εἰλήφθω ἀποτετμημένη ἡ ΑΔ = χ. καὶ ἔςαι δὴ ἡ ἀπὸ τοῦ Δ ταχθεῖσα ΔΕ = Ζ. ἐπεὶ δὲ τὸ $y + \gamma = Z$, ἔςαι δὴ ἄρα τὸ $y = Z - \gamma$. οὐκοῦν ληφθείσης τῆς ΔΗ = γ, ἔσεται ἡ ΕΗ $= Z - \gamma = y$. ἀχθείσης οὖν ἀπὸ μὲν τοῦ Α τῆς ΑΘ τῇ ΔΕ παραλλήλου, ἀπὸ δὲ τοῦ Η τῆς ΘΙ τῇ ΑΓ, καὶ τῆς ΕΛ ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη ἐκβληθείσης, ἔσεται ἡ μὲν ΘΗ $= \chi$, ἡ δὲ ΗΕ $= y$, ἡ δὲ ΗΛ $= -y$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε'.

§. 250. Τὰς Ὑπερβολὴν ἐμφαινούσας εὑρεῖν ἐξισώσεις.

Τμηθέντων τῶν συζύγων Κώνων (σχ. 2.) ΓΩΨ, ΓΝϛ ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος, ἑκατέρας δὲ τῶν ΓΨ, Γϛ πλευρῶν ἑτέρῳ τμηθείσης ἐπιπέδῳ, αἱ ἀντικείμεναι Ὑπερβολαὶ ΠΛΕ, ΡΒΘ γίνονται. Ἐὰν δὲ διὰ τοῦ τυχόντος σημείου Φ τοῦ ἄξονος ΔΦ τμηθῇ αὖθις ὁ Κῶνος ἐπιπέδῳ τῇ βάσει αὐτοῦ παραλλήλῳ, κύκλος προκύπτει ὁ ΗΖΛ, οὗ ἡ κοινὴ τομὴ αὐτοῦ τε καὶ τῆς Ὑπερβολῆς, εἴτουν ἡ ΖΦ, πρὸς ὀρθὰς ἐςὶ τῇ τε διαμέτρῳ ΗΛ, καὶ τῷ ἄξονι ΔΦ.

Ἤχθωσαν οὖν ἀπὸ τῶν Δ καὶ Β τομῶν αἱ ΔΜ, ΒΑ τῇ ΩΨ διαμέτρῳ τῆς βάσεως τοῦ κώνου παράλληλοι. καὶ ἔςω ἡ μὲν ΔΜ $= \gamma$, ἡ δὲ ΑΒ $= \beta$, ἡ δὲ πλαγία πλευρὰ ΒΔ $= 2\alpha$, ἡ δὲ ἀποτετμημένη ΔΦ $= \chi$, ἡ δὲ τεταγμένη ΦΖ $= y$. οὐκοῦν ἔςαι ἡ ΒΦ $= 2\alpha + \chi$.

Ἐπεὶ οὖν ὡς ΔΒ : ΒΑ :: ΔΦ : ΦΛ, ἤτοι ὡς $2\alpha : \beta :: \chi :$ ΦΛ, ἔσεται ἡ ΦΛ $= \frac{\beta\chi}{2\alpha}$. πάλιν ἐπειδὴ ὡς ΒΔ : ΔΜ :: ΒΦ : ΦΗ, εἴτουν ὡς $2\alpha : \gamma :: 2\alpha + \chi :$ ΦΗ, ἔσεται ἡ ΦΗ $= \gamma \cdot \frac{2\alpha + \chi}{2\alpha}$. ἐπεὶ δὲ καὶ ὡς ΛΦ : ΦΖ :: ΦΖ : ΦΗ, ἔσεται ἄρα ὡς $\frac{\beta\chi}{2\alpha} : y :: y : \gamma \cdot \frac{2\alpha + \chi}{2\alpha}$.

ἐκ

ἐκ τῆς ἀναλογίας ταύτης ἡ ἐν τῷ Q (ω) ἐξίσωσις γίνεται, ἐξ ἧς ἡ ἐν τῷ S, τεθέντος τοῦ $\beta\gamma = 4\nu^2$.

Ἐὰν δὲ δίχα τμηθείσης τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΒΔ (α) κατὰ τὸ Κ, ληφθῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου Κ ἡ ἀποτετμημένη ΚΦ = Ζ, ἔσεται ἡ μὲν ΒΦ = α + Ζ, ἡ δὲ ΔΦ = Ζ − α. ὅθεν διὰ τῶν αὐτῶν ἀναλογιῶν εὑρεθήσεται ἡ ἐν τῷ V ἐξίσωσις.

Αἱ δύω ἄρα ἐξισώσεις αἱ ἐν τοῖς S καὶ V (β) αἱ ζητούμεναί εἰσιν, ὧν ἑκατέρα Ὑπερβολὴν ἐμφαίνει.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄.

§. 251. Ἐν μὲν τῇ ἑτέρᾳ ἄρα τῶν Ὑπερβολὴν ἐμφαινουσῶν ἐξισώσεων, τῇ κατὰ τὸ S, τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἀπὸ τῆς πλαγίας πλευρᾶς καὶ τῆς ἀποτετμημένης, σὺν τῷ ἀπὸ τῆς ἀποτετμημένης τετραγώνῳ ἴσον ἐστὶ τῷ γινομένῳ ἀπὸ γνωστοῦ κλάσματος καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς τεταγμένης τετραγώνου· ἐν δὲ τῇ ἑτέρᾳ τῇ κατὰ τὸ V, τὸ ἀπὸ τῆς ἀποτετμημένης τετράγωνον, λείψει τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς πλαγίας πλευρᾶς τετραγώνου, ἴσον ἐστὶ τῷ προδιαληφθέντι γινομένῳ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄.

§. 252. Ἑκατέρας οὖν τῶν ἐν τοῖς S καὶ V ἐξισώσεων τὴν αὐτὴν ἐμφαινούσης Ὑπερβολήν, ἐν μὲν τῇ ἑτέρᾳ τῇ κατὰ τὸ S ἡ πλαγία πλευρὰ ὁ πολλαπλασιαστής ἐστι τῆς ἀποτετμημένης χ, ὅπερ ἐστὶ τὸ 2α· ἐν δὲ τῇ ἑτέρᾳ, τῇ κατὰ τὸ V, τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ α^2 τετραγώνου τὸ διπλάσιον, εἴτουν αὐτὸ τὸ 2α.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄.

§. 253. Ἡ τῆς Ὑπερβολῆς παράμετρος, ἴση ἐστὶ τῷ διπλασίῳ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ κλάσματος, διὰ τοῦ τῆς πλαγίας πλευρᾶς ἡμίσεως διαιρεθέντι, εἴτουν τῷ $\frac{2\nu^2}{\alpha}$.

(ω) Πίν. XXIX. (α) Πίν. XXX. σχ. 2. (β) Πίν. XXIX.

$\frac{2\nu^2}{\alpha}$. ἐπεὶ γὰρ ἡ τῆς Ὑπερβολῆς παράμετρος τετάρτη ἀνάλογόν ἐστι τοῦ ὀρθογωνίου (γ) ΒΦ. ΦΔ, τοῦ τετραγώνου $\overline{\Phi Z}^2$, καὶ τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΒΔ, (δ) ἤτοι τοῦ $2\alpha\chi+\chi^2$, τοῦ y^2, καὶ τοῦ 2α, ἔσεται ἄρα ἡ παράμετρος ἴση τῷ $\frac{2\alpha y^2}{2\alpha\chi+\chi^2}$. τοῦτο δὲ διὰ τῆς κατὰ τὸ S (ε) ἐξισώσεως ἴσον εὑρίσκεται τῷ $\frac{2\nu^2}{\alpha}$. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἐπεὶ ὡς $Z^2-\alpha^2 : y^2 :: 2\alpha$ πρὸς τὴν παράμετρον, ἔσεται αὕτη ἴση τῷ $\frac{2\alpha y^2}{Z^2-\alpha^2}$. τοῦτο δὲ διὰ τῆς κατὰ τὸ V ἐξισώσεως ἴσον προκύπτει τῷ αὐτῷ $\frac{2\nu^2}{\alpha}$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 254. Ἐὰν ὁ τοῦ κλάσματος ἀριθμητὴς, εἴτουν ὁ τοῦ y^2 πολλαπλασιαστὴς μὴ ᾖ τὸ ἀπὸ τοῦ ἡμίσεως τῆς πλαγίας πλευρᾶς τετράγωνον, ὡς ἐν ταῖς κατὰ τὸ α καὶ β ἐξισώσεσιν, ἡ τῆς Ὑπερβολῆς παράμετρός ἐστιν ἡ τετάρτη ἀνάλογος τοῦ γνωστοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ κλάσματος, τοῦ παρονομαστοῦ αὐτοῦ, καὶ τῆς πλαγίας πλευρᾶς, εἴτουν τὸ $\frac{2\alpha\nu^2}{\beta^2}$. ἐπεὶ γὰρ ὡς $2\alpha\chi+\chi^2 : y^2 :: 2\alpha$, πρὸς τὴν παράμετρον, ἔσται δὴ αὕτη ἴση τῷ $\frac{2\alpha y^2}{2\alpha\chi+\chi^2}$. τοῦτο δὲ ἐκ τῆς κατὰ τὸ α ἐξισώσεως ἴσον τῷ $\frac{2\alpha\nu^2}{\beta^2}$. ὡσαύ-

τως

(γ) Πίν. XXX. σχ. α.
(δ) Κατὰ τὸν προειρημ. κα'. Ὁρισμ. (ε) Πίν. XXIX.

τως ἐπειδὴ ὡς $z^2 - \alpha^2 : y^2 :: 2\alpha$, πρὸς τὴν παράμετρον, ἔσεται αὕτη ἴση τῷ $\frac{2\alpha y^2}{z^2-\alpha^2}$, ὅπερ διὰ τῆς κατὰ τὸ β ἐξισώσεως ἴσον εὑρίσκεται τῷ $\frac{2\alpha\nu^2}{\beta^2}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ΄.

§. 255. Ἐὰν ὧν ἐκ τῶν τῦ προτεθέντος ἡμῖν προβλήματος συνθηκῶν ἐξίωσις συσταθῇ ἤτοι ὁμοία ταῖς κατὰ τὰ S, καὶ V, ἢ εἰς ὁμοίαν αὐταῖς μεταβαλλομένη, ἡ τύτυ ἐπίλυσις ἀπὸ τῆς ἀναγραφῆς ἤρτηται τῆς Ὑπερβολῆς.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 256. Τὴν ἐν τῷ γ ἐξίσωσιν εἰς ὁμοίαν τῇ ἐν τῷ V μεταβαλεῖς ὕτω· κείσθω ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα $\chi + \frac{\alpha y}{\beta} = Z$. ὑκῦν ἡ ἐν τῷ γ εἰς τὴν ἐν τῷ δ μετατρέπεται, ἐξ ἧς ἡ ἐν τῷ ε γίνεται, ἡ τῇ κατὰ τὸ V ὁμοία. τὴν ὑπ᾽ αὐτῆς δὲ ἐμφαινομένην Ὑπερβολὴν ἀναγράψεις ὕτως· ἐπεὶ ἡ πλαγία αὐτῆς πλευρὰ ἴση ἐςὶ τῷ $\frac{2\nu\gamma}{}$, (§. 252.) ἡ παράμετρος αὐτῆς ἴση ἔσεται τῷ $\frac{2\alpha\gamma}{\nu}$. (§. 253.) τῇδε ὖν τῇ παραμέτρῳ (ζ) γραφθήτω Ὑπερβολὴ ἡ ΒΑΓ. (η) καὶ εἰλήφθω ἀποτετμημένη ἡ ΑΕ $= y$. ὑκῦν ἡ ἀπὸ τῦ Ε ταχθεῖσα ΕΗ $=$ Z. ἐπεὶ δὲ τὸ $\chi + \frac{\alpha y}{\beta} = Z$, ἔσε-

(ζ) Ὅρα τὴν α΄ καὶ β΄. Συνέπ. τὴν μετὰ τὴν θ΄. πρότ. τῶν Κων. Τομ. τὴν ἐν σελ. 165. τῦ β΄. τόμ. καὶ τὴν θ΄. τὴν ἐν σελ. 170. καὶ τὴν β΄. τὴν ἐν σελ. 184. καὶ τὸ ἑξῆς §. 266.
(η) Πίν. XXX. Σχ. 8.

ἔσεται τὸ $\chi = Z - \frac{\alpha y}{\beta}$. ἐὰν ἂν ληφθῇ ἡ μὲν ΕΖ$=\beta$, ἡ δὲ ΕΘ$=\alpha$, ἐπιζευχθείσης δὲ τῆς ΖΘ, ἀχθῇ αὐτῇ ἀπὸ τῦ Α ἡ ΑΙ παράλληλος, ἔσεται ὡς ΕΖ : ΕΘ :: ΕΑ : ΕΙ, ἤτοι $\beta : \alpha :: y :$ ΕΙ$=\frac{\alpha y}{\beta}$. ἡ ἄρα ΙΗ$= Z - \frac{\alpha y}{\beta} = \chi$. ἐκῦν ἀχθείσης ἀπὸ μὲν τῦ Ι τῆς ΙΛ τῇ ΔΕ παραλλήλυ, ἀπὸ δὲ τῦ Α τῆς ΑΛ τῇ ΕΗ, ἔσεται ἡ μὲν ΛΙ$=y$, ἡ δὲ ΙΗ$=\chi$, ἡ δὲ ΙΜ$=-\chi$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ϛʹ.

§. 257. Τὴν ἐξίσωσιν εὑρεῖν τὴν τὰς ἐν ταῖς Ἀσυμπτώτοις Ὑπερβολὰς ἐμφαίνυσαν.

Ἔςωσαν τῶν Ὑπερβολῶν ΡΒΥ, ΞΑΣ (ϑ) τῶν διὰ τῆς κατὰ τὸ ζ (ι) ἐξισώσεως γεγραμμένων ἀσύμπτωτα, αἱ ΖΙ, ΠΦ. καὶ ἀπὸ τῦ τυχόντος τῆς Ὑπερβολῆς σημείυ Ρ ἐπὶ τὴν ἀσύμπτωτον ΚΙ τετάχθω ἡ ΡΗ, παράλληλος τῇ ΚΠ, καὶ ἀχθείσης τῆς κατὰ κορυφὴν ἐφαπτομένης ΔΕ, τετάχθω ἀπὸ τῦ Ρ ἐπὶ τὸν ΚΝ ἄξονα ἡ ΡΝ, κὶ ἐκβεβλήσθω ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη. καὶ ἔςω ἡ μὲν ΚΗ$=$Ζ, ἡ δὲ ΗΡ$=$Π, ἡ δὲ ΒΝ$=\chi$, ἡ δὲ ΝΡ$=y$, ἡ δὲ πλαγία πλευρὰ ΑΒ$=2\alpha$, ἡ δὲ ΔΕ$=2\beta$. ἐκῦν ἔσεται ἡ μὲν ΚΝ$=\alpha+\chi$, ἡ δὲ ΚΔ$=$ΚΕ$=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$.

Ἐπεὶ δὲ τὰ ΚΕΔ, ΗΡΙ τρίγωνα ὅμοιά εἰσιν, ἔςιν ἄρα ὡς ΚΕ : ΕΔ :: ΗΡ : ΡΙ, ἤτοι ὡς $\sqrt{\alpha^2+\beta^2} : 2\beta ::$ Π: ΡΙ. ἡ ἄρα ΡΙ$=\frac{2\beta\Pi}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$. ἔσεται δὲ κὶ ὡς ΚΔ: ΕΔ :: ΚΗ : ΡΠ, (ἔςι γὰρ ὡς ΚΙ : ΗΙ :: ΠΙ : ΡΙ. κὶ

(ϑ) Πίν. XXXI. χ. 1. (ι) Πίν. XXIX.

καὶ διαιρεθέντα, ὡς ΚΗ : ΗΙ :: ΠΡ : ΡΙ. καὶ ἐναλλὰξ ὡς ΚΗ : ΠΡ :: ΗΙ : ΡΙ. ὡς δὲ ΗΙ : ΡΙ :: ΚΔ : ΕΔ. διὸ καὶ ὡς ΚΔ : ΕΔ :: ΚΗ : ΡΠ.) ἤτουν ὡς $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$: 2β :: Ζ : ΡΠ. διὸ ἡ ΡΠ $= \frac{2\beta Z}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$. πάλιν ἐπειδὴ ὡς ΚΒ : ΚΝ :: ΒΔ : ΝΙ, ἤτοι ὡς $\alpha : \alpha+\chi :: \beta :$ ΝΙ, ἡ ἄρα ΝΙ $= \frac{\beta}{\alpha}.\overline{\alpha+\chi}$. ἀλλ' ἡ ΝΙ $-$ ΝΡ $=$ ΡΙ. ἄρα ἡ ΡΙ $= \frac{\beta}{\alpha}.\overline{\alpha+\chi-y}$. ἐπεὶ δὲ ἡ ΝΙ $=$ ΝΠ, ἔσεται ἡ ΝΙ $+$ ΝΡ $=$ ΡΠ. διὸ ἡ ΡΠ $= \frac{\beta}{\alpha}.\overline{\alpha+\chi+y}$. Ἔστι δὲ τὸ ΙΡ. ΡΠ $=$ ΙΡ. ΡΠ. διὸ ἡ ἐν τῷ η ἐξίσωσις γίνεται. (κ) ἐξ ἧς, τεθέντος ἀντὶ τοῦ y^2 τοῦ ἴσου αὐτῷ, τοῦ ἐκ τῆς κατὰ τὸ ζ ἐξισώσεως προκύπτοντος, ἡ ἐν τῷ θ. ἐξ αὐτῆς δὲ ἡ ἐν τῷ ι, ἥτις τὰς ἐν ταῖς Ἀσυμπτώτοις Ὑπερβολὰς ἐμφαίνει.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄.

§. 258. Ἐν τῇ ἐξισώσει ἄρα τῇ ἐμφαινούσῃ τὰς ἐν ταῖς Ἀσυμπτώτοις Ὑπερβολὰς τὸ ἐκ τῆς ἀποτετμημένης καὶ τῆς τεταγμένης ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ γνωστῷ καὶ ὡρισμένῳ μεγέθει.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄.

§. 259. Ἐν ταῖς Ὑπερβολαῖς ἄρα ταῖς ἐν ταῖς Ἀσυμπτώτοις αἱ ἀποτετμημέναι ἐν ἀντιπεπονθότι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἀπὸ τῶν περάτων αὐτῶν τεταγμένων. ληφθείσης γὰρ ἑτέρας ὁποιασοῦν ἀποτετμημένης, οἷον τῆς ΚΤ, (λ) καὶ ταχθείσης ἀπὸ τοῦ Τ τῆς ΤΘ, εὑρεθήσεται ὡς ἀνωτέρω τὸ ΚΤ. ΤΘ $= \frac{\alpha^2+\beta^2}{4}$. διὸ τὸ

(κ) Πίν. XXIX. (λ) Πίν. XXXI. σχ. 1.

Π. Ζ=ΚΤ. ΤΘ, ἤτοι τὸ ΚΗ. ΗΡ=ΚΤ. ΤΘ. ὡς ἄρα ΚΗ : ΚΤ : : ΤΘ : ΗΡ.

ΚΕΦ. ΚΒ'.

Περὶ τῆς ἐν ἐπιπέδῳ τῶν κωνικῶν Τομῶν ἀναγραφῆς.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Λ'.

§. 260. Τὴν τυχῦσαν Παραβολὴν γράψαι.

Κανόνι ἠυλακισμένῳ τῷ ΑΒ (μ) γνώμων ἐνηςμόσθω ὁ ΗΔΘ, ᾧ νῆμα ἐφήςμοςαι τὸ ΔΕΦ. ϗ ἀχθείσης εὐθείας τῆς ΖΦ πρὸς ὀρθὰς τῷ ΑΒ κανόνι, ἐπὶ τυχόντος αὐτῆς σημείȣ τȣ Φ ςῆσον τὸ ἕτερον τῶν τȣ νήματος περάτων. ϗ δίχα τμηθείσης τῆς ΦΖ κατὰ τὸ Γ, ἐπ' αὐτῆς τῆς ΖΦ κειμένȣ τȣ ΗΔΘ γνώμονος, ἧλος παρεντεθεὶς ὁ Ε, ἐπὶ τȣ Γ πρῶτον ςήτω, εἶτα ἐπὶ τὰ Β μέρη φερόμενος, συμφερέτω τὸν γνώμονα, τȣ μὲν ΦΕ μέρȣς τȣ νήματος ἐντεταμένȣ διαπαντὸς διαμένοντος, τȣ δὲ λοιπȣ τῷ γνώμονι ἐνηςμοσμένȣ. λέγω ὅτι ἡ ΓΕ καμπύλη, ἡ ὑπὸ τȣ ἥλȣ φερομένȣ γραφεῖσα, Παραβολή ἐςιν. Ἤχθω γὰρ ἀπό τινος αὐτῆς σημείȣ, τȣ Ε ἡ ΕΚ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΖΦ. ϗ ἔςω ἡ μὲν ΖΦ= 2α, ἡ δὲ ΓΚ $=\chi$, ἡ δὲ ΕΚ $=y$. ȣ̓κȣν ἔςαι ἡ μὲν ΖΓ=ΓΦ $=\alpha$, ἡ δὲ ΦΚ $=\alpha-\chi$, ἡ δὲ ΦΕ=ΕΔ= ΖΚ $=\alpha+\chi$.

Ἐπεὶ ȣ̓ν τὸ $\overline{\Phi E}^2=\overline{\Phi K}^2+\overline{KE}^2$, ἐκ τȣτȣ ἄρα ἡ ἐν τῷ Α ἐξίσωσις γίνεται, (ν) ἐξ ἧς ἡ ἐν τῷ Β, Παραβολὴν ἐμφαίνȣσα, παράμετρον ἔχȣσαν τὸ 4α. (§. 236.)

ΠΟ-

(μ) Πίν. XXX. χ. 4. (ν) Πίν. XXXII.