ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΕΚ

ΠΑΛΑΙΩΝ καὶ ΝΕΩΤΕΡΩΝ

Συνερανισθέντων

ΥΠΟ ΤΟΥ ΠΑΝΙΕΡΩΤΑΤΟΥ

ΑΡΧΙΕΠΙΣΚΟΠΟΥ

ΠΡΩΗΝ ΑΣΤΡΑΧΑΝΙΟΥ

ΚΥΡΙΟΥ ΝΙΚΗΦΟΡΟΥ,

Φιλοτίμῳ δὲ δαπάνῃ ἐκδοθέντων,

Ὅπως δωρεὰν διανέμωνται τοῖς ἐν τοῖς

Ἑλληνομουσείοις φοιτῶσιν,

ΥΠΟ ΤΩΝ ΤΙΜΙΩΤΑΤΩΝ καὶ ΦΙΛΟΓΕΝΩΝ

ΑΥΤΑΔΕΛΦΩΝ

ΖΩΣΙΜΑ

ΤΟΜΟΣ ΤΡΙΤΟΣ,

περιέχων τὰ περὶ τὴν

ΑΛΓΕΒΡΑΝ.

ΕΝ ΜΟΣΧᾼ

Ἐν τῷ τῆς Κοινότητος Τυπογραφείῳ παρὰ

Ῥηδηγέρῳ καὶ Κλαυδίῳ.

Ἔτει 1799.

ΒΙΒΛΙΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΑΛΓΕΒΡΑΣ.

ΚΕΦ. Α΄.

Ἐν ᾧ οἱ ὁρισμοί.

ΟΡΙΣΜΟΣ Α΄.

§. 1. Ἡ καλουμένη Ἄλγεβρα, ἢ Ἀνάλυσις, μέθοδός ἐστι τοῦ, δοθέντων τινῶν, εὑρεῖν τὰ ζητούμενα.

ΣΧΟΛΙΟΝ

§. 2. Ὁ μὲν Ἀναλύσεως μέρος περὶ ὡρισμένων διαλαμβάνει ποσοτήτων Ἄλγεβρα, ἢ Ἀρθμητικη Καρτεσιανὴ, ἢ Ἀριθμητικὴ Εἰδικὴ (1) καλεῖ-

(1) Καρτεσιανὴ μὲν, ἀπὸ Καρτεσίου τοῦ εὑρετοῦ αὐτῆς· εἰδικὴ δὲ, ὅτι τοῖς γράμμασιν, οἷον εἴδεσι, χρῆται. εἰκότως δ' ἂν καὶ Ἀριθμητικὴ συμβολικὴ κληθείη. γράμμασι γὰρ καὶ σημάσι τισὶν συμβολικῶς ἐμφαίνει τὰ πράγματα. ἰστέον δὲ, ὅτι καὶ οἱ παλαιοὶ τοῖς γράμμασιν ὡς ἀριθμοῖς ἐχρῶντο, ὡς ἐκ τῆς τοῦ Διοφάντου Ἀριθμητικῆς δῆλον.

ται· ὁ δὲ περὶ ἀπροσδιορίστων καὶ ἀπειροελαχίστων, Ἄλγεβρα Νευτωνιανὴ, (a) ἢ Λογισμὸς ὁλοκληρωτικὸς, ἢ Λογισμὸς Διαφορικός.

ΟΡΙΣΜΟΣ Β'.

§. 3. Ἀριθμὸς, ποσότης, μέγεθος ἄῤῥητόν ἐστιν, ἢ ἄλογον, τὸ διὰ μηδενὸς τῶν τῆς ἀριθμητικῆς χαρακτήρων ἐμφαινόμενον.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 4. Τοιαύτη ἐστὶν ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 8, ἡ κυβικὴ τοῦ 14, ἡ τετραγωνοτετράγωνος τοῦ 9.

ΟΡΟΣ Α'.

§. 5. Ἐμφαινέτω πᾶν μέγεθος, ἀριθμὸν καὶ ποσότητα τὰ εἰκοσιτέσσαρα γράμματα.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 6. Ἰστέον, ὅτι διὰ μὲν τῶν πρώτων στοιχείων, οἷον τῶν α, β, γ, δ, ε, κτ. τὰς γνωστὰς εἴθισται σημαίνειν ποσότητας· διὰ δὲ τῶν ἐσχάτων, οἷον τῶν υ, φ, χ, ψ, Ω, τὰς ἀγνώστους καὶ ἀπροσδιορίστους.

ΟΡΙΣΜΟΣ Γ'.

§. 7. Καταφατικὸν μὲν ἢ θετικὸν μέγεθος, τὸ τοῦ οὐδενὸς μεῖζον· ἀποφατικὸν δὲ ἢ ἀποθετικὸν, τὸ τοῦ οὐδενὸς ἔλαττον.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 8. Νοήσεις τὸ τί ἐστιν ἀποφατικὸν, σκεψάμενος οὕτως· ἐάν τις ἔχων μὲν δέκα ὀβολοὺς, δέκα ὀφείλῃ, οὐδένα οὗτος ἔχει, ὡς δῆλον· ὅθεν ἡ τῶν χρημάτων αὐτοῦ ποσότης τῷ οὐδενὶ ἴση ἐστίν· ἐὰν δὲ δέκα ἔχων ὀβολοὺς, πεντεκαίδεκα ὀφείλῃ, δῆλον, ὅτι ἡ τῶν χρημάτων

των

(a) Ἀπὸ Νεύτωνος τοῦ αὐτῆς εὑρετοῦ.

των αὐτῦ ποσότης ἐλάσσων τῦ ὐδενός ἐςι πέντε ὀβολὺς· ὅπερ ἐςὶ, λείπυσι τῇ τῶν χρημάτων αὐτῦ ποσότητι πέντε ὀβολοὶ, ὥςε ἴσην αὐτὴν εἶναι τῷ ὐδενί· ὃ καὶ ἄλλως. Κείσθω δεῖν ἀπὸ τῦ 9, ἀφελεῖν τὸν 12, εἴτυν τὸν 9 σὺν τῷ 3. ἐπεὶ ὖν ἀφαιρεθέντος τῦ 9 ἀπὸ τῦ 9, τὸ λοιπόν ἐςι τὸ ὐδὸν καὶ ὁ 3. ὗτος ὁ 3, ὃς τὸ μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν λοιπόν ἐςι, καταφατικὸς μὲν ὐκ ἔςι. καταφατικὸν γάρ ἐςι τὸ λοιπὸν, τῦ ἐλάττονος ἀπὸ τῦ μείζονος ἀφαιρεθέντος· ὐδὲ δὴ τῷ ὐδενὶ ἴσος ἐςίν· ἴσον γὰρ τῷ ὐδενὶ τὸ λοιπὸν, ἴσυ ὄντος τῦ ἀφαιρεθέντος τῷ ἀφ' ὖ ἀφήρηται. ἐλάσσων ἄρα τῦ ὐδενὸς ὁ ἐναπολειφθεὶς 3. ὅπερ δὴ σημαίνει, ὅτι ὁ 3 λείπει τῷ 9, ὥςε τῦ 12 ἀπ' αὐτῦ ἀφαιρεθέντος, τὸ λοιπὸν ἴσον εἶναι τῷ ὐδενί. Καταφατικὸν δὲ καὶ ἀποφατικὸν ἐπὶ τῶν μεγεθῶν νοήσεις ὕτως· ἐὰν τῆς ΑΒ (α) εὐθείας τὸ ΓΑ μέρος, τὸ ἐπὶ τὰ Α μέρη καταφατικὸν ἐκλάβῃς, τὸ ΓΒ, τὸ ἐπὶ τὰ Β μέρη, τὰ κατὰ διάμετρον ἐναντία, ἀποφατικὸν ἔςαι· ἐὰν δὲ τὸ ΓΒ καταφατικὸν, τὸ ΓΑ ἀποφατικόν.

ΟΡΟΣ Β'.

§. 9. Προτιθέσθω ἑκάςω τῶν γραμμάτων ἓν τῶν δε τῶν σημείων· $+$, $-$, $\pm$, $\mp$.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 10. Τὸ μὲν $+$, καταφατικὸν εἶναι δηλοῖ τὸ ὑπὸ τῶν γραμμάτων ἐμφαινόμενον· τὸ δὲ $-$, ἀποφατικόν· τὸ δὲ $\pm$, ἄγνοιαν τῦ τί ἐςι τὸ ἐμφαινόμενον, καταφατικὸν, ἢ ἀποφατικόν. τὸ αὐτὸ δὲ σημαίνει καὶ τὸ $\mp$. ἔτι δὲ τὸ μὲν $+$ καὶ προσθήκην ἐμφαίνει, οἷον τὸ $\alpha+\beta$, τὸ α σὺν τῷ β. τὸ δὲ $-$, καὶ ἀφαίρεσιν, οἷον τὸ $\beta-\gamma$, τὸ β ἀφαιρεθέντος τῦ γ. τὸ δὲ $\gamma\pm\delta$, ἄγνοιαν τῦ πότερόν προστιθέναι δεῖ, ἢ ἀφελεῖν τὸ δ ἀπὸ

(α) Πιν. Ι.

ἀπὸ τοῦ γ, ὁμοίως καὶ τὸ $\gamma \mp \delta$. καλοῦσι δὲ τὸ μὲν $+$, μᾶλλον· τὸ δὲ $-$, ἧττον· (1) τὸ δὲ $\pm$, μᾶλλον ἢ ἧττον· τὸ δὲ $\mp$, ἧττον ἢ μᾶλλον. διὸ τόδε, $\alpha + \beta - \gamma + \delta$, ἀπαγγέλλομεν οὕτως· α, μᾶλλον β, ἧττον γ, μᾶλλον δ. ἢ καὶ ἄλλως· α σὺν β, ἀφαιρεθέντος τοῦ γ, καὶ προστεθέντος τοῦ δ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 11. Εἰδέναι δεῖ, ὅτι τὰ γράμματα, τὰ μηδὲν ἔχοντα τῶν εἰρημένων σημείων, οἷον τὰ, α, β, ἢ τὰ $\alpha + \beta$, καταφατικὰ σημαίνει μεγέθη, καὶ τὸ $+$ προγεγραμμένον αὐτῶν νοεῖται. τότε δὲ μόνον καταλιμπάνειν αὐτὸ ἔξεστιν, ὅτε τὸ γράμμα ἤτοι μόνον κεῖται, ὡς τὸ β, ἢ πρῶτον τῶν στοιχειδὸν αὐτῷ συγγεγραμμένων, οἷον τὸ $\alpha + \beta - \gamma \pm \varepsilon$.

ΟΡΟΣ Γ'.

§. 12. Τὸ μὲν $=$ ἰσότητα ἐμφαινέτω· τὸ δὲ $\times$, καὶ τὸ $.$, πολλαπλασιασμόν· τὸ δὲ $:$, διαίρεσιν· τὸ δὲ $\surd$, ῥίζαν, ὀνομαζομένην ἀπὸ τοῦ ἐπ' αὐτῆς τιθεμένου ἀριθμοῦ. οἷον ἀπὸ μὲν τοῦ 2, τετραγωνικήν· ἀπὸ δὲ τοῦ 3, κυβικήν· ἀπὸ δὲ τοῦ 4, τετραγωνοτετραγωνικήν· ἀπὸ δὲ τοῦ 5, τετραγωνοκυβικήν, καὶ ἀπὸ τῶν ἐφεξῆς ἀριθμῶν ὡσαύτως. καλείσθω δὲ ὁ τοιοῦτος ἀριθμὸς, ὀνομαστὴς τῆς ῥίζης.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 13. Οἷον τὸ $\alpha = \beta$, δηλοῖ ὅτι τὸ α ἴσον ἐστὶ τῷ β· ὡσαύτως τὸ $\alpha + \beta = \gamma - \varepsilon$, τὸ α σὺν τῷ β ἴσον τῷ γ, ἀφαιρεθέντος τοῦ ε· τὸ δὲ $\alpha \times \beta$, ὁμοίως

καὶ

(1) Οἱ παλαιοὶ τὸ μὲν, ὕπαρξιν· τὸ δὲ, λεῖψιν ἐκάλουν. λεῖψις γάρ, φησιν ὁ Διόφαντος ἐπὶ λεῖψιν πολλαπλασιασθεῖσα ποιεῖ ὕπαρξιν. λεῖψις δὲ ἐπὶ ὕπαρξιν, ποιεῖ λεῖψιν. καὶ ἐλλείψεως σημεῖον Ψ ἐλλιπὲς κάτω νεῦον ⊤ ὅρ. 9. σελ. 7.

καὶ τὸ α. β, τὸ γινόμενον ἐκ τοῦ α καὶ β. διὸ δὴ τὸ $α. β + γ \times δ = β. ε - γ$ ἐμφαίνει τὸ γινόμενον ἐκ τοῦ α καὶ β σὺν τῷ γινομένῳ ἐκ τοῦ γ καὶ δ ἴσον τῷ γινομένῳ ἐκ τοῦ β καὶ ε, ἀφαιρεθέντος τοῦ γ. ἐκφωνεῖται δὲ οὕτω· α ἐν β σὺν γ ἐν δ, ἢ μᾶλλον γ ἐν δ ἴσον β ἐν ε, ἀφαιρεθέντος τοῦ γ, ἢ ἧττον γ. τὸ δὲ α: β σημαίνει τὸ α διαιρούμενον διὰ τοῦ β, ἢ τὸ ἐκ τοῦ α τοῦ β διαιρεθέντος πηλίκον. διὸ τὸ $α:β = γ:δ$ σημαίνει ὅτι τὸ ἐκ τοῦ α διὰ τοῦ β διαιρεθέντος πηλίκον ἴσον ἐστὶ τῷ ἐκ τοῦ γ διὰ τοῦ δ. καὶ τὸ μὲν $\sqrt[2]{α}$ ταύτην τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ α· τὸ δὲ $\sqrt[3]{α}$, τὴν κυβικήν· τὸ δὲ $\sqrt[4]{α}$, τὴν τετραγωνοτετραγωνικήν· τὸ δὲ $\sqrt[5]{α}$, τὴν τετραγωνοκυβικήν.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 14. Ἰστέον, ὅτι τὸ ἐκ τῶν γραμμάτων γινόμενον ἐμφαίνεται καὶ μηδενὸς τῶν εἰρημένων σημείων μεταξὺ αὐτῶν παρεντιθεμένου. ὅθεν τὸ αβ ταυτοσήμαντον τῷ α. β, καὶ τῷ $α \times β$. ὡσαύτως τὸ αβγ τῷ α. β. γ, καὶ τῷ $α \times β \times γ$. ἡ δὲ διαίρεσις δηλοῦται, ὑπὸ τὸν διαιρετέον ἀχθείσης εὐθείας καὶ ὑπ' αὐτὴν γραφέντος τοῦ διαιρέτου. διόπερ τὸ $\frac{α}{β}$ ταυτοσήμαντον τῷ α:β, ὁμοίως τὸ $\frac{αβ}{εζ}$ τῷ αβγ: εζ. ὑπὸ δὲ τῆς ῥίζης, ἐφ' ἧς ἀριθμὸς οὐκ ἐπιτίθεται, ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα ἐμφαίνεται. διὸ ἡ $\sqrt{α}$ ταυτοσήμαντος τοῦ $\sqrt[2]{α}$, καὶ ἡ $\sqrt{γδ}$ τοῦ $\sqrt[2]{γδ}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 15. Ἐκ τῶν εἰρημένων δῆλον, ὅτι τὸ $\alpha:\beta$ κλάσμα ἐμφαίνει, οὗτινος ἀριθμητὴς μὲν τὸ α, ὀνομαστὴς δὲ τὸ β.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 16. Ἔτι ἰστέον, ὡς καὶ εὐθεῖα τοῖς γράμμασιν ἐπιτίθεται, οἷον $\overline{\alpha+\beta}.\delta$, δηλοῦσα ὅτι ἅπαντα τὰ ὑπὸ τὴν γραμμὴν, εἴτουν τὸ κεφάλαιον τῶν α καὶ β πολλαπλασιάσαι χρὴ διὰ τοῦ δ· ὁμοίως τὸ $\overline{\alpha+\beta}.\overline{\gamma+\delta}$, τὸ ἐκ τῶν α καὶ β κεφάλαιον διὰ τοῦ ἐκ τῶν γ καὶ δ κεφαλαίου. ἐὰν γὰρ εὐθεῖα μὴ ἐπιτεθῇ, γραφῇ δ' οὕτω· $\alpha+\beta.\delta$, σημαίνει τὸ β μόνον διὰ τοῦ δ πολλαπλασιάσαι χρῆν, τῷ δ' ἐξ αὐτῶν γινομένῳ προσθῆναι τὸ α· ὡσαύτως ἐὰν οὕτω γραφῇ, $\alpha+\beta.\gamma+\delta$, μόνον τὸ β διὰ τοῦ γ πολλαπλασιάσαι, τῷ δ' ἐξ αὐτῶν γινομένῳ προσθῆναι τό, τε α καὶ τὸ δ. τὸ αὐτὸ δὲ νοητέον καὶ περὶ τῶν διαιρετέων γραμμάτων. οἷον, ὅτι τὸ μὲν $\overline{\alpha+\beta}:\overline{\gamma+\delta}$ σημαίνει τὸ κεφάλαιον τῶν α καὶ β διαιρεθησόμενον διὰ τοῦ τῶν γ καὶ δ κεφαλαίου· τὸ δὲ $\alpha+\beta:\gamma+\delta$, τὸ β μόνον διὰ τοῦ γ, τῷ δὲ προκύπτοντι πηλίκῳ προσθησόμενον τὸ ἐκ τῶν α καὶ δ κεφάλαιον. διὸ τὸ $\alpha+\beta:\gamma+\delta = \frac{\beta}{\gamma}+\alpha+\delta$.

ΟΡΟΣ Δ'.

§. 17. Τὸ μὲν πολλαπλάσιον τῶν γραμμάτων, ἀριθμὸς ὁλόκληρος ἐμφαινέτω ἐν τῷ ἀριστερῷ μέρει κείμενος· τὰ δὲ μέρη αὐτῶν, κεκλασμένος. καλείσθω δὲ ὁ ἀριθμὸς οὗτος **Συμπράκτωρ**.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 18. Τὸ μὲν 2α, τὸ διπλάσιον τοῦ α ἐμφαίνει· τὸ δὲ 5β, τὸ πενταπλάσιον τοῦ β· τὸ δὲ $\frac{2}{3}\alpha\gamma$, δύω τριτημόρια

τοῦ

τοῦ γινομένου ἐκ τῶν α καὶ γ. ἀπαγγέλλομεν δὲ ταῦτα οὕτω· δύω α, πέντε β, δύω τριτημόρια τοῦ αγ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 19. Εἰδέναι δεῖ, ὅτι μηδενὸς συμπράκτορος προσκειμένου τοῖς γράμμασιν, ὡς τῷ α, καὶ τῷ αβ, ἡ μονὰς ἐννοεῖται, ἐμφαίνουσα ἅπαξ ἐκλαμβανόμενα τὰ προκείμενα γράμματα.

ΟΡΟΣ Ε'.

§. 20. Τὸ τετράγωνον, ὁ Κύβος, τὸ τετραγωνοτετράγωνον, καὶ τὰ ἄλλα ἐφεξῆς, τὰ ἐξ ὁποιουοῦν μεγέθους, ἐφ' ἑαυτὸ καὶ διὰ τῶν ἐξ αὐτοῦ πολλαπλασιαθέντος, γινόμενα, **Δυνάμεις** καλείσθωσαν· δευτέρα μὲν, ἡ ἐξ ἑνὸς πολλαπλασιασμοῦ προκύπτουσα· τρίτη δὲ, ἡ ἐκ δύω· τετάρτη, ἡ ἐκ τριῶν· πέμπτη, ἡ ἐκ τεσσάρων, καὶ ἐφεξῆς ὁμοίως· πρώτη δὲ Δύναμις, τὸ ὡς ἐφ' ἑαυτὸ πολλαπλασιαθὲν ἐκλαμβανόμενον.

ΟΡΟΣ ς'.

§. 21. Νοείσθω ὑπεράνω παντὸς γράμματος μονὰς καταφατικὴ, τὸ στοιχεῖον, μηδάπαξ ἐφ' ἑαυτὸ πολλαπλασιαθὲν ἐμφαίνουσα, ἥτις δὴ **Ἐκθέτης** καλείσθω, ἢ **Δείκτης**, ἢ **Ἐπίσημον**.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 22. Τὸ α νοεῖται ὡς τὸ α^{1}, ὡσαύτως τὸ αβ, ὡς τὸ $\alpha^{1}\beta^{1}$, καὶ τὸ $\alpha+\beta$ ὡς τὸ $\alpha^{1}+\beta^{1}$, ἢ τὸ $\overline{\alpha+\beta}^{1}$.

ΟΡΟΣ Ζ'.

§. 23. Ἐμφαινέτω τὴν ὁποιανδήποτε ἐκ γράμματος δύναμιν αὐτὸ τὸ γράμμα, ἀριθμὸν ἔχον ὑπεράνω αὐτοῦ ἴσον τῷ

τῷ κεφαλαίῳ τῶν τῆς ῥίζης ἐκθετῶν, Ἐκθέτην καλούμενον, ἢ Δείκτην, ἢ Ἐπίσημον τῆς Δυνάμεως.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§ 24. Τὸ α^2 τὴν δευτέραν ἐμφαίνει Δύναμιν τοῦ α. καὶ γὰρ αα ἡ δευτέρα Δύναμίς ἐστι τοῦ α, (§. 20.) οἱ δὲ τῆς ῥίζης α ἐκθέται, μονάδες δύω, (§. 2 .) αἷς ἴσος ἐστὶν ὁ τοῦ α^2 ἐκθέτης· τὸ δὲ α^3, τὴν τρίτην Δύναμιν τοῦ α. ἐστι γὰρ ααα ἡ τρίτη τοῦ α Δύναμις, τρεῖς δὲ μονάδες εἰσὶν οἱ τῆς ῥίζης α ἐκθέται, ὧν τὸ κεφάλαιον ἴσον τῷ τῆς α^3 Δυνάμεως ἐκθέτῃ. ὡσαύτως τὸ μὲν α^4 τετάρτη δύναμις ἐστὶ τοῦ α, τὸ δὲ α^5, πέμπτη, καὶ ἐπὶ τῶν ἑξῆς ὁμοίως.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄.

§. 25. Ὁ μὲν ἄρα τῆς δευτέρας Δυνάμεως α^2 ἐκθέτης διπλάσιός ἐστι τοῦ τῆς ἑαυτῆς ῥίζης α^1 ἐκθέτου· ὁ δὲ τῆς τρίτης α^3, τριπλάσιος· ὁ δὲ τῆς τετάρτης α^4, τετραπλάσιος, καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων ὁμοίως.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄.

§. 26. Οὐκοῦν ὁ τῆς ῥίζης ἐκθέτης εὑρεθήσεται, ἐὰν ὁ μὲν τῆς δευτέρας Δυνάμεως διὰ τοῦ 2 διαιρεθῇ, οἷον ὁ τῆς α^2 διὰ τοῦ 2, προκύπτει γὰρ τὸ $\alpha^{\frac{2}{2}} = \alpha^1$· ὁ δὲ τῆς τρίτης, διὰ τοῦ 3· οἷον ὁ τῆς α^3 διὰ τοῦ 3, προκύπτει γὰρ τὸ $\alpha^{\frac{3}{3}} = \alpha^1$· ὁ δὲ τῆς τετάρτης, διὰ τοῦ 4, οἷον ὁ τῆς α^4 διὰ τοῦ 4. προκύπτει γὰ τὸ $\alpha^{\frac{4}{4}} = \alpha^1$. καὶ ὁ τῆς Δυνάμεως α^ν, τοῦ ν τὸν ὁποιονοῦν ἀριθμὸν ἐμφαίνοντος, διὰ τοῦ ν. ἔσται γὰρ τὸ $\alpha^{\frac{\nu}{\nu}} = \alpha^1$.

ΠΟ-

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄.

§. 27. Ὁποιασοῦν Δυνάμεως διὰ Δυνάμεως τοῦ αὐτοῦ γράμματος διαιρεθησομένης τὸ πηλίκον εὑρεθήσεται, ἐὰν ἀπὸ τοῦ ἐκθέτου τῆς διαιρετέας ἀφαιρεθῇ ὁ τῆς διαιρέτου ἐκθέτης· οὕτως ἔσαι τὸ πηλίκον τῆς $\alpha^5 : \alpha^2 = \alpha^{5-2} = \alpha^3$. ὡσαύτως τὸ τῆς $\alpha^2 : \alpha^1 = \alpha^{2-1} = \alpha^1$. καὶ γενικῶς δὲ τὸ τῆς $\alpha^\nu : \alpha^\mu = \alpha^{\nu-\mu}$ ἐπεὶ γὰρ ὁ ἐκθέτης τοῦ γινομένου ἐκ παντὸς γράμματος ἐφ' ἑαυτὸ πολλαπλασιασθέντος ἴσος τῷ κεφαλαίῳ τῶν τῆς ῥίζης ἐκθετῶν (§. 23.) ἔσι δὲ ἡ διαίρεσις πρᾶξις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐναντία, ὁ ἄρα ἐκθέτης τοῦ πηλίκου ἴσος τῇ διαφορᾷ τῶν ἐκθετῶν τῆς διαιρετέας καὶ διαιρέτου.

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ΄.

§. 28. Ἐμφαίνει ἄρα ὁ ἐκθέτης, ὁλόκληρος ὢν ἀριθμὸς καταφατικὸς, τοσάκις ἐφ' ἑαυτὸ πολλαπλασιασθὲν τὸ γράμμα, ὁσάκις αὐτὸς, μονάδι ἐλαττωθεὶς, τὴν μονάδα περιέχει. οἷον τὸ μὲν 1, τὸ ἐπὶ τοῦ α^1, μηδάπαξ τὸ α ἐφ' ἑαυτὸ πολλαπλασιασθὲν σημαίνει· ὁ δὲ 2, ὁ ἐπὶ τοῦ α^2, ἅπαξ· ὁ δὲ 3, ὁ ἐπὶ τοῦ α^3, δὶς· ὁ δὲ 4, ὁ ἐπὶ τοῦ α^4, τρίς· ὁ δὲ 5, ὁ ἐπὶ τοῦ α^5, τετράκις, καὶ γενικῶς ὁ ν, ὁ ἐπὶ τοῦ α^ν, $\nu-1$, οὕτουν τοσάκις τὸ α πολλαπλασιασθὲν, ὁσάκις ἡ μονὰς ὑπὸ τοῦ ν περιέχεται, μονάδος ἀφαιρεθείσης.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ε΄.

§. 29. Ἐντεῦθεν δῆλον, ὅτι ἥδε ἡ Σειρὰ, α^1, α^2, α^3, α^4, α^5, α^6, α^7, κτ. μεγέθη ἐμφαίνει ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ γεγεννημένα τοῦ πρώτου ὅρου α^1, πρῶτον μὲν

ἐφ'

ἐφ' ἑαυτὸ πολλαπλασιασθέντος, εἶτα ἐν τῷ γινομένῳ α^2, καὶ αὖθις ἐν τῷ ἑξῆς γινομένῳ α^3, καὶ ἐφεξῆς ὁμοίως. διὸ δὴ δῆλον, ὅτι ἡ προκειμένη σειρὰ γεωμετρικὴ ἐστιν, ἧς οἱ μὲν ὅροι λόγον ἔχουσι πρὸς ἀλλήλους συνεχῆ γεωμετρικόν· οἱ δὲ ἐκθέται αὐτῶν, συνεχῆ ἀριθμητικόν.

ΠΟΡΙΣΜΑ ϛ'.

§. 30. Πᾶν οὖν γράμμα ἐκθέτην ἔχον ἀριθμὸν ὁλόκληρον καταφατικὸν ἐμφαίνει καὶ ὅρον γεωμετρικῆς συνεχοῦς σειρᾶς, τοιόνδε τὴν τάξιν, τουτέστι πρῶτον, ἢ δεύτερον, ἢ τρίτον, οἷος ὁ ἑαυτοῦ ἐκθέτης, ἑκάστου τῶν ὅρων αὐτῆς ἐκ τοῦ αὐτοῦ συνισταμένου γράμματος.

ΣΥΝΕΠΕΙΑ Α'.

§. 31. Ἐκ τῶν εἰρημένων οὐ πάνυ δυσχερὲς κατιδεῖν, ὅτι πᾶν γράμμα ἐκθέτην ἔχον ὁλόκληρον ἀριθμὸν ἀποφατικόν, κλάσμα παρίστησιν, οὗ ἀριθμητὴς μὲν ἡ μονάς, ὀνομαστὴς δὲ τὸ αὐτὸ γράμμα μετὰ τοῦ αὐτοῦ ἐκθέτου, καταφατικοῦ δέ, καὶ οὐχὶ ἀποφατικοῦ. οἷον τὸ α^{-1} ἴσον ἐστὶ τῷ $\frac{1}{\alpha^1}$. κείσθω γὰρ δεῖν διελεῖν χρῆναι τὸ α διὰ τοῦ α. οὐκοῦν τὸ πηλίκον ἔσται $\alpha^{1-1} = \alpha^0$. (§. 27.) ἀλλ' $\frac{\alpha}{\alpha} = 1$. τὸ ἄρα $\alpha^0 = 1$. κείσθω πάλιν δεῖν διελεῖν τὸ α^0 διὰ τοῦ α. οὐκοῦν τὸ πηλίκον ἔσται α^{0-1}, ἤτουν α^{-1}. ἀλλ' $\alpha^0 = 1$, ὡς δέδεικται. τὸ ἄρα $\frac{\alpha^0}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$. ἀλλ' $\frac{\alpha^0}{\alpha} = \alpha^{-1}$. τὸ ἄρα $\alpha^{-1} = \frac{1}{\alpha}$. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἔσται τὸ μὲν $\alpha^{-2} = \frac{1}{\alpha^2}$, τὸ δὲ $\alpha^{-3} = \frac{1}{\alpha^3}$, τὸ δὲ $\alpha^{-4} = \frac{1}{\alpha^4}$. ὁμοίως τὸ $\overline{\alpha+\beta}^{-2} = \frac{1}{\overline{\alpha+\beta}^2}$. καὶ γενικῶς τὸ $\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu}$.

ΣΥ.

ΣΥΝΕΠΕΙΑ Β΄.

§. 32. Ἧδε ἄρα ἡ Σειρὰ $\alpha^{0}, \alpha^{-1}, \alpha^{-2}, \alpha^{-3}, \alpha^{-4}, \alpha^{-5}$, κτ, Σειρὰν ἐμφαίνει γεωμετρικῶν ὅρων συνεχῶς ἀναλόγων, ὧν πρῶτος ἡ μονὰς, ἕκαστος δὲ τῶν ἄλλων ἀριθμητὴν μὲν ἔχει τὴν μονάδα, ὀνομαστὴν δὲ τὸ αὐτὸ γράμμα μετὰ τοῦ αὐτοῦ ἐκθέτου καταφατικοῦ δὲ, καὶ οὐχὶ ἀποφατικοῦ. ἴση γὰρ ἡ ῥηθεῖσα Σειρὰ τῇδε, 1, $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\alpha^3}, \frac{1}{\alpha^4}, \frac{1}{\alpha^5}$, κτ.

ΣΥΝΕΠΕΙΑ Γ΄.

§. 33. Καταμαθεῖν δὲ ἐκ τῶν εἰρημένων ῥᾴδιον τί σημαίνει τὸ γράμμα τὸ ἐκθέτην ἔχον κεκλασμένον καταφατικὸν, οἷον τὸ $\alpha^{\frac{2}{3}}$. ῥίζαν γὰρ ἐμφαίνει συνισταμένην μὲν ἐξ αὐτοῦ τοῦ γράμματος, οὗ ἐκθέτης ὁ τοῦ κλάσματος ἀριθμητὴς, ἔχουσαν δὲ τὸν αὐτὸν τῷ κλάσματι ὀνομαστήν· εἴτουν τὸ $\alpha^{\frac{2}{3}}$ ἐμφαίνει τὴν $\sqrt[3]{\alpha^2}$. ἐπεὶ γὰρ διὰ τοῦ 3 διαιρεθέντος τοῦ τῆς Δυνάμεως ἐκθέτου, ὁ τῆς κυβικῆς ῥίζης ἐκθέτης προκύπτει, (§. 20.) ὁ ἄρα ἐκθέτης $\frac{2}{3}$ κυβικὴν σημαίνει ῥίζαν τοῦ φέροντος αὐτὸν γράμματος, ἐκθέτην ἔχοντος τὸν 2. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ τὸ μὲν $\alpha^{\frac{3}{2}} = \sqrt{\alpha^3}$, τὸ δὲ $\alpha^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{\alpha^5}$, τὸ δὲ $\alpha^{\frac{4}{6}} = \sqrt[6]{\alpha^4}$, καὶ γενικῶς τὸ $\alpha^{\frac{\nu}{\mu}} = \sqrt[\mu]{\alpha^\nu}$, ὁμοίως τὸ $\overline{\alpha+\beta}^{\frac{\nu}{\mu}} = \sqrt[\mu]{\overline{\alpha+\beta}^{\nu}}$.

ΣΥΝΕΠΕΙΑ Δ'.

§. 34. Τὰ δὲ ἐκθέτην ἔχοντα ἀριθμὸν κεκλασμένον ἀποφατικὸν, μονάδα παρίστησι διαιρουμένην διὰ τῶν αὐτῶν γραμμάτων μετὰ τῶν ἑαυτῶν ἐκθετῶν, καταφατικῶν δὲ καὶ οὐχὶ ἀποφατικῶν, οἷον τὸ $\alpha^{-\frac{2}{3}}$ ἐμφαίνει τὸ $\frac{1}{\alpha^{\frac{2}{3}}}$ (§. 31.), ὅπερ τὸ αὐτό ἐστι τῷ $\frac{1}{\sqrt[3]{\alpha^2}}$· ὁμοίως δὴ τὸ $\alpha^{-\frac{2}{5}} = \frac{1}{\alpha^{\frac{2}{5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{\alpha^2}}$. καὶ γενικῶς $\alpha^{-\frac{\nu}{\mu}} = \frac{1}{\alpha^{\frac{\nu}{\mu}}} = \frac{1}{\sqrt[\mu]{\alpha^\nu}}$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ

§. 35. Ἀπαγγέλλομεν τὰ μὲν ἐκθέτας ἔχοντα καταφατικοὺς ὁλοκλήρους ἀριθμοὺς, οὕτω· τὸ μὲν α^2, α ὑψωθὲν ἐν τοῖς δυσὶν, ἢ τὸ τετράγωνον τοῦ α· τὸ δὲ α^3, τὸ α ὑψωθὲν ἐν τοῖς τρισὶν, ἢ ὁ Κῦβος τοῦ α, ἢ ἡ τρίτη Δύναμις τοῦ α· καὶ γενικῶς τὸ α^ν, α ὑψωθὲν ἐν τῷ ν, ἢ ἡ ν Δύναμις τοῦ α. ὁμοίως τὸ $\overline{\alpha+\beta}^{\nu}$, α μᾶλλον β, ὑψωθέντα ἐν τῷ ν, ἢ τὸ κεφάλαιον τῶν α καὶ β, ὑψωθὲν ἐν τῷ ν, ἢ ἡ ν Δύναμις τῶν α καὶ β· τὰ δὲ ἀποφατικοὺς ὁλοκλήρους οὕτω· τὸ μὲν α^{-1}, α ὑψωθὲν ἐν τῷ ἧττον ἑνί· τὸ δὲ α^{-2}, α ὑψωθὲν ἐν τοῖς ἧττον δυσὶ, καὶ γενικῶς τὸ $\alpha^{-\nu}$, α ὑψωθὲν ἐπὶ τὸ ἧττον ν· ὁμοίως τὸ $\overline{\alpha+\beta}^{-\nu}$, α συν β ὑψωθέντα ἐν τῷ ἧττον ν. τὰ δὲ καταφατικοὺς κεκλασμένους οὕτω· τὸ μὲν $\alpha^{\frac{1}{2}}$, α ὑψωθὲν ἐν ἡμίσει· τὸ δὲ $\alpha^{\frac{2}{3}}$, α ὑψωθὲν ἐν δυσὶ τριτημορίοις· τὸ δὲ $\alpha^{\frac{3}{4}}$, α ὑψωθὲν ἐν τέσ-

σαρσι

σαρσι πεμπτημορίοις. τὰ δὲ ἀποφατικὰς κεκλασμένες ὅτω· τὸ μὲν $\overline{\alpha}^{-\frac{2}{5}}$, α ὑψωθὲν ἐν τοῖς ἧττον δυσὶ πεμπτημορίοις· τὸ δὲ $\overline{\alpha+\beta}^{\,-\frac{2}{3}}$ α σὺν β ὑψωθέντα ἐν τοῖς ἧττον δυσὶ τριτημορίοις.

ΟΡΙΣΜΟΣ Δ'.

§. 36. **Γράμματα** ἢ γραμματικαὶ ἐκθέσεις ὁμοειδεῖς μὲν εἰσιν αἱ συγκείμεναι ἐκ τῶν αὐτῶν γραμμάτων, τὰς αὐτὰς ἐχόντων ἐκθέτας· ἑτεροειδεῖς δὲ, αἱ καθ' ἑκάτερα τέτων, ἢ κατὰ τὸ ἕτερον ἀλλήλων διαφέρεσαι.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 37. Οἷον, ὁμοειδεῖς μὲν αἵδε· $3\alpha\beta^2$, $5\alpha\beta^2$ — $2\alpha\beta^2$, ὡσαύτως αἱ ἑξῆς· $2\beta\gamma$, — $4\beta\gamma$, — $\frac{2}{3}\beta\gamma$. Ἑτεροειδεῖς δὲ αὗται· $3\alpha\gamma$, $-3\alpha^2\delta$. διαφέρεσι γὰρ ἀλλήλων κατάτε τὰ γράμματα καὶ τὰς ἐκθέτας· ὁμοίως καὶ αὗται· $-2\beta^2\gamma$, $3\beta\gamma^2$. ἔχεσι γὰρ τὰ αὐτὰ γράμματα, ἀλλ' ὁ τὰς αὐτὰς ἐκθέτας. καὶ αἱ ἑξῆς δὲ ἑτεροειδεῖς, $5\beta^2\gamma^2$, $2\alpha^2\gamma^2$. ἔχεσι γὰρ τὰς αὐτὰς ἐκθέτας, ἀλλ' ὁ τὰ αὐτὰ γράμματα.

ΟΡΙΣΜΟΣ Ε'.

§. 38. Ὁμοειδεῖς μὲν ῥίζαι εἰσὶν αἱ τὰς αὐτὰς ὀνομασίας ἔχεσαι, καὶ συγκείμεναι ἐκ τῶν αὐτῶν γραμμάτων τὰς αὐτὰς ἐχόντων ἐκθέτας, καὶ ἐκ τῶν αὐτῶν συμπρακτόρων καὶ σημείων· ἑτεροειδεῖς δὲ αἱ, ἤτοι κατὰ πάντα τὰ εἰρημένα, ἢ καθ' ἓν μόνον τέτων ἀλλήλων διαφέρεσαι.

ΣΧΟ-

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 39. Οἷον ὁμοειδεῖς μέν εἰσιν αἵδε $\sqrt{2\alpha^3}$, $\sqrt{2\alpha^3}$, καὶ αἵδε, $\sqrt[3]{3\gamma\alpha^4}$, $\sqrt[3]{3\gamma\alpha^4}$, καὶ αἵδε, $\sqrt[\nu]{\gamma\alpha+\beta^\mu}$, $\sqrt[\nu]{\gamma\alpha+\beta^\mu}$· ὁμοίως καὶ αὗται, $3\sqrt[5]{2\alpha^2}$, $-\frac{5}{6}\sqrt[5]{2\alpha^2}$, $\beta\sqrt[5]{2\alpha^2}$. οἱ γὰρ ἐκτὸς τῆς ῥίζης συμπράκτορες καὶ τὰ σημεῖα τὸ ὁμοειδὲς οὐ μεταβάλλουσιν. ἑτεροειδεῖς δέ εἰσιν αὗται, $\sqrt{2\alpha^3}$, $\sqrt[3]{2\alpha^3}$ οὐ γὰρ ἔχουσι τοὺς αὐτοὺς ὀνομαστάς· καὶ αὗται, $\sqrt{\alpha^3}$, $\sqrt{\beta^3}$, οὐ γὰρ ἔχουσι τὰ αὐτὰ γράμματα· καὶ αὗται, $\sqrt[3]{\gamma^2}$, $\sqrt[3]{\gamma^5}$, οὐ γὰρ τοὺς αὐτοὺς ἐκθέτας ἔχει τὰ ἑαυτῶν γράμματα· καὶ αὗται, $\sqrt[4]{2\alpha^2}$, $\sqrt[4]{3\alpha^2}$. οὐ γὰρ ἔχουσι τοὺς αὐτοὺς συμπράκτορας τὰ γράμματα· καὶ αὗται, $\sqrt[5]{2\delta^3}$, $\sqrt[5]{-2\delta^3}$. οὐ γὰρ ἔχουσι τὰ αὐτὰ σημεῖα· καὶ αὗται, $\sqrt{2\alpha}$, $\sqrt[3]{-3\beta^4}$. κατὰ πάντα γὰρ τὰ εἰρημένα ἀλλήλων διαφέρουσι.

ΘΕΩΡΗΜΑ Α'.

§. 40. Τὸ μὲν ἐκ καταφατικῶν γραμμάτων γινόμενον καταφατικόν ἐστιν, ὡσαύτως καὶ τὸ ἐξ ἀποφατικῶν· τὸ δὲ ἐκ καταφατικοῦ καὶ ἀποφατικοῦ, ἀποφατικόν. οἷον τὸ μὲν ἐκ τῶν $+\alpha$ καὶ $+\beta$ γινόμενον ἐστὶ τὸ $+\alpha\beta$, ὡσαύτως καὶ τὸ ἐκ τῶν $-\alpha$, καὶ $-\beta$ ἐστὶ τὸ $+\alpha\beta$. τὸ δὲ ἐκ τῶν $+\alpha$ καὶ $-\beta$, ἢ $-\alpha$, καὶ $+\beta$, ἀποφατικὸν, τουτέστι τὸ $-\alpha\beta$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ μονὰς πρὸς τὸν πολλαπλασιαστὴν λόγον ἔχει, ὃν ὁ πολλαπλασιαστέος, πρὸς τὸ γινόμενον,

ἔσται

ἔσαι ὡς $1 : +\beta :: +\alpha$, πρὸς τὸ γινόμενον. καταφατικοῦ οὖν ὄντος τοῦ β, καταφατικὸν ἔσαι καὶ τὸ ἀνάλογον αὐτῷ, ὅπερ ἐσὶ τὸ γινόμενον ἐκ τῶν α καὶ β. τὸ ἄρα ἐκ τῶν $+\alpha$ καὶ $+\beta$ γινόμενον, ἐσὶ τὸ $+\alpha\beta$. οὕτω μὲν γὰρ ἔσαι ὡς $1 : +\beta :: +\alpha : +\alpha\beta$.

Πάλιν ἐπειδὴ ὡς $1 : -\beta :: -\alpha$, πρὸς τὸ γινόμενον, ἔσι δὲ ὁ ἕτερος τῶν ὅρων τοῦ πρώτου λόγου, εἴτουν ἡ 1, καταφατική· καὶ τὸν ἕτερον ἄρα τῶν ὅρων τοῦ δευτέρου λόγου καταφατικὸν δεῖ εἶναι. ἐπεὶ δὲ ὁ μὲν τῶν τοῦ δευτέρου λόγου ὅρων, εἴτουν ὁ $-\alpha$ ἀποφατικός ἐσιν, ἐξ ἀνάγκης ἄρα ὁ ἕτερος, τουτέσι τὸ γινόμενον ἐκ τῶν $-\beta$, καὶ $-\alpha$, καταφατικὸς ἔσαι, εἴτουν $+\alpha\beta$. οὕτω γὰρ ἔσαι ὡς $1 : -\beta :: -\alpha : +\alpha\beta$.

Καὶ ἐπειδὴ δὲ, ὡς $1 : -\alpha :: +\beta$, πρὸς τὸ γινόμενον, ἔσι δὲ τὸ ἑπόμενον τοῦ πρώτου λόγου ἀποφατικὸν, εἴτουν τὸ $-\alpha$, ἀποφατικὸν ἄρα ἔσαι καὶ τὸ τοῦ δευτέρου λόγου ἑπόμενον. ἀλλὰ τὸ ἑπόμενον τοῦ δευτέρου λόγου ἐσὶ τὸ ἐκ τῶν $-\alpha$, καὶ $+\beta$ γινόμενον. τὸ ἄρα ἐξ αὐτῶν γινόμενον ἀποφατικόν ἐσιν, εἴτουν τὸ $-\alpha\beta$. οὕτω γὰρ ἔσαι ὡς $1 : -\alpha :: +\beta : -\alpha\beta$.

Δείκνυται δὲ καὶ ἄλλως τὸ ἐκ τῶν ἀποφατικῶν $-\alpha$ καὶ $-\beta$ γινόμενον, καταφατικόν. κείσθω γὰρ δεῖν πολλαπλασιάσαι τὸ $\alpha-\beta$ διὰ τοῦ $\gamma-\delta$. πολλαπλασιασθέντος οὖν πρῶτον τοῦ $\alpha-\beta$ διὰ τοῦ γ, ἔσαι τὸ μὲν ἐκ τῶν α καὶ γ γινόμενον τὸ $+\alpha\gamma$, τὸ δὲ ἐκ τῶν $-\beta$ καὶ $+\gamma$, τὸ $-\gamma\beta$. τὸ ὅλον ἄρα γινόμενον ἐσὶ τὸ $\alpha\gamma-\gamma\beta$. τοῦτο δὲ μεῖζόν ἐσι τοῦ ζητουμένου. οὐ γὰρ πρόκειται πολλαπλασιάσαι τὸ $\alpha-\beta$ δι᾽ ὅλου τοῦ γ, ἀλλὰ διὰ τοῦ γ ἐλαττωθέντος τὸ δ, ὅπερ ἐσὶ διὰ τῆς διαφορᾶς τῶν γ καὶ δ. ἀφελεῖν ἄρα δεῖ τι ἀπὸ τοῦ $\alpha\gamma-\gamma\beta$, ὅπως προκύψῃ τὸ ζητούμενον. ἐὰν οὖν ἀφαιρεθῇ ἀπ᾽ αὐτοῦ τὸ γινόμενον ἐκ τῶν $+\alpha$ καὶ $-\delta$, δ, ἤτοι τὸ — αδ, ὥςε εἶναι τὸ λοιπὸν αγ — βγ — αδ, δῆλον ὅτι πλέον τοῦ δέοντος ἀφῄρηται. οὐ γὰρ τὸ + α διὰ τοῦ — δ πολλαπλασιάσαι πρόκειται, ἀλλὰ τὸ + α ἐλαττωθὲν τὸ β, ὅπερ ἐςὶ τὴν διαφορὰν τῶν + α, καὶ δ. τοσοῦτον δὲ πλέον τοῦ δέοντος ἀφῄρηται, ὅσον μεῖζον τοῦ μηδενὸς τὸ γινόμενον ἐκ τῶν — β καὶ — δ. προσθετέον ἄρα τῷ αγ — βγ — αδ τὸ γινόμενον ἐκ τῶν — β καὶ — δ, ὥςε εἶναι τὸ ὅλον καὶ δέον ζητούμενον τὸ + αγ — βγ — αδ + βδ. ἐξ οὗ δῆλον, ὅτι τὸ ἐκ τῶν ἀποφατικῶν — β καὶ — δ γινόμενον, καταφατικόν ἐςιν, ἤτοι τὸ + βδ.

ΣΥΝΕΠΕΙΑ Α'.

§. 41. Ἐκ τῶν εἰρημένων δῆλον, ὅτι ἀρτίου μὲν ὄντος τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πολλαπλασιασθησομένων μεγεθῶν, τὸ γινόμενον καταφατικόν ἐςι, κἄν τε καταφατικὰ, κἄν τε ἀποφατικὰ ᾖ τὰ μεγέθη· οἷον τὸ ἐκ τῶν $+\alpha . +\alpha = +\alpha^2$, καὶ τὸ ἐκ τῶν $-\alpha . -\alpha = +\alpha^2$, ὁμοίως καὶ τὸ ἐκ τῶν $\alpha . \alpha . \alpha . \alpha = +\alpha^4$, καὶ τὸ ἐκ τῶν $-\alpha . -\alpha . -\alpha . -\alpha = +\alpha^4$· περιττοῦ δὲ ὄντος, καταφατικὸν μὲν, τὸ ἐκ καταφατικῶν· ἀποφατικὸν δὲ, τὸ ἐξ ἀποφατικῶν. οἷον τὸ μὲν ἐκ τῶν $\alpha . \alpha . \alpha = +\alpha^3$, τὸ δὲ ἐκ τῶν $-\alpha . -\alpha . -\alpha = -\alpha^3$. ὡσαύτως τὸ μὲν ἐκ τῶν $\alpha . \alpha . \alpha . \alpha . \alpha = +\alpha^5$, τὸ δὲ ἐκ τῶν $-\alpha . -\alpha . -\alpha . -\alpha . -\alpha = -\alpha^5$.

ΣΥΝΕΠΕΙΑ Β'.

§. 42. Ἐντεῦθεν κατιδεῖν ῥᾴδιον, ὅτι αἱ ἀποφατικαὶ Δυνάμεις, ὧν ἄρτιος ὁ ἐκθέτης, ἀνύπαρκτοί εἰσι καὶ ἐπίπλαςοι, ὁμοίως καὶ αἱ αὐτῶν ῥίζαι. οἷον ἡ $-\alpha^2$ ἐπίπλαςός ἐςι. τὸ γὰρ α^2 τὸ γινόμενόν ἐςιν ἤτοι ἐκ τῶν $+\alpha . +\alpha$, ἢ ἐκ τῶν $-\alpha . -\alpha$. εἴτε οὖν καταφατικὰ, εἴτε ἀποφατικὰ ταῦτα ὦσι, τὸ ἐξ αὐτῶν γινόμενον καταφατικόν ἐςιν, (§. 41.) εἴτουν τὸ α^2, οὐ μὴν ἀποφα-

Φα-

φατικόν. ἡ ἄρα $-\alpha^2$ Δύναμις, καὶ ἡ ῥίζα αὐτῆς ἀνύπαρκτοι. ὁμοίως καὶ ἡ $-\alpha^4$, καὶ ἡ $-\alpha^6$, καὶ αἱ ῥίζαι αὐτῶν. ὧν δὲ Δυνάμεων ἀποφατικῶν περιττοί εἰσιν οἱ ἐκθέται, ἀποφατικαὶ μέν εἰσιν ἐκεῖναι καὶ αἱ ῥίζαι αὐτῶν, ὑμὴν δὲ ἐπιπλασιάζει καὶ ἀνύπαρκτοι. τοιαύτη ἐστὶν ἡ $-\alpha^3$. γίνεται γὰρ ἐκ τῆς ῥίζης $-\alpha$ δὶς πολλαπλασιασθείσης. ὡσαύτως καὶ ἡ $-\alpha^5$, ῥίζαν ἔχει τὸ $-\alpha$.

ΘΕΩΡΗΜΑ Β'.

§. 43. Τὸ μὲν ἐκ τῆς τῶν καταφατικῶν γραμμάτων διαιρέσεως προκύπτον πηλίκον, καταφατικόν ἐστιν· ὡσαύτως καὶ τὸ ἐξ ἀποφατικῶν· τὸ δὲ ἐξ ἑτέρου μὲν καταφατικοῦ, τοῦ ἑτέρου δὲ ἀποφατικοῦ, ἀποφατικόν. οἷον τὸ μὲν τοῦ $+\alpha : +\alpha$ πηλίκον ἐστὶ τὸ $+1$, ὡσαύτως τὸ τοῦ $-\alpha : -\alpha$ ἐστὶν $+1$· τὸ δὲ τοῦ $+\alpha : -\alpha$, τὸ -1, ὁμοίως τὸ τοῦ $-\alpha : +\alpha$, τὸ -1.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ διαιρέτης, πρὸς τὸν διαιρετέον λόγον ἔχει, ὃν ἡ μονάς, πρὸς τὸ πηλίκον, ἔσαι ὡς $+\alpha : +\alpha :: +1$, πρὸς τὸ πηλίκον. καταφατικοῦ δὲ ὄντος τοῦ ἑπομένου τοῦ πρώτου λόγου, ἤτοι τοῦ $+\alpha$, καταφατικὸν ἔσαι καὶ τὸ τοῦ δευτέρου λόγου ἑπόμενον. ἀλλὰ τὸ τοῦ δευτέρου λόγου ἑπόμενον ἐστὶ τὸ ἐκ τοῦ $+\alpha : \alpha$ πηλίκον, καταφατικὸν ἄρα ἔσαι τὸ ἐξ αὐτῶν πηλίκον, εἴτουν τὸ $+1$. οὕτω μὲν γὰρ ἔσαι ὡς $+\alpha : +\alpha :: +1 + : 1$. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσεται, ὅτι τὸ μὲν ἐκ τοῦ $-\alpha : -\alpha$ πηλίκον ἐστὶ τὸ $+1$· τὸ δὲ ἐκ τοῦ $+\alpha : -\alpha$, ἢ $-\alpha : +\alpha$, τὸ -1. καὶ ἄλλως δὲ τὸ αὐτὸ δειχθήσεται. ἐπεὶ γὰρ τοιοῦτον εἶναι δεῖ τὸ πηλίκον, ὥστε τὸ ἐξ αὐτοῦ τε καὶ τοῦ διαιρέτου γινόμενον ταυτὸν εἶναι τῷ διαιρετέῳ, τοιοῦτον δὲ τὸ γινόμενον προκύπτει, τηρηθέντων τῶν ἐν τῷ θεωρήματι ὁρισθέντων, ἀληθῆ ἄρα τὰ ἐν τῷ θεωρήματι.