ΚΕΦ. ΚΑ'.

Περὶ τῆς καλȣμένης ὑψηλοτέρας Γεωμετρίας, καὶ πρῶτον περὶ τῶν ἐξισώσεων τῶν ἐμφαινȣσῶν τὰς τȣ̃ Κώνȣ τομάς.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 221. Ὑψηλοτέραν εἰώθασι καλεῖν Γεωμετρίαν τὴν περί τε τῶν Κώνȣ τομῶν καὶ ἄλλων διαλαμβάνȣσαν καμπύλων, περὶ ὧν ἐδὲν περιέχει ἡ σοιχειώδης Γεωμετρία, καὶ δι᾽ ὧν διάφορα ἐπιλύεται προβλήματα, διὰ τῶν γεωμετρικῶν σοιχείων μηδαμῶς ἐπιλυόμενα. ἅπαντα δὲ τὰ ἑξῆς τȣ̃δε τȣ̃ βιβλίȣ κεφάλαια, τὰ περὶ τῆς ὑψηλοτέρας ἐμπεριέχει Γεωμετρίας.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'.

§. 222. Τὴν τρίγωνον ἐμφαίνȣσαν ἐξίσωσιν εὑρεῖν.

Ἔσω σύζυγα τρίγωνα τὰ ΓΒΑ, ΓΕΔ, (χ) τὰ ἀπὸ τομῆς διὰ τȣ̃ ἄξονος συζυγῶν Κώνων γενόμενα. καὶ εἰλήφθω ἀπὸ τῆς τȣ̃ Κώνȣ πλευρᾶς ΓΑ ἀποτετμημένη ἡ ΓΖ, καὶ ἀπὸ τȣ̃ Ζ τετάχθω, εἴτȣν ἤχθω τῇ τῆς βάσεως τȣ̃ Κώνȣ διαμέτρῳ ΑΒ παράλληλος ἡ ΖΗ. καὶ ἔσω ἡ μὲν ΓΑ $= \alpha$, ἡ δὲ ΑΒ $= \beta$, ἡ δὲ ΓΖ $= \chi$, ἡ δὲ ΖΗ $= y$.

Καὶ ἐπεὶ ὡς ΓΑ : ΑΒ : : ΓΖ : ΖΗ, ἤτοι ὡς $\alpha : \beta :: \chi : y$, προκύψει ἄρα ἡ κατὰ τὸ ν ἐξίσωσις. (ψ)

Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ληφθείσης τῆς μὲν ἀποτετμημένης ΓΚ $= -\chi$, τῆς δὲ τεταγμένης ΚΘ $= -y$, ἔσεται ὡς $\alpha : \beta :: -\chi : -y$. ἐξ ȣ̃ γίνεται ἡ ἐν τῷ ξ ἐξίσωσις, ἡ αὐτὴ ȣ̃σα τῇ κατὰ τὸ ν.

Ἡ ἐν τῷ ν ἄρα ἐξίσωσις ἡ ζητȣμένη ἐςὶν, ἡ τρίγωνον ἐμφαίνȣσα.

ΠΟ-

(χ) Πίν. XXVIII. χ. 1. (ψ) Πίν. XXVI.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α'.

§. 223. Ἡ τρίγωνον ἄρα ἐμφαίνεται ἐξίσωσις δύω ἄγνωστα περιέχει, ὧν ἑκάτερον μονάδα μὲν ἔχει ἐκθέτην, γνωστὴν δὲ ἔκθεσιν πολλαπλασιαστὴν, ἢ συμπράκτορα.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β'.

§. 224. Ἐὰν οὖν ἐκ τῶν τοῦ προτεθέντος ἡμῖν προβλήματος συνθηκῶν ὁμοία τῇ ἐν τῷ ν προκύψῃ ἐξίσωσις, ἡ τούτου ἐπίλυσις, εἴτουν ἡ τῶν ἀγνώστων εὕρεσις, ἀπὸ τριγώνου συστάσεως ἤρτηται. ἀχθεισῶν γὰρ τῶν ΓΑ, ΑΒ, εὐθειῶν, (ω) γωνίαν περιεχουσῶν τὴν τυχοῦσαν, ὧν ἡ μὲν ἴση α, ἡ δὲ β, ἐπιζευχθείσης τε τῆς ΓΒ, καὶ μέρους τυχόντος τῆς ΓΑ ληφθέντος, οἷον τοῦ $ΓΖ = \chi$, (ἀόριστα γὰρ τὰ τοιαῦτα προβλήματα) ἡ ἀπὸ τοῦ πέρατος Ζ ἀγομένη παράλληλος τῇ ΑΒ, ἤτοι ἡ ΖΗ, ἴση ἐστὶ τῷ y. ὁμοίως ἐκβληθεισῶν τῶν ΑΓ, ΒΓ, καὶ ληφθείσης τῆς $ΓΚ = -\chi$. ἔσεται ἡ ἀπὸ τοῦ Κ τῇ ΑΒ ἀγομένη παράλληλος, ἤτοι ἡ $ΚΘ = -y$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 225. Ἐνίοτε ἡ ἐκ τῶν συνθηκῶν τοῦ προβλήματος συσταθεῖσα ἐξίσωσις οὐκ ἔστι κατὰ πάντα ὁμοία τῇ ἐν τῷ ν, καίπερ τρίγωνον ἐμφαίνουσα· μεταβάλλεται δὲ ταῖς εἰρημέναις (§. 110 — 115.) μεθόδοις εἰς ἑτέραν ἐντελῶς αὐτῇ ὁμοίαν.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 226. Οἷον ἡ ἐν τῷ ο ἐξίσωσις (Πίν. XXVI.) εἰς ὁμοίαν τῇ ἐν τῷ ν μεταβάλλεται οὕτως· Ἐπεὶ ἡ ἐν τῷ ο ἡ αὐτή ἐστι τῇ ἐν τῷ π, κείσθω τὸ μὲν $\frac{y^2}{\alpha} - y = Ζ$, τὸ δὲ $\chi + \mu = Ω$. τεθήτω δὲ ἀντὶ μὲν τοῦ $\frac{y^2}{\alpha} - y$ τὸ Ζ, ἀντὶ δὲ τοῦ $\chi + \mu$ τὸ Ω ἐν τῇ κατὰ τὸ π ἐξισώσει.

(ω) Πίν. XXVIII. σχ. 1.

σει. ἐκἔν ἡ ἐν τῷ ο εἰς τὴν ἐν τῷ ρ μεταβέβληται, τὴν κατὰ πάντα ὁμοίαν τῇ ἐν τῷ ν. εὑρεθήσονται δὲ τὰ ἄγνωςα χ κ̀ y ὅτως· ἐκκείσθωσαν δύω εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, (α) γωνίαν περιέχεσαι τὴν τυχἔσαν. καὶ ληφθείσης τῆς μὲν ΑΒ $=\alpha$, τῆς δὲ ΒΓ $=\beta$, καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς ΑΓ, εἰλήφθω ἡ ΑΔ $=\Omega$. ἐκἔν ἡ ἀπὸ τἔ Δ ἀχθεῖσα παράλληλος τῇ ΒΓ, ἤτοι ἡ ΔΕ $=Z$. ἐςι γὰρ ὡς ΑΒ : ΒΓ : : ΑΔ : ΔΕ, ἤτἔν ὡς $\alpha : \beta : : \Omega : \Delta E = \beta\Omega = Z$. ἐπεὶ δὲ τὸ $\chi + \mu = \Omega$, ἔςιν ἄρα τὸ $\chi = \Omega^{\alpha} - \mu$. ἐὰν ἄρα ληφθῇ ἡ ΛΘ $=\mu$, ἔσεται ἡ ΘΔ $=\Omega - \mu$. πάλιν ἐπειδὴ τὸ $\frac{y^2}{\alpha} - y = Z$, τὸ ἄρα $y = \frac{y^2}{\alpha} - Z$. ἐκβληθείσης ἔν τῆς $^{\alpha}$ ΔΕ, κ̀ ληφθείσης τῆς $^{\alpha}$ ΖΔ $= \frac{y^2}{\alpha}$, ἔσἸαι ἡ ΖΕ $= \frac{y^2}{\alpha} - Z = y$.

Ἤχθω ἔν ἀπὸ μὲν τἔ Ζ ἡ ΛΖΟ τῇ ΑΒ παράλληλος, ἀπὸ δὲ τἔ Θ ἡ ΘΗ τῇ ΒΓ. κ̀ ἐκβεβλήσθω ἐφ᾽ ἑκάτερα τὰ μέρη ἡ ΑΓ. ἐκἔν ἔσεται ἡ μὲν ΗΖ $=\chi$, ἡ δὲ ΖΕ $=y$. καὶ πᾶσα μὲν ἡ ἀπὸ τῆς ΗΟ ἀπολαμβανομένη, ὡς ἀποτετμημένη, οἷον ἡ ΗΖ, ΗΨ, ΗΟ, τὸ χ ἐμφαίνει· πᾶσα δὲ ἡ ἀπὸ τῆς ΗΛ, τὸ $-\chi$. τῶν δὲ ἀπὸ τῶν περάτων τῶν ἀποτετμημένων τεταγμένων εὐθειῶν αἱ μὲν ἄχρι τἔ Ψ, τὸ y· αἱ δὲ μετὰ τὸ Ψ σημεῖον, τὸ $-y$. οἷον αἱ μὲν ΖΕ, ΛΜ, τὸ y· ἡ δὲ ΟΠ, τὸ $-y$. διὸ ἔσεται ἡ μὲν ΨΟ $=\chi$, ἡ δὲ ΟΠ $=-y$. κ̀ ἡ μὲν ΗΛ $=-\chi$, ἡ δὲ ΛΜ $=y$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 227. Ἐν μὲν τοῖς ἀριθμητικοῖς προβλήμασι τῆς ἐξισώσεως συςαθείσης, διὰ γενικῶν κανόνων τὴν τῶν ἀγνώςων εὕρεσιν πορίζόμεθα· ἐχ ὅτω δὲ ἐν τοῖς γεωμετρικοῖς, (ἐκ τῶν ἐν τῷ προλαβόντι κεφαλαίῳ ἐπιλυθέντων προβλημάτων δῆλον.) καὶ μάλιςα ἐν τοῖς διὰ

(α) Πίν. XXVIII. σ. 2.

διὰ τῆς ὑψηλοτέρας ἐπιλυομένοις Γεωμετρίας. ἡ κατὰ συνέχειαν δὲ πρᾶξις, καὶ ἡ διηνεκὴς τριβὴ πολυμέθοδον ποιεῖ τὸν ἐξασκόμενον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Βʹ.

§. 228. Τὰς κύκλον ἐμφαινούσας εὑρεῖν ἐξισώσεις.

Τοῦ Κώνου ἐπιπέδῳ τμηθέντος τῇ βάσει παραλλήλῳ, κύκλος προκύψει. ἔσω δὴ οὖν οὗτος ὁ ΛΒΓ, (σχ. 3) οὗ ἡ διάμετρος ΑΓ ἴση ἔσω $2a$. κ) εἰλήφθω ἀπὸ τοῦ τῆς διαμέτρου πέρατος ἀποτετμημένη ἡ ΓΔ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ τετάχθω ἡ ΔΒ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΑΓ. κ) ἔσω ἡ μὲν $\Gamma\Delta = \chi$, ἡ δὲ $\Delta B = y$. οὐκοῦν ἡ $A\Delta = 2a - \chi$.

Ἐπεὶ δὲ ὡς $A\Delta : \Delta B :: \Delta B : \Delta\Gamma$, ἤτοι ὡς $2a - \chi : y :: y : \chi$, ἡ ἐν τῷ σ (β) προκύπτει ἐξίσωσις.

Εἰλήφθω δὲ ἀπὸ τοῦ κέντρου Κ (γ) ἡ ἀποτετμημένη $K\Delta = Z$. οὐκοῦν ἔσεται ἡ μὲν $A\Delta = a + Z$, ἡ δὲ $\Gamma\Delta = a - Z$.

Ἐπεὶ δὲ ὡς $A\Delta : \Delta B :: \Delta B : \Delta\Gamma$, ἡ ἐν τῷ τ (δ) συνίσταται ἐξίσωσις. ἑκατέρα ἄρα τῶν ἐν τοῖς σ καὶ τ ἐξισώσεων κύκλον ἐμφαίνει.

ΠΟΡΙΣΜΑ Αʹ.

§. 229. Ἐν μὲν οὖν τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἐξισώσεων, τῶν κύκλον ἐμφαινουσῶν, τῇ κατὰ τὸ σ, τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἐκ τῆς διαμέτρου καὶ τῆς ἀποτετμημένης, λείψει τοῦ ἀπ' αὐτῆς τετραγώνου, ἴσον ἐςὶ τῷ ἀπὸ τῆς τεταγμένης τετραγώνῳ· ἐν δὲ τῇ ἑτέρᾳ, τῇ κατὰ τὸ τ, τὸ ἀπὸ τῆς τοῦ κύκλου ἡμιδιαμέτρου τετράγωνον, λείψει τοῦ ἀπὸ τῆς ἀποτετμημένης τετραγώνου, ἴσον ἐςὶ τῷ ἀπὸ τῆς τεταγμένης τετραγώνῳ. καὶ ἡ μὲν κατὰ τὸ σ ἐξίσωσις ἐμφαίνει τὴν ἀποτετμημένην ἀπὸ τοῦ τῆς

 δια-

(β) Πιν. XXVI. (γ) Πιν. XXVIII. σχ. 3. (δ) Πιν. XXVI.

διαμέτρε πέρατος ἀρχομένην· ἡ δὲ κατὰ τὸ τ, ἀπὸ τῦ κέντρυ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β'.

§. 230. Γραφθήσεται ἄρα ὁ κύκλος διὰ μὲν τῆς κατὰ τὸ σ ἐξισώσεως, ἡμιδιαμέτρῳ τῷ ἡμίσει τῦ πολλαπλασιαςῦ τῦ ἀγνώςυ χ, εἴτυν τῷ α· διὰ δὲ τῆς κατὰ τὸ τ, ἡμιδιαμέτρῳ τῇ τετραγωνικῇ ῥίζῃ τῦ τετραγώνυ τῆς γνωςῆς ἐκθέσεως α^2, εἴτυν τῷ αὐτῷ α.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'.

§. 231. Ἐὰν ἓν ἐκ τῶν τῦ προτεθέντος ἡμῖν προβλήματος συνθηκῶν ὁποτέρα τῶν ἐν τοῖς σ ϗ τ συςαθῇ ἐξίσωσις, ἀπὸ τῆς τῦ κύκλυ ἀναγραφῆς ἡ αὐτῦ ἐπίλυσις ἤρτηται, εἴτυν ἡ τῶν ἀγνώςων εὕρεσις.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 132. Ἔςιν ὅτε ἀνομοία ταῖς εἰρημέναις ἐξισώσεσιν ἐςὶν ἡ συςαθεῖσα ἐξίσωσις, καίπερ κύκλον ἐμφαίνυσα· μεταβάλλεται δὲ εἰς ἑτέραν ὁποτέρᾳ αὐτῶν ὁμοίαν.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 233. Οἷον ἐν τῇ κατὰ τὸ Ι (ε) ἐξισώσει ἀναπληρωθέντος τῦ ἐλλειπῦς τετραγώνυ $y^2 - 2\gamma y$, προκύπτει ἡ ἐν τῷ Κ, ϗ τεθέντος τῦ $y - \gamma = Z$, ἡ ἐν τῷ Λ, ἐξ ἧς ἡ ἐν τῷ Μ. πληρωθέντος δὲ ϗ τῦ ἐλλειπῦς τετραγώνυ $\chi^2 - 2\alpha\chi$, ἡ ἐν τῷ Ν. ϗ τεθέντος τῦ μὲν $\alpha^2 + \gamma^2 = \nu^2$, τῦ δὲ $\chi - \alpha = \Omega$, ἡ ἐν τῷ Ξ ἐξίσωσις γίνεται, ἡ κατὰ πάντα ὁμοία τῇ ἐν τῷ τ. (ζ) εὑρίσκονται δὲ τὰ ἐν τῇ κατὰ τὸ Ι ἄγνωςα ὕτως.

Ἡμιδιαμέτρῳ τῷ $\nu = \sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}$ γεγράφθω κύκλος ὁ ΑΕΒ, (η) ϗ ἀπὸ τῦ κέντρυ Κ εἰλήφθω τῆς ΑΒ δια-

(ε) Πίν. XXIX. (ζ) Πίν. XXVI. (η) Πίν. XXVIII. Σ. 4.

διαμέτρου μέρος τὸ ΚΔ = Ω. καὶ ἀπὸ τοῦ Δ τετάχθω ἡ ΔΕ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΑΒ. ἔσεται τοιγαροῦν ἡ ΔΕ = Ζ. ἐπεὶ δὲ τὸ $\chi - \alpha = \Omega$, ἔσεται τὸ $\chi = \Omega + \alpha$. ληφθείσης οὖν τῆς ΚΛ = α, ἔσεται ἡ ΛΔ = Ω + α = χ. πάλιν ἐπεὶ τὸ $y - \gamma = Z$, ἔσεται τὸ $y = Z + \gamma$. ἐκοῦν τῆς ΕΔ κατὰ τὸ συνεχὲς ἐκβληθείσης, καὶ ληφθείσης τῆς ΔΖ = γ, ἔσεται ἡ ΖΕ = Ζ + γ = y. ἐὰν οὖν ἀπὸ μὲν τοῦ Ζ ἀχθῇ ἡ ΘΗ τῇ ΑΒ παράλληλος, ἀπὸ δὲ τοῦ Λ ἡ ΛΓ τῇ ΕΜ, ἔσεται ἡ μὲν ΓΖ = χ, ἡ δὲ ΖΕ = y.

Αἱ μὲν οὖν ἀπὸ τῆς ΓΘ ὡς ἀποτετμημέναι ἐκλαμβανόμεναι, καταφατικαὶ ἔσονται, ἤτοι χ· αἱ δὲ ἀπὸ τῆς ΓΗ, ἀποφατικαὶ, εἴτουν −χ. τῶν δὲ ἀπὸ τῶν περάτων αὐτῶν ταττομένων αἱ μὲν ἐπὶ τὰ Ε μέρη καταφατικαί εἰσιν, ἤτοι y, οἷα ἡ ΖΕ· αἱ δὲ ἐπὶ τὰ Μ μέρη ἀποφατικαὶ, οἷα ἡ ΖΜ = −y. ἐὰν δὲ ληφθῇ ἡ ΓΘ = χ, καταφατικὴν μὲν τεταγμένην ἀπὸ τοῦ Θ ἀγαγεῖν ἔνεστιν, ἀποφατικὴν δ᾽ οὔ. ὡσαύτως ληφθείσης τῆς ΓΗ = −χ, ἀπὸ τοῦ Η καταφατικὴ μὲν ἄγεται τεταγμένη, ἀποφατικὴ δὲ οὐδαμῶς.

Ὁμοίως ἐν τῇ κατὰ τὸ Ο (ϑ) ἐξισώσει ἀναπληρωθέντος τοῦ ἐλλειποῦς τετραγώνου, ἡ κατὰ τὸ Π γίνεται, τεθείσης δὲ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης $y + \frac{\beta\chi}{\alpha} = Z$, ἡ ἐν τῷ Ρ προκύπτει, ὁμοία οὖσα τῇ κατὰ τὸ α σ. τὰ δὲ ἄγνωστα χ καὶ y εὑρεθήσονται οὕτως·

Ἡμιδιαμέτρῳ τῷ α κύκλου γραφέντος τοῦ ΑΕΒ, (ι) εἰλήφθω ἡ ΑΔ = χ. ἡ ἄρα τεταγμένη ΔΗ = Ζ. ἐπεὶ δὲ τὸ $y + \frac{\beta\chi}{\alpha} = Z$, ἔσεται τὸ $y = Z - \frac{\beta\chi}{\alpha}$. ἐὰν οὖν ἀπὸ

(ϑ) Πίν. XXIX. σχ. 5. (ι) Πίν. XXVIII.

τȣ͂ κέντρȣ Κ ἀχθῇ ἡ ΚΘ παράλληλος μὲν τῇ ΔΗ, ἴση δὲ τῷ β, ϗ ἐπιζευχθῇ ἡ ΛΘ, ἔσεται ὡς ΑΚ: ΚΘ :: ΛΔ : ΔΖ, ἤτοι ὡς $\alpha : \beta :: \chi : \Delta Z$. διὸ ἡ $\Delta Z = \frac{\beta\chi}{\alpha}$. ȣ̓κȣ͂ν ἡ $HZ = Z - \frac{\beta\chi}{\alpha} = y$.

Αἱ μὲν ἄρα ἀποτετμημέναι ἀπὸ τῆς ΑΒ διαμέτρȣ λαμβάνονται, αἱ δὲ ἀπὸ τῶν περάτων αὐτῶν τεταγμέναι ἀπὸ τῆς ΑΓ ϗ τῆς τȣ͂ κύκλȣ περιφερείας περατȣ͂νται. ὧν αἱ μὲν ἐπὶ τὰ Η μέρη καταφατικαί εἰσιν, οἷα ἡ $ZH = y$· αἱ δὲ ἐπὶ τὰ Ε, ἀποφατικαί, οἷα ἡ $ZE = -y$. καὶ ἀπὸ τȣ͂ Γ ἀποφατικὴ μὲν τεταγμένη περατȣ͂ται, καταφατικὴ δὲ ȣ̓δαμῶς.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'.

234. Τὴν ἐξίσωσιν εὑρεῖν, τὴν ἐμφαίνȣσαν Παραβολήν. (κ)

Τμηθέντος τȣ͂ ΑΓΒ Κώνȣ (λ) ἐπιπέδῳ ὁποτέρᾳ τῶν πλευρῶν αὐτȣ͂, οἷον τῇ ΓΛ, παραλλήλῳ, ἡ ΜΚΙ Παραβολὴ γίνεται, ἧς ἄξων ἡ ΚΛ, ἡ κοινὴ τομὴ τȣ͂ τεμόντος ἐπιπέδȣ, ϗ τȣ͂ διὰ τȣ͂ ἄξονος τριγώνȣ ΑΓΒ. ἐὰν δὲ ὁ Κῶνος καὶ ἐπιπέδῳ τμηθῇ τῇ βάσει αὐτȣ͂ παραλλήλῳ, τέμνοντι καὶ τὸν τῆς Παραβολῆς Ἄξονα ΚΛ, κύκλος γίνεται ὁ ΔΘΖ, ἐν ᾧ ἡ κοινή, τομὴ ΘΙ αὐτȣ͂ τε καὶ τῆς Παραβολῆς, πρὸς ὀρθὰς μὲν ἐστι τῇ διαμέτρῳ ΔΖ ϗ τῷ ἄξονι ΚΛ, τεταγμένη δὲ ἐν ἑκατέρᾳ τῶν τομῶν, τῷ κύκλῳ δηλαδὴ ϗ τῇ Παραβολῇ.

Κείσθω γνωστὸν εἶναι τὸν τῆς Παραβολῆς ἄξονα καὶ τὰ μέρη ΑΛ, ΛΒ τῆς διαμέτρȣ ΑΒ τῆς τȣ͂ Κώνȣ βάσεως. καὶ ἔσω ἡ μὲν $K\Lambda = \gamma$, ἡ δὲ $\Lambda B = \beta$ ἡ δὲ $A\Lambda = \Delta E = \alpha$, ἡ δὲ $KE = \chi$, ἡ δὲ $E\Theta = y$.

Ἐπεὶ

(κ) Προδεδιδαγμένον δεῖ εἶναι τὸν ἀκροατὴν τὰ περὶ τῶν τȣ͂ Κώνȣ Τομῶν.

(λ) Πίν. XXVIII. σχ. 6.

Ἐπεὶ ὡς ΚΛ : ΛΒ :: ΚΕ : ΕΖ, ἤτοι ὡς $\gamma : \beta :: \chi :$ ΕΖ ἔσεται ἡ ΕΖ $= \frac{\beta\chi}{\gamma}$. ἐπεὶ δὲ καὶ ὡς ΔΕ : ΕΘ :: ΕΘ : ΕΖ, τετέστιν ὡς $\alpha : y :: y :$ ΕΖ, ἡ αὐτὴ ἄρα ΕΖ $= \frac{y^2}{\alpha}$. ὅθεν τὸ $\frac{y^2}{\alpha} = \frac{\beta\chi}{\alpha}$. ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης, ἡ κατὰ τὸ Σ γίνεται, (μ) ἡ Παραβολὴν ἐμφαίνουσα.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄.

§. 235. Ἐν τῇ ἐξισώσει ἄρα τῇ Παραβολὴν ἐμφαινέσῃ, τὸ ὀρθογώνιον, τὸ ἐκ γνωστῆς τινὸς ἐκθέσεως καὶ τῆς ἀποτετμημένης ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς τεταγμένης τετραγώνῳ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄.

§. 236. Ὁ τῆς ἀποτετμημένης χ πολλαπλασιαστὴς, ἤτουν τὸ $\frac{\alpha\beta}{\gamma}$, ἡ παράμετρος τῆς Παραβολῆς ἐστίν. ἡ γὰρ τῆς Παραβολῆς παράμετρος τρίτη ἀνάλογόν ἐστι τῆς ἀποτετμημένης, καὶ τῆς τεταγμένης. (ν) ἔστι δὲ τὸ $\frac{\alpha\beta}{\gamma}$. τρίτη ἀνάλογον τῆς τε χ καὶ τῆς y, διὰ γὰρ τὴν ἐν τῷ Σ ἐξίσωσιν ἐστὶν ὡς $\chi : y :: y : \frac{\alpha\beta}{\gamma}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄.

§. 237. Ὁ Ἄξων διχοτομεῖ τὴν Παραβολήν. ἐὰν γὰρ ἡ ΘΕ (ξ) ἐκβληθεῖσα, τῇ τομῇ συμπέσῃ κατὰ τὸ Η, εὑρεθήσεται τὸ $\overline{ЕН}^2 = \frac{\alpha\beta\chi}{\gamma}$. ἐξ οὗ δῆλον, ὅτι τὸ $\overline{ΕΘ}^2 = \overline{ΕΗ}^2$. διὸ καὶ ἡ ΕΘ $=$ ΕΗ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ διχο-

(μ) Πίν. XXIX. (ν) Ὅρα τὸν κα΄ ὁρισμ. τῶν Κων. Τομ. τὸν ἐν σελ. 85 τοῦ β΄. τόμ.

(ξ) Πίν. XXVIII. σχ. 6.

θήσεται, ὅτι πᾶσαι αἱ τεταγμέναι ὑπὸ τοῦ Ἄξονος διχοτομοῦνται. ἐξ οὗ δῆλον, ὅτι καὶ ἡ Παραβολὴ ὑπ' αὐτοῦ διχοτομεῖται.

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ'.

§. 238. Ἡ παραβολικὴ καμπύλη ἐπ' ἄπειρον ἐκβάλλεται, τοσούτῳ μᾶλλον τοῦ ἄξονος ἀφισαμένη, ὅσῳ πορρωτέρω προσεπεκτείνεται. ἐπεὶ γὰρ τὸ $\frac{\alpha\beta\chi}{\gamma} = y^2$, ὅσῳ μείζων ᾖ ἡ ἀποτετμημένη χ τοσούτῳ μεῖζον καὶ τὸ y^2, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς τεταγμένης τετράγωνον, καὶ ἑπομένως καὶ αὐτὴ ἡ τεταγμένη. ἐπεὶ δὲ τῆς προληφθείσης ἀποτετμημένης μείζονα λαμβάνειν ἐνὸν ἐπ' ἄπειρον, καὶ ἡ τεταγμένη ἄρα τῆς προτεταγμένης αὐτῆς ἐπ' ἄπειρον μείζων ἔσται. ἐκ τούτου οὖν δῆλον ὅτι ἡ καμπύλη ἐπ' ἄπειρον ἐκβάλλεται, καὶ τοσούτῳ μᾶλλον τοῦ ἄξονος ἀφίσαται, ὅσον πορρωτέρω προσεπεκτείνεται.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ε'.

§. 239. Αἱ ἐν τῇ Παραβολῇ ἀποτετμημέναι διπλασίονα λόγον ἔχουσι τῶν τεταγμένων. ὥσπερ γὰρ εὕρηται τὸ $\frac{\alpha\beta\chi}{\gamma} = y^2$, οὕτω τοῦ μὲν Ω ἄλλην ἐμφαίνοντος ἀποτετμημένην, τοῦ δὲ Ψ ἄλλην τεταγμένην, τὴν ἀπὸ τοῦ πέρατος τοῦ Ω ἀχθεῖσαν, εὑρεθήσεται τὸ $\frac{\alpha\beta\Omega}{\gamma} = \Psi^2$. διὸ ἔσεται ὡς $\frac{\alpha\beta\chi}{\gamma} : \frac{\alpha\beta\Omega}{\gamma} :: y^2 : \Psi^2$, εἴτουν ὡς $\chi : \Omega :: y^2 : \Psi^2$. ἐξ οὗ δῆλον τὸ προκείμενον.

ΠΟΡΙΣΜΑ ς'.

§. 240. Ἐὰν οὖν ἐκ τῶν τοῦ προτεθέντος ἡμῖν προβλήματος συνθηκῶν ἐξίσωσις συσταθῇ ἡ κατὰ τὸ Σ, (o) ἡ τύ-

(o) Πίν. XXIX.

τούτου ἐπίλυσις, ἤγουν ἡ τῶν ἀγνώστων εὕρεσις, ἀπὸ τῆς ἀναγραφῆς ἤρτηται τῆς Παραβολῆς.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 241. Καίτινες δὲ τῶν ἐξισώσεων τῶν μὴ ὁμοίων τῇ κατὰ τὸ Σ εἰς ἑτέρας μεταβάλλονται αὐτῇ ὁμοίας.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 242. Οἷον ἡ κατὰ τὸ Τ εἰς τὴν κατὰ τὸ Υ μεταβάλλεται, τεθείσης τῆς μὲν τοῦ τετραγώνου ῥίζης $y+\beta = Z$, τοῦ δὲ πολλαπλασιαστοῦ τοῦ χ, ἤγουν τοῦ $2\alpha - \frac{2\beta}{\gamma} = 2\nu$. καταγράφεται δὲ ἡ ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ Υ ἐξισώσεως ἐμφαινομένη Παραβολὴ, δι᾽ ἧς τὰ ἄγνωστα χ καὶ y εὑρίσκονται, οὕτω·

Παραμέτρῳ (π) τῷ 2ν τῷ τοῦ χ πολλαπλασιαστῇ γεγράφθω Παραβολή. (ρ) ληφθείσης δὲ ἀπὸ τοῦ ΑΗ ἄξονος ἀποτετμημένης τῆς $AB = \chi$, τετάχθω ἀπὸ τοῦ Β ἡ ΒΓ. ἔσται δὴ οὖν ἡ $B\Gamma = Z$. ἐπεὶ δὲ τὸ $y+\beta = Z$, ἔσται τὸ $y = Z-\beta$. ληφθείσης οὖν τῆς $B\Delta = \beta$, ἔσεται ἡ $\Delta\Gamma = Z-\beta = y$. ἐὰν οὖν ἀπὸ μὲν τοῦ Δ ἀχθῇ ἡ ΔΕ τῇ ΑΗ παράλληλος, ἀπὸ δὲ τῆς κορυφῆς Α ἡ ΑΕ τῇ ΒΓ, καὶ ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη ἐκβληθῇ ἡ ΓΒ, ἔσεται ἡ μὲν $E\Delta = \chi$, ἡ δὲ $\Delta\Gamma = y$, ἡ δὲ $\Delta Z = -y$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ΄.

§. 243. Τὰς ἔλλειψιν ἐμφαινούσας ἐξισώσεις εὑρεῖν.

Τμηθέντος τοῦ ΗΕΘ Κώνου (σχ. 8.) ἐπιπέδῳ ἑκατέραν τῶν ΗΕ, ΗΘ πλευρῶν τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου ΕΗΘ διατέμνοντι, ἡ Ἔλλειψις ΑΖΓ γίνεται, ἧς μείζων διάμε-

(π) Πίν. XXVIII. σχ. 7.

(ρ) Ὅρα τὴν δ΄. καὶ ι΄. Συνέπ. τῆς ς΄. προτ. τὴν ἐν σελ. 109. ὁμοίως καὶ τὴν δ΄. Συνέπ. τῆς ζ΄, προτ. τὴν ἐν σελ. 113. τοῦ Β΄. Τόμ. τῶν Κων. Τομ. καὶ τὸ ἑξῆς §. 260.

μετρος, ἡ πλαγία πλευρά, ἡ ΓΑ, ἡ κοινὴ τομὴ τοῦ διατεμόντος ἐπιπέδου, ϗ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου. ἐὰν δὲ τμηθῇ ὁ Κῶνος ϗ ἐπιπέδῳ τῇ βάσει αὐτοῦ παραλλήλῳ, ϗ αὐτὴν τὴν τῆς Ἐλλείψεως πλαγίαν πλευρὰν διατέμνοντι, κύκλος γίνεται ὁ ΙΖΛ, ἐν ᾧ ἡ κοινὴ τομὴ αὐτοῦ τε καὶ τῆς Ἐλλείψεως, ἤτουν ἡ ΖΝ, πρὸς ὀρθάς ἐστι τῇ διαμέτρῳ αὐτοῦ ΙΛ, ϗ τῇ τῆς Ἐλλείψεως ΑΓ. Ἤχθωσαν οὖν ἀπὸ τῶν Α καὶ Γ σημείων αἱ ΑΒ, ΓΜ τῇ ΙΛ παράλληλοι. ϗ ἔστω ἡ μὲν ΑΒ $= \beta$, ἡ δὲ ΓΜ $= \gamma$, ἡ δὲ ΑΓ $= 2\alpha$, ἡ δὲ ΑΔ $= \chi$, ἡ δὲ ΔΖ $= y$. ϗ ἔσται δὴ ἡ ΓΔ $= 2\alpha - \chi$. Ἐπεὶ δὲ ὡς ΑΓ : ΓΜ :: ΑΔ : ΔΛ, ἤτοι ὡς $2\alpha : \gamma :: \chi :$ ΔΛ, ἔσεται ἡ ΔΛ $= \frac{\gamma\chi}{2\alpha}$. πάλιν ἐπειδὴ ὡς ΓΑ : ΑΒ :: ΓΔ : ΔΙ, ἤτουν, ὡς $2\alpha : \beta :: 2\alpha - \chi :$ ΔΙ, ἔσεται ἄρα ἡ ΔΙ $= \frac{2\alpha\beta - \beta\chi}{2\alpha}$. ἐπεὶ δέ ἐστι ϗ ὡς ΙΔ : ΔΖ :: ΔΖ : ΔΛ, τουτέστιν ὡς $\frac{2\alpha\beta - \beta\chi}{2\alpha} : y :: y : \frac{\gamma\chi}{2\alpha}$, γίνεται ἄρα ἡ ἐν τῷ Φ (σ) ἐξίσωσις, ἐξ ἧς ἡ ἐν τῷ Χ, ἐξ αὐτῆς δὲ, τεθέντος τοῦ $\beta\gamma = 4\nu^2$, ἡ ἐν τῷ Ψ.

Ἐὰν δὲ, δίχα τμηθείσης τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΓΑ (τ) κατὰ τὸ Κ, ἀπὸ τοῦ κέντρου Κ ληφθῇ ἡ ἀποτετμημένη ΚΔ $= Z$, ἔσεται ἡ μὲν ΓΔ $= \alpha + Z$, ἡ δὲ ΑΔ $= \alpha - Z$. διὸ δὴ διὰ τὰ προειρημένα, ἡ μὲν ΔΛ $= \frac{\alpha\gamma - \gamma Z}{2\alpha}$, ἡ δὲ ΔΙ $= \frac{\alpha\beta + \beta Z}{2\alpha}$. διὸ τὸ $y^2 = \frac{\beta\gamma}{4\alpha^2} . \overline{\alpha + Z} . \overline{\alpha - Z}$.

ἐν

(σ) Πίν. XXIX. (τ) Πίν. XXVIII. σχ. 8.

ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης ἡ ἐν τῷ Ω γίνεται (υ) ἐξ αὐτῆς δὲ τεθέντος τῦ $\beta\gamma = 4\nu^2$, ἡ ἐν τῷ Λ.

Αἱ ἄρα ἐν τοῖς Ψ καὶ Λ ἐξισώσεις αἱ ζητόμεναί εἰσιν, ὧν ἑκατέρα Ἔλλειψιν ἐμφαίνει.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α'.

§. 244. Τοιγαρῦν ἐν μὲν τῇ ἑτέρᾳ των ἐξισώσεων τῶν Ἔλλειψιν ἐμφαινυσῶν, τῇ κατὰ τὸ Ψ, τὸ γινόμενον ἐκ τῆς πλαγίας πλευρᾶς καὶ τῆς ἀποτετμημένης, λείψει τῦ ἀπ' αὐτῆς τετραγώνυ, ἴσον ἐςὶ τῷ γινομένῳ ἐκ γνωςῆς τινὸς ἐκθέσεως καὶ τῦ ἀπὸ τῆς τεταγμένης τετραγώνυ· ἐν δὲ τῇ ἑτέρᾳ, τῇ κατὰ τὸ Λ, τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς πλαγίας πλευρᾶς τετράγωνον, λείψει τῦ ἀπὸ τῆς ἀποτετμημένης τετραγώνυ, ἴσον ἐςὶ τῷ γινομένῳ ἐκ γνωςῆς τινὸς ἐκθέσεως καὶ τῦ ἀπὸ τῆς τεταγμένης τετραγώνυ. καὶ ἡ μὲν κατὰ τὸ Ψ ἐμφαίνει τὴν ἀποτετμημένην ἀπὸ τῦ τῆς διαμέτρυ πέρατος ληφθεῖσαν· ἡ δὲ κατὰ τὸ Λ, ἀπὸ τῦ κέντρυ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β'.

245. Ἡ τῆς Ἐλλείψεως ἐλάσσων διάμετρος ἴση ἐςὶ τῷ διπλασίῳ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τῦ ὀνομαςῦ τῦ κλάσματος, εἴτυν τῷ 2ν. ἐὰν γὰρ ἡ ἀποτετμημένη χ ἴση ληφθῇ τῇ ΑΚ, εἴτυν τῷ α, ἡ ἐν τῷ Ψ ἐξίσωσις εἰς τὴν ἐν τῷ C μεταβάλλεται, ἐξ ἧς δῆλον ὅτι τὸ $y^2 = \nu^2$. διὸ τὸ μὲν $y = \nu$, τὸ δὲ $2y = 2\nu$. ἀλλὰ τὸ $2y$ ἡ ἐλάσσων τῆς Ἐλλείψεως διάμετρός ἐςιν, (ὅτε γὰρ τὸ $\chi = \alpha$, ἡ τεταγμένη y διὰ τῦ κέντρυ διήκει) ἄρα καὶ τὸ 2ν. ὅτε δὲ ἡ τεταγμένη διὰ τῦ κέντρυ διήκει, ἡ ἀποτετμημένη $Z = o$. διὸ ἡ ἐν τῷ Α ἐξίσωσις εἰς τὴν ἐν τῷ D μεταβάλλεται. ἐξ ἧς πάλιν δῆλον, ὅτι τὸ $2y = 2\nu$.

ΣΗ.

(υ) Πίν. XXIX.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 246. Ἰςέον δὲ ὅτι ἡ ἐλάσσων τῆς Ἐλλείψεως διάμετρος ἴση ἐςὶ τῷ διπλασίῳ τῆς ῥίζης τῦ κλάσματος, ἐὰν ὁ γνωςὸς ἀριθμητὴς αὐτῦ, τὸ τετράγωνον ᾖ τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς μείζονος διαμέτρυ, οἷός ἐςιν ὁ τῶν προκειμένων ἐξισώσεων, τυτέςι τὸ α^2. ἐὰν δὲ ἄλλος ᾖ ὁ ἀριθμητὴς, οἷος ὁ ἐν τοῖς E, F, ἡ ἐλάσσων διάμετρος ἴση ἐςὶ τῇ τετραγωνικῇ ῥίζῃ τῆς τετάρτης ἀναλόγυ, τῦ ἀριθμητῦ τῦ κλάσματος, τῦ παρονομαςῦ, καὶ τῦ ἀπὸ τῆς μείζονος διαμέτρυ τετραγώνυ, ἤτυν τῦ β^2, ν^2 καὶ $4\alpha^2$. ἡ τύτων γὰρ τετάρτη ἀναλογόν ἐςιν τὸ $\frac{4\alpha^2\nu^2}{\beta^2}$. ὗτινος τετραγωνικὴ ῥίζα τὸ $\frac{2\alpha\nu}{\beta}$. τεθέντος δὲ τῦ $\chi = \alpha$, ἡ ἐν τῷ E ἐξίσωσις εἰς τὴν ἐν τῷ G μεταβάλλεται. ἐξ ἧς εὑρίσκομεν τὸ $y = \frac{\alpha\nu}{\beta}$. διὸ τὸ $2y$, ἤτοι ἡ ἐλάσσων διάμετρος, ἴση $\frac{2\alpha\nu}{\beta}$. ὡσαύτως τεθέντος τῦ $Z = 0$, ἡ ἐν τῷ F ἐξίσωσις εἰς τὴν ἐν τῷ L μετατρέπεται, ἐξ ἧς πάλιν προκύπτει τὸ $2y = \frac{2\iota\nu}{\beta}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'.

§. 247. Ἐπειδὴ ἐκ τῶν τὴν Ἔλλειψιν ἐμφαινυσῶν ἐξισώσεων ἥτε μείζων καὶ ἡ ἐλάσσων αὐτῆς διάμετρος δίδοται, γνωςὴ ἄρα ἔςαι καὶ ἡ αὐτῆς παράμετρος, τετάρτη ἀνάλογον ὖσα τῦ ἀπὸ τῶν τμημάτων τῆς διαμέτρυ ὀρθογωνίυ, τῦ ἀπὸ τῆς τεταγμένης τετραγώνυ, καὶ τῆς πλαγίας πλευρᾶς, (φ) ἤτυν τῆς μείζο-

(φ) Κατὰ τὸν ἀριθμ: κα'. ὁρισμ.

ζονος Διαμέτρου. κειμένου οὖν τὴν ἀποτετμημένην ἴσην εἶναι τῷ α, καὶ ἑπομένως αὐτὴν εἶναι τὴν ἀπὸ τοῦ κέντρου τεταγμένην, ἔσεται ὡς $\alpha . \alpha : \nu^2 :: 2\alpha$, πρὸς τὴν παράμετρον, ἥτις ἴση ἔσαι τῷ $\frac{2\nu^2}{\alpha}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ΄.

§. 248. Ἐὰν οὖν ἡ διὰ τὴν ἐπίλυσιν τοῦ προτεθέντος ἡμῖν προβλήματος συςαθεῖσα ἐξίσωσις ὁμοία ᾖ ὁποτέρᾳοῦν τῶν κατὰ τὸ Ψ καὶ Λ, ἢ εἰς ὁμοίαν μεταβληθῆναι ἔχῃ, διὰ τῆς ἀναγραφῆς τῆς Ἐλλείψεως τὰ ζητούμενα εὑρίσκονται ἄγνωςα.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 249. Οἷον ἡ ἐν τῷ Μ, τεθείσης τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης $y + \gamma = Z$, εἰς τὴν ἐν τῷ Ν μεταβάλλεται, τὴν ὁμοίαν τῇ κατὰ τὸ Ψ. καταγράφεται δὲ ἡ ὑπ᾽ αὐτῆς ἐμφαινομένη Ἔλλειψις οὕτω·

Γεγονέτω ὡς $\nu : \beta :: 4\alpha^2$ πρὸς τὴν τετάρτην, εἴτουν τὴν $\frac{4\alpha^2\beta}{\nu}$, ἥτις δὴ τὸ τετράγωνόν ἐςι τὸ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος Διαμέτρου τῆς Ἐλλείψεως. (§. 246.) δῆλον ἄρα, ὅτι ἡ μὲν ἐλάσσων διάμετρος $= 2\alpha \sqrt{\frac{\beta}{\nu}}$. τὸ δὲ ἥμισυ αὐτῆς $= \alpha \sqrt{\frac{\beta}{\nu}}$. ἐκοῦν ὡς $\alpha . \alpha : \frac{\alpha^2\beta}{\nu} ::$ 2α, πρὸς τὴν παράμετρον, (§. 247.) ἥτις ἴση ἐςὶ $\frac{2\alpha\beta}{\nu}$. παραμέτρῳ οὖν τῷ $\frac{2\alpha\beta}{\nu}$ γεγράφθω Ἔλλειψις (χ) ἡ ΑΒΓ. (ψ) καὶ ἀπὸ τῆς μείζονος διαμέτρου $ΑΓ = 2\alpha$ εἰλήφ-

(χ) Πίν. XXX. χ. 1.
(ψ) Ὅρα τὴν δ΄ καὶ ε΄ Συνέπ. τῆς β΄ προτ. τὴν ἐν σελ. 216. τοῦ Β΄ τομ. καὶ τὸ ἑξῆς §. 263.

εἰλήφθω ἀποτετμημένη ἡ ΑΔ $=\chi$. ϰ̓ ἔςαι δὴ ἡ ἀπὸ τȣ̃ Δ ταχθεῖσα ΔΕ $=Z$. ἐπεὶ δὲ τὸ $y+\gamma=Z$, ἔςαι δὴ ἄρα τὸ $y=Z-\gamma$. ἐκȣ̃ν ληφθείσης τῆς ΔΗ $=\gamma$, ἔσεται ἡ ΕΗ $=Z-\gamma=y$. ἀχθείσης ȣ̃ν ἀπὸ μὲν τȣ̃ Α τῆς ΑΘ τῇ ΔΕ παραλλήλȣ, ἀπὸ δὲ τȣ̃ Η τῆς ΘΙ τῇ ΑΓ, ϰαὶ τῆς ΕΛ ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη ἐκβληθείσης, ἔσεται ἡ μὲν ΘΗ $=\chi$, ἡ δὲ ΗΕ $=y$, ἡ δὲ ΗΛ $=-y$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε'.

§. 250. Τὰς Ὑπερβολὴν ἐμφαινέσας εὑρεῖν ἐξισώσεις.

Τμηθέντων τῶν συζύγων Κώνων (σχ. 2.) ΓΩΨ, ΓΝϚ ἐπιπέδῳ διὰ τȣ̃ ἄξονος, ἑκατέρας δὲ τῶν ΓΨ, ΓϚ πλευρῶν ἑτέρῳ τμηθείσης ἐπιπέδῳ, αἱ ἀντικείμεναι Ὑπερβολαὶ ΠΔΕ, ΡΒΘ γίνονται. Ἐὰν δὲ διὰ τȣ̃ τυχόντος σημείȣ Φ τȣ̃ ἄξονος ΔΦ τμηθῇ αὖθις ὁ Κῶνος ἐπιπέδῳ τῇ βάσει αὐτȣ̃ παραλλήλῳ, κύκλος προκύπτει ὁ ΗΖΛ, ȣ̃ ἡ κοινὴ τομὴ αὐτȣ̃τε ϰ̓ τῆς Ὑπερβολῆς, εἴτȣν ἡ ΖΦ, πρὸς ὀρθὰς ἐςὶ τῇ τε διαμέτρῳ ΗΛ, ϰαὶ τῷ ἄξονι ΔΦ.

Ἤχθωσαν ȣ̃ν ἀπὸ τῶν Δ ϰαὶ Β τομῶν αἱ ΔΜ, ΒΛ τῇ ΩΨ διαμέτρῳ τῆς βάσεως τȣ̃ κώνȣ παράλληλοι. ϰαὶ ἔςω ἡ μὲν ΔΜ $=\gamma$, ἡ δὲ ΑΒ $=\beta$, ἡ δὲ πλαγία πλευρὰ ΒΔ $=2\alpha$, ἡ δὲ ἀποτετμημένη ΔΦ $=\chi$, ἡ δὲ τεταγμένη ΦΖ $=y$. ἐκȣ̃ν ἔςαι ἡ ΒΦ $=2\alpha+\chi$.

Ἐπεὶ ȣ̃ν ὡς ΔΒ : ΒΑ :: ΔΦ : ΦΛ, ἤτοι ὡς $2\alpha : \beta :: \chi :$ ΦΛ, ἔσεται ἡ ΦΛ $=\dfrac{\beta\chi}{2\alpha}$. πάλιν ἐπειδὴ ὡς ΒΔ : ΔΜ :: ΒΦ : ΦΗ, εἴτȣν ὡς $2\alpha : \gamma :: 2\alpha+\chi :$ ΦΗ, ἔσεται ἡ ΦΗ $=\gamma\cdot\dfrac{2\alpha+\chi}{2\alpha}$. ἐπεὶ δὲ ϰ̓ ὡς ΛΦ : ΦΖ :: ΦΖ : ΦΗ, ἔσεται ἄρα ὡς $\dfrac{\beta\chi}{2\alpha} : y :: y : \gamma\cdot\dfrac{2\alpha+\chi}{2\alpha}$

ἐκ