρα $ΦΔ : ΓΔ :: ΓΔ : 4ΦΠ$. τὸ ἄρα 4ΦΠ τρίτη οὖσα ἀνάλογος τῆς ἀποτετμημένης ΦΔ καὶ τῆς τεταγμένης ΓΔ, παράμετρός ἐστι (μ) τῆς ΦΡ διαμέτρου.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'.

§. 277. Ἀπὸ τοῦ δοθέντος τῆς Ἐλλείψεως σημείου Ζ, (σχ. 5.) τῆς ἐμφαινομένης διὰ τῆς δοθείσης ἐξισώσεως, τῆς κατὰ τὸ G (ν) εὐθεῖαν ἐφαπτομένην ἀγαγεῖν.

Τεθέντος ἐν τῇ δοθείσῃ ἐξισώσει ἀντὶ τοῦ $χ$ τοῦ $χ + δχ$, καὶ τοῦ $\overline{χ + δχ}^2$ ἀντὶ τοῦ $χ^2$, καὶ τοῦ $\overline{y + δy}^2$ ἀντὶ τοῦ y^2, ἡ κατὰ τὸ L ἐξίσωσις γίνεται· ἐξ ἧς ἀφαιρεθέντων τῶν ἴσων καὶ τῶν ἀπειροστῶν, ἡ ἐν τῷ Μ, ἐξ ἧς ἡ ἐν τῷ Ν. ἐν τῇ οὖν ἐκθέσει τῇ ἐμφαινούσῃ τὴν ὑφαπτομένην πάσης καμπύλης, (§. 270.) ἀντὶ τοῦ $\frac{δχ}{δy}$ τεθέντος τοῦ ἀρτίως εὑρεθέντος αὐτῷ ἴσου

(λ) Ὅρα τὸν κε'. ὁρισμ. τῶν Κων. Τομ, τὸν ἐν σελ. 86. τοῦ β'. τόμ.

(μ) Κατὰ τὸν προειρημ. κα'. Ὁρισμ.

(ν) Πίν. XXXII.

ἡ κατὰ τὸ Q ἐξίσωσις προκύπτει. ἐν ᾗ ἀντὶ τοῦ y^2 τεθέντος τοῦ ἴσου αὐτῷ, τοῦ ἐν τῷ G, ἢ ἐν τῷ R γίνεται. ἐξ ἧς δῆλον ὅτι ἡ τῆς Ἐλλείψεως ΑΖΦ ὑφαπτομένη (ξ) τετάρτη ἀνάλογόν ἐστι τῶν $\alpha - \chi$, $2\alpha - \chi$, καὶ χ.

Ἐὰν οὖν ἐπὶ τῆς μείζονος Διαμέτρου $ΑΦ = 2\alpha$, (§. 244.) καὶ δίχα τετμημένης κατὰ τὸ Κ ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου Ζ ταχθῇ ἡ ΖΒ, καὶ ληφθῇ ἡ $ΑΒ = \chi$, ἔσται ἡ μὲν $ΦΒ = 2\alpha - \chi$, ἡ δὲ $ΚΒ = \alpha - \chi$. διὸ ἡ τετάρτη ἀνάλογον τῶν ΚΒ, ΦΒ, ΒΑ ἡ ὑφαπτομένη ἔσται τῆς ΑΖΦ Ἐλλείψεως. ληφθείσης οὖν τῆς $ΒΗ = \frac{2\alpha\chi - \chi^2}{\alpha - \chi}$, ἡ ἀπὸ τοῦ Η ἐπὶ τὸ Ζ ἐπιζευχθεῖσα ΗΖ ἐφάψεται τῆς Ἐλλείψεως.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 278. Ἀχθείσης οὖν ἀπὸ τοῦ Ζ τῆς ΖΓ πρὸς ὀρθὰς τῇ ἐφαπτομένῃ ΗΖ, ἔσται ἡ ὑποκάθετος $ΒΓ = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \cdot \overline{\alpha - \chi}$. ἐστι γὰρ ὡς ΗΒ : ΒΖ :: ΒΖ : ΒΓ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε΄.

§. 279. Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου Μ τῆς Ὑπερβολῆς ΡΒΥ, (ο) τῆς, ἐμφαινομένης ὑπὸ τῆς δοθείσης ἐξισώσεως, τῆς κατὰ τὸ Λ, (π) ἐφαπτομένην εὐθεῖαν ἀγαγεῖν.

Ἀντὶ μὲν τοῦ χ καὶ τοῦ χ^2 θὲς ἐν τῇ δοθείσῃ ἐξισώσει τὸ $\chi + \delta\chi$, καὶ τὸ $\overline{\chi + \delta\chi}^2$ · ἀντὶ δὲ τοῦ y^2 τὸ

(ξ) XXVII. χ. 5. (ο) Ibid. XXXI. χ. 1. (π) XXXIII.

τὸ $\overline{y+\delta y}^2$ ἐκοῦν προκύπτει· ἡ κατὰ τὸ Β ἐξίσωσις ἐξ ἧς ἀφαιρεθέντων τῶν ἴσων καὶ τῶν ἀπειροστῶν, ἡ κατὰ τὸ Γ γίνεται, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ Δ. τεθέντος δὲ ἐν τῇ ἐκθέσει $\frac{y\delta\chi}{\delta y}$ (§. 270.) ἀντὶ τοῦ $\frac{\delta\chi}{\delta y}$ τοῦ ἴσου αὐτῷ τοῦ ἐν τῷ Δ, ἡ ἐν τῷ Ε, ἐξ ἧς ἡ ἐν τῷ Ζ. ἐξ αὐτῆς δὲ δῆλον, ὅτι ἡ τῆς προκειμένης Ὑπερβολῆς ὑφαπτομένη τετάρτη ἀνάλογόν ἐστι τῶν $\alpha+\chi$, $2\alpha+\chi$, καὶ χ.

Ἐπεὶ οὖν ἡ τῆς Ὑπερβολῆς πλαγία πλευρὰ (ς) $ΑΒ=2\alpha$, (§. 252.) ἀχθείσης ἀπὸ τοῦ Μ τῆς τεταγμένης ΜΛ, ἔσεται ἡ μὲν $ΒΛ=\chi$, ἡ δὲ $ΑΛ=2\alpha+\chi$, ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ κέντρου $ΚΛ=\alpha+\chi$. διὸ δὴ ἡ τετάρτη ἀνάλογον τῶν ΚΛ, ΑΛ, ΒΛ, ἡ ὑφαπτομένη ἐστὶ τῆς Ὑπερβολῆς. ἐὰν οὖν ληφθῇ ἡ $ΑΓ=\frac{2\alpha\chi+\chi^2}{\alpha+\chi}$, ἡ ἀπὸ τοῦ Γ ἐπὶ τὸ Μ ἐπιζευχθεῖσα ΓΜ, ἐφάψεται τῆς Ὑπερβολῆς κατὰ Μ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α΄.

§. 280. Ἰστέον δὲ ὅτι τῇ αὐτῇ μεθόδῳ εὑρεθήσεται ἡ ὑφαπτομένη, ἐξ ἧς καὶ ἡ ἐφαπτομένη πάσης καμπύλης, ἧς ἡ ἐξίσωσις δέδοται.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β΄.

§. 281. Αἱ τὰς κωνικὰς τομὰς ἐμφαίνουσαι ἐξισώσεις, πλὴν τῆς τρίγωνον δηλούσης, δευτέρου βαθμοῦ εἰσίν. (§. 98.) ὅσαι δὲ τῶν καμπύλων ὑπὸ ἐξισώσεων ἐμφαίνονται μείζονος βαθμοῦ ἤπερ ὁ δεύτερος, ἐκεῖναι **Καμπύλαι ἀνωτέρων βαθμῶν** λέγονται.

ΚΕΦ.

(ς) Πίν. XXXI. χ. 1.