τὸ ἀπὸ ὁποτέρας δῆθεν τῶν ΙΡ, ΡΟ, καὶ ἴσον ἐςὶ τῷ $2\overline{\Gamma\Lambda}^2$, ἐπεὶ γὰρ ἡ μὲν ΙΡ = ΡΟ, (ρ) ἡ δὲ ΚΡ = ΡΧ, (σ) καὶ ἡ ΙΚ ἄρα ἴση τῇ ΧΟ. καὶ ἐπεὶ Φερομένης μὲν τῆς ΙΟ ἐπὶ τὰ Β μέρη, ἡ ΚΧ συνεχῶς ἐλαττοῦται, ἡ ἐξάσης δὲ ἐπὶ τὸ Β, καὶ ἐφαπτομένης κατὰ κορυφὴν γεγονυίας, τὰ μὲν σημεῖα Κ, Χ ταυτίζεται, ἡ δὲ ΙΚ ἴση τῇ ΙΡ γίνεται, ὁμοίως ἡ ΟΧ τῇ ΟΡ, δῆλον ἄρα ὅτι τὸ ΙΚ. ΚΟ εἰς τὸ $\overline{\text{ΙΡ}}^2$, ἢ εἰς τὸ $\overline{\text{ΡΟ}}^2$ μεταβάλλεται. ἴσου δὲ ὄντος τοῦ ΙΚ. ΚΟ τῷ $2\overline{\Gamma\Lambda}^2$, ἴσον ἔσεται καὶ τὸ $\overline{\text{ΙΡ}}^2$, ἢ τὸ $\overline{\text{ΡΟ}}^2$ τῷ αὐτῷ $2\overline{\Gamma\Lambda}^2$.

ΛΗΜΜΑ. (τ)

Ἐὰν Ὑπερβολῆς τῆς ΑΕ εὐθεῖα ἐπιψαύουσα ἡ ΜΤ συμπίπτῃ τῇ ἀρχικῇ Διαμέτρῳ ΨΝ κατὰ τὸ Τ, καὶ ἀπὸ τῆς ἁφῆς Μ καταχθῇ εὐθεῖα τεταγμένως ἐπὶ τὴν Διάμετρον ἡ ΜΠ, καὶ ταύτῃ διὰ τῆς κορυφῆς παράλληλος ἀχθῇ ἡ ΑΔ συμπίπτουσα τῇ μὲν ΜΤ τῇ διὰ τῆς ἁφῆς κατὰ τὸ Ο, τῇ δὲ διὰ τοῦ κέντρου Γ καὶ τῆς ἁφῆς Μ ἠγμένῃ ΓΜ κατὰ τὸ Δ, ληφθέντος δέ τινος σημείου ἐπὶ τῆς τομῆς, οἷον τοῦ Φ ἀχθῶσι δύω εὐθεῖαι, αἱ ΦΗ, ΦΤ, ἡ μὲν τῇ ἐφαπτομένῃ ΜΤ παράλληλος, ἡ δὲ ἐπὶ τὴν Διάμετρον τεταγμέ-

(ρ) Κατὰ τὴν ά. Συνέπ. τῆς προλ. προτ. (σ) Κατὰ τὸν ζ. ὁρισμ.
(τ) Ἡ μγ΄. πρότ. ἐςὶ τοῦ ά. βιβλ Ἀπολλων.

μένη, τὸ γινόμενον ὑπ' αὐτῶν τρίγωνον ΦΗΥ ἴσον ἔσται τῷ τετραπλεύρῳ ΒΔΑΥ, τῷ ὑπὸ τῆς διὰ τοῦ κέντρου καὶ τῆς ἀφῆς ΓΜΒ ἀποτεμνομένῳ. χ. ϱ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὡς τρίγων ΜΓΠ : τρίγων. ΔΓΑ :: $\overline{\Gamma\Pi}^2 : \overline{\Gamma A}^2$, (υ) ἀλλ' ὡς $\overline{\Gamma\Pi}^2 : \overline{\Gamma A}^2$ :: ΓΠ : ΓΤ· (φ) ἔστι γὰρ ὡς ΓΠ : ΓΑ :: ΓΑ : ΓΤ· (χ) καὶ ὡς ΓΠ : ΓΤ :: τρίγων. ΜΓΠ : τρίγων. ΜΓΤ· (ψ) ὡς ἄρα ΜΓΠ : ΔΓΑ : ΜΓΠ : ΜΓΤ. (ω) τὸ ἄρα ΔΓΑ = ΜΓΤ. (α) τούτων ἑκάτερον ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ ΜΓΠ τριγώνου. οὐκοῦν τὸ ΜΤΠ τρίγωνον ἴσον τῷ τετραπλεύρῳ ΜΔΑΠ. ἐπεὶ δὲ ὡς $\overline{\Phi\Upsilon}^2 : \overline{M\Pi}^2$: ΨΥ. ΥΑ : ΨΠ. ΠΑ· (β) ἔστι δὲ τὸ μὲν ΨΥ. ΥΑ $= \overline{\Gamma\Upsilon}^2 - \overline{\Gamma A}^2$, τὸ δὲ ΨΠ. ΠΑ $= \overline{\Gamma\Pi}^2 - \overline{\Gamma A}^2$· (γ) ὡς ἄρα $\overline{\Phi\Upsilon}^2 : \overline{M\Pi}^2 :: \overline{\Gamma\Upsilon}^2 - \overline{\Gamma A}^2 : \overline{\Gamma\Pi}^2 - \overline{\Gamma A}^2$. ἀλλ' ὡς $\overline{\Phi\Upsilon}^2 : \overline{M\Pi}^2$ :: τρίγ. ΦΗΥ : τρίγ. ΜΤΠ, (δ) ὡς ἄρα ΦΗΥ : ΜΤΠ :: $\overline{\Gamma\Upsilon}^2 - \overline{\Gamma A}^2 : \overline{\Gamma\Pi}^2 - \overline{\Gamma A}^2$. (ε) ἐπεὶ δὲ ὡς $\overline{\Gamma\Upsilon}^2 : \overline{\Gamma A}^2$ :: τρίγ. ΓΒΥ : τρίγ. ΓΔΑ, (ζ) καὶ διαιρεθέντα $\overline{\Gamma\Upsilon}^2 - \overline{\Gamma A}^2 : \overline{\Gamma A}^2$ :: ΓΒΥ − ΓΔΑ : ΓΔΑ, εἴτουν $\overline{\Gamma\Upsilon}^2 - \overline{\Gamma A}^2 : \overline{\Gamma A}^2$ :: ΒΔΑΥ : ΓΔΑ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς $\overline{\Gamma\Upsilon}^2 - \overline{\Gamma A}^2$: ΒΔΑΥ :: $\overline{\Gamma A}^2$: ΓΔΑ. καὶ διὰ τὰ αὐτὰ δή ἐστι καὶ ὡς $\overline{\Gamma\Pi}^2 - \overline{\Gamma A}^2$: ΜΔΑΠ :: $\overline{\Gamma A}^2$: ΓΔΑ. ἔσται δὴ ἄρα καὶ ὡς $\overline{\Gamma\Upsilon}^2 - \overline{\Gamma A}^2$: ΒΔΑΥ :: $\overline{\Gamma\Pi}^2 - \overline{\Gamma A}^2$: ΜΔΑΠ. (η) καὶ ἐναλλὰξ ὡς $\overline{\Gamma\Upsilon}^2 - \overline{\Gamma A}^2 : \overline{\Gamma\Pi}^2 - \overline{\Gamma A}^2$

(υ) Κατὰ τ. τὴν ιθ'. τοῦ ς'. (φ) Κατὰ τὸ β'. Πόρισ. τὸ μετὰ τὴν η'. τοῦ ς'. (χ) Κατὰ τὴν δ': Συνέπ. τῆς δ'. τοῦ δε τοῦ τμήμ. (ψ) Κατὰ τὴν α'. τοῦ ς'. (ω) Κατὰ τὴν ι'. τοῦ ε'. (α) Κατὰ τὴν β'. τοῦ ε'. (β) Κατὰ τὴν α'. τοῦ δε τοῦ τμήμ. (γ) Κατὰ τὴν ς'. τοῦ β'. (δ) Κατὰ τὴν ιθ'. τοῦ ς'. (ε) Κατὰ τὴν ἀριθμ. ε. (ζ) Κατὰ τὴν αὐτ. ιθ'. (η) Κατὰ τὴν ἀριθμ. ε.

$\overline{\Gamma A}^2$ :: ΒΔΑΥ : ΜΔΑΠ. ἄρα ϗ ὡς ΦΗΥ : ΜΤΠ :: ΒΔΑΥ : ΜΔΑΠ. (θ) ἀλλὰ τὸ ΜΤΠ = ΜΔΑΠ, ὡς δέδεικται. ἄρα καὶ τὸ ΦΗΥ = ΒΔΑΥ. (ι)

ΣΥΝΕΠΕΙΑ.

Ἀχθείσης ἀπὸ τȣ̃ Κ σημείȣ, τȣ̃ μεταξὺ τῆς κορυφῆς καὶ τῆς ἐπαφῆς, τῆς τεταγμένης ΚΙ, συμπιπτȣ́σης τῇ διὰ τȣ̃ κέντρȣ καὶ τῆς ἀφῆς ΓΜ κατὰ τὸ Ρ, ἔσεται τὸ τρίγωνον ΔΓΑ, ὃ ἀποτέμνει ἡ διὰ τȣ̃ κέντρȣ καὶ τῆς ἀφῆς ΓΜ, ἴσον τῷ τετραπλεύρῳ ΡΓΗΚ τῷ ὑπὸ τῆς αὐτῆς ΓΜ ἀποτεμνομένῳ. ἐπεὶ γὰρ τὸ ΚΗΙ τρίγωνον ἴσον ἐςὶ τῷ ΡΔΑΙ τετραπλεύρῳ, (κ) ἑκατέρȣ τȣ́των ἀφαιρεθέντως ἀπὸ τȣ̃ ΡΓΙ τριγώνȣ, τὰ λοιπὰ ἴσα ἔσονται, εἴτȣν τὸ ΡΓΗΚ τετράπλευρον τῷ ΔΓΑ τριγώνῳ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ'. (λ)

Ἐὰν μιᾶς τῶν Ἀντικειμένων εὐθεῖα ἐπιψαύȣσα συμπίπτῃ τῇ Διαμέτρῳ, καὶ διὰ τῆς ἀφῆς ϗ τȣ̃ κέντρȣ εὐθεῖα ἐκβληθεῖσα τεμῇ τὴν ἑτέραν τομὴν, ἥτις ἂν ἀχθῇ ἐν τῇ ἑτέρᾳ τομῇ παράλληλος τῇ ἐφαπτομένῃ, δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τῆς ἐκβληθείσης· τὰ δὲ ἀπὸ τῶν ȣ̃τω διχοτομηθέντων τετράγωνα ἔσονται πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ ὀρθογώνια, τὰ ὑπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων ὑπ' αὐτῶν

(θ) Κατὰ τὴν αὐτ. (ι) Κατὰ τὴν κ'. τȣ̃ ι. (κ) Κατὰ τὸ Λῆμ.
(λ) Τὸ μὲν α'. μέρ. ἡ μη'. ἐςὶ, τὸ δὲ β'. ὅμοιον τῇ γ'. τȣ̃ κ'. βιβλ. τȣ̃ Ἀπολλων.

τῶν εὐθειῶν πρὸς τοῖς πέρασι τῆς ἐκβληθείσης.

Ἔςωσαν Ἀντικείμεναι αἱ ΑΕ, ΨϚ, ὧν Διάμετρος μὲν ἡ ΘΝ, κέντρον δὲ τὸ Γ. καὶ ἐφαπτέσθω τῆς ΑΕ τομῆς ἡ ΜΤ, τῇ Διαμέτρῳ κατὰ τὸ Γ συμπίπτουσα. καὶ διὰ τῆς ἀφῆς Μ καὶ τοῦ κέντρου Γ εὐθεῖα ἡ ΓΜ ἐκβληθεῖσα τεμνέτω τὴν ἑτέραν τομὴν κατὰ τὸ Ϛ. καὶ ἀπὸ τῶν Φ καὶ Ε σημείων τῆς τομῆς ἤχθωσαν αἱ ΦΛΚ, ΕΩΑ τῇ ἐφαπτομένῃ ΜΤ παράλληλοι. λέγω δὴ Α'. ὅτι ἡ μὲν ΦΛ = ΚΛ, ἡ δὲ ΕΩ = ΑΩ. Β'. ὅτι ὡς $\overline{\text{ΚΛ}}^2$: $\overline{\text{ΑΩ}}^2$ :: ϚΛ. ΛΜ : ϚΩ. ΩΜ.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἀπὸ τῶν Φ καὶ Ε σημείων τετάχθωσαν αἱ ΦΥ, ΕΝ.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α'.

Τὸ μὲν τρίγ. ΦΗΥ = τετραπ. ΒΔΑΥ, τὸ δὲ ΚΗΙ = ΡΔΑΙ. (μ) ἀφῃρήσθω ἀπὸ μὲν τοῦ ΦΗΥ τὸ ΚΗΙ, ἀπὸ δὲ τοῦ ΒΔΑΥ τὸ ΡΔΑΙ. ἐκοῦν τὸ ΦΚΙΥ = ΒΡΙΥ. ἀφῃρήσθω κοινὸν τὸ τραπέζιον ΒΛΚΙΥ. τὸ ἄρα ΦΛΒ = ΚΛΡ. ἐπεὶ δὲ ὡς $\overline{\text{ΦΛ}}^2$: $\overline{\text{ΚΛ}}^2$ :: ΦΛΒ : ΚΛΡ, (ν) ἔςιν ἄρα τὸ $\overline{\text{ΦΛ}}^2 = \overline{\text{ΚΛ}}^2$. διὸ καὶ ἡ ΦΛ = ΚΛ. ἐπεὶ δὲ τὸ ΕΑΝ = ΞΔΑΝ, (ξ) κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ τετραπλεύρου ΞΩΑΝ, ἔσεται τὸ ΞΩΕ = ΩΑΔ. ἔςι δὲ ὡς ΞΩΕ : ΩΑΔ : $\overline{\text{ΕΩ}}^2$: $\overline{\text{ΑΩ}}^2$. διὸ τὸ $\overline{\text{ΕΩ}}^2 = \overline{\text{ΑΩ}}^2$. ἐκοῦν καὶ ἡ ΕΩ = ΑΩ.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β'.

Τὸ ΓΔΛ = ΓΜΤ. (ο) τούτων ἑκάτερον ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ ΩΓΑ. ἐκοῦν τὸ ΩΔΑ = ΩΜΤΑ. πάλιν τὸ ΓΜΤ ἴσον ὂν τῷ ΓΔΑ, ἴσον ἐςὶ καὶ τῷ ΡΓΗΚ. (π) ἀφῃ-

---

(μ) Κατὰ τὸ Λῆμ. (ν) Κατὰ τὴν ιθ'. τοῦ ϛ'. (ξ) Κατὰ τὸ Λῆμ. (ο) Ὅρα τὴν δεῖξ. τοῦ Λήμ. (π) Κατὰ τὴν Συνέπ. τοῦ Λήμ.

ἀφῃρήσθω ἑκάτερον ἀπὸ τοῦ ΛΓΗ τριγώνου. τὸ ἄρα ΛΡΚ = ΛΜΤΗ. ὡς ἄρα ΩΔΑ : ΛΡΚ :: ΩΜΤΑ : ΛΜΤΗ. ἀλλὰ τὸ μὲν ΩΜΤΑ = ΩΓΑ − ΜΓΤ, τὸ δὲ ΛΜΤΗ = ΛΓΗ − ΜΓΤ. ὡς ἄρα ΩΔΑ : ΛΡΚ :: ΩΓΑ − ΜΓΤ : ΛΓΗ − ΜΓΤ. ἔστι δὲ ὡς ΩΓΑ : ΜΓΤ : $\overline{\Omega\Gamma}^2$: $\overline{\mathrm{M}\Gamma}^2$, (ρ) καὶ διαιρεθέντα ὡς ΩΓΑ − ΜΓΤ : ΜΓΤ :: $\overline{\Omega\Gamma}^2 - \overline{\mathrm{M}\Gamma}^2$: $\overline{\mathrm{M}\Gamma}^2$, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ΩΓΑ − ΜΓΤ : $\overline{\Omega\Gamma}^2 - \overline{\mathrm{M}\Gamma}^2$ :: ΜΓΤ : $\overline{\mathrm{M}\Gamma}^2$. καὶ διὰ τὰ αὐτὰ δὲ ὡς ΛΓΗ − ΜΓΤ : $\overline{\Lambda\Gamma}^2 - \overline{\mathrm{M}\Gamma}^2$ :: ΜΓΤ : $\overline{\mathrm{M}\Gamma}^2$. διὸ δὴ καὶ ὡς ΩΓΑ − ΜΓΤ : $\overline{\Omega\Gamma}^2 - \overline{\mathrm{M}\Gamma}^2$ :: ΛΓΗ − ΜΓΤ : $\overline{\Lambda\Gamma}^2 - \overline{\mathrm{M}\Gamma}^2$, (σ) καὶ ἐναλλὰξ ὡς ΩΓΑ − ΜΓΤ : ΛΓΗ − ΜΓΤ :: $\overline{\Omega\Gamma}^2 - \overline{\mathrm{M}\Gamma}^2$: $\overline{\Lambda\Gamma}^2 - \overline{\mathrm{M}\Gamma}^2$. ἄρα καὶ ὡς ΩΔΑ : ΛΡΚ :: $\overline{\Omega\Gamma}^2 - \overline{\mathrm{M}\Gamma}^2$: $\overline{\Lambda\Gamma}^2 - \overline{\mathrm{M}\Gamma}^2$. (τ) ἀλλὰ τὸ μὲν $\overline{\Omega\Gamma}^2 - \overline{\mathrm{M}\Gamma}^2$ = ϛΩ. ΩΜ, τὸ δὲ $\overline{\Lambda\Gamma}^2 - \overline{\mathrm{M}\Gamma}^2$ = ϛΛ. ΛΜ. (υ) (εἰς ἴσα γὰρ τέτμηται ἡ ϛΜ κατὰ τὸ Γ. (φ)) ἔστι δὲ καὶ ὡς ΩΔΑ : ΛΡΚ :: $\overline{\Lambda\Omega}^2$: $\overline{\mathrm{K}\Lambda}^2$. (χ) ὡς ἄρα $\overline{\Lambda\Omega}^2$: $\overline{\mathrm{K}\Lambda}^2$ :: ϛΩ. ΩΜ : ϛΛ. ΛΜ. καὶ ἀνάπαλιν, ὡς $\overline{\mathrm{K}\Lambda}^2$: $\overline{\Lambda\Omega}^2$ :: ϛΛ. ΛΜ : ϛΩ. ΩΜ.

ΣΥΝΕΠΕΙΑΙ.

Α΄. Αἱ εὐθεῖαι ΓΩ, ΓΜ, ΓΔ συνεχῶς ἀνάλογόν εἰσιν. ἐπεὶ γὰρ ὡς ΠΓ : ΓΑ :: ΓΑ : ΓΤ, (ψ) ἔστι δὲ ὡς μὲν ΠΓ : ΓΑ :: ΓΜ : ΓΔ, ὡς δὲ ΓΑ : ΓΤ :: ΓΩ : ΓΜ, (ω) ἄρα καὶ ὡς ΓΩ : ΓΜ :: ΓΜ : ΓΔ. (α) τὸ ἄρα $\overline{\Gamma\mathrm{M}}^2$ = ΓΩ. ΓΔ. (β)

Β΄. Ἐὰν ἐκβληθεῖσα ἡ ἐφαπτομένη ΜΤ τῇ ἀπὸ τοῦ ϛ ἐπὶ τὸ Α ἐπιζευχθείσῃ συμπέσῃ κατὰ τὸ Χ, τὸ ἀπολαμβανόμενον μέρος ΜΧ τῆς ἐφαπτομένης δίχα τμη-

(ρ) Κατὰ τὴν ιθ΄. τοῦ ϛ΄. (σ) Κατὰ τὴν ι΄. τοῦ ε΄. (τ) Κατὰ τὴν αὐτ. (υ) Κατὰ τὴν ϛ΄. τοῦ β΄. (φ) Ἐκ τῆς ε΄. τοῦ δε τοῦ τμήμ. δῆλον. (χ) Κατὰ τὴν ιθ΄. τοῦ ϛ΄. (ψ) Κατὰ τὴν δ΄. Συνεπ. τῆς δ΄. τοῦ δε τοῦ τμήμ. (ω) Κατὰ τὴν δ΄, τοῦ ϛ΄. (α) Κατὰ τὴν ι΄. τοῦ ε΄. (β) Κατὰ τὴν ιζ΄. τοῦ ϛ΄.

τμηθήσεται κατὰ τὸ Ο ὑπὸ τῆς κατὰ κορυφὴν ἁπτομένης ΑΔ. ἡ γὰρ ΔΩ : ΔΜ λόγον ἔχει συγκείμενον ἔκτε τȣ̃ λόγȣ ὃν ἔχει ἡ ϚΩ : ϚΜ, καὶ ἐκ τȣ̃ ὃν ἔχει ὁ 2 : 1. (γ) ἔστι δὲ ὡς ΔΩ : ΔΜ :: ΩΑ : ΜΟ. (δ) ἄρα καὶ ἡ ΩΑ : ΜΟ λόγον ἔχει συγκείμενον ἔκτε τȣ̃ λόγȣ ὃν ἔχει ἡ ϚΩ : ϚΜ, καὶ ὁ 2 : 1. ἀλλ' ἡ αὐτὴ ΩΑ : ΜΟ λόγον ἔχει συγκείμενον ἔκτε τȣ̃ λόγȣ ὃν ἔχει ΩΑ : ΜΧ καὶ ΜΧ : ΜΟ. (ε) ἔστι δὲ ὡς ΩΑ : ΜΧ :: ϚΩ : ϚΜ. (ζ) ἄρα καὶ ὡς ΜΧ : ΜΟ :: 2 : 1. ἡ ἄρα ΜΧ διπλασία τῆς ΜΟ. δίχα ἄρα τέτμηται ἡ ΜΧ κατὰ τὸ Ο.

Γ. Ἐκ τῶν εἰρημένων δῆλον, ὅτι ἡ Δευτεραία Διάμετρος ϚΜΩ (η) ȣ̓ μόνον δίχα τέμνει τὰς ἐπ' αὐτὴν τεταγμένας ΚΦ, ΑΕ, τὰς τῇ ἐφαπτομένῃ ΜΤ παραλλήλȣς, ἀλλ' ἔστι καὶ ὡς $\overline{\mathrm{K}\Lambda}^2 : \overline{\Lambda\Omega}^2$ :: ϚΛ. ΛΜ : ϚΩ. ΩΜ. καὶ ἡ κατὰ κορυφὴν δὲ ἁπτομένη αὐτὴν μὲν ȣ̔́τω τέμνει, ὥστε τὰς ΙΩ, ΓΜ, ΓΔ συνεχῶς ἀνάλογον εἶναι, τὴν δὲ ἐφαπτομένην ΜΧ δίχα. καὶ πάντα δὲ τὰ συμπτώματα τὰ ἐπὶ τῆς ἀρχικῆς Διαμέτρȣ δειχθέντα, καὶ ἐπὶ τῆς Δευτεραίας δειχθήσεται ἐκβληθείσης ἐπὶ τὴν ΨϚ Ἀντικειμένην τομήν. διὸ δὴ ὁρισθήσεται καὶ ἡ τῆς Δευτεραίας ϚΜ ὀρθία πλευρά, ἐὰν τῶν ϚΩ. ΩΜ, $\overline{\Omega\mathrm{A}}^2$, καὶ ϚΜ τετάρτη ἀνάλογος εὑρεθῇ. ὡσαύτως καὶ ἡ Δευτέρα αὐτῆς, ἤτȣν ἡ μέση ἀνάλογον τῆς τε Δευτεραίας ϚΜ καὶ τῆς εὑρεθείσης αὐτῆς ὀρθίας, καὶ παράλληλος τῇ ἐφαπτομένῃ ΜΧ καὶ δίχα κατὰ τὸ Γ κέντρον τεμνομένη, οἷον ἡ σμ. (θ)

Δ'.

(γ) Κατὰ τὴν ε'. Συνέπ. τῆς δ. τȣ̃ δε τȣ̃ τμήμ. (δ) Κατὰ τὴν δ'. τȣ̃ ε'. (ε) Κατὰ τὸ α'. Πόρισ. τὸ μετὰ τὴν η'. τȣ̃ ι. (ζ) Κατὰ τὴν δ'. τȣ̃ ε'. (η) Ὅρα τὸν κέ. ὁρισμ. (θ) Ὅρα τὸν κδ'. ὁρισμ.

Δ΄. ἐὰν ἀπὸ σημείου Ω, καθ᾽ ὃ ἡ τεταγμένη ΑΕ τὴν Δευτεραίαν τέμνει Διάμετρον ϛΩ, ἀχθῇ εὐθεῖα ἡ ΩΖ τῇ ἀπὸ τῆς ἐπαφῆς Μ ἐπὶ τὴν ἀρχικὴν Διάμετρον ΨΝ τεταγμένῃ ΜΠ παράλληλος, τῇ αὐτῇ Διαμέτρῳ συμπίπτουσα κατὰ τὸ Ζ, ἔσονται ἤτε ὑπ᾽ αὐτῆς ἀπολαμβανομένη πρὸς τῷ κέντρῳ Γ, εἴτουν ἡ ΖΓ, καὶ ἡ ὑπὸ τῆς ἐπαφῆς τεταγμένως ἀχθεῖσα ΜΠ ἀπολαμβανομένη ΓΠ, καὶ ἡ ἡμίσεια τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΓΑ συνεχῶς ἀνάλογον, εἴτουν ἔσεται ὡς $ΓΖ : ΓΠ :: ΓΠ : ΓΑ$. ἐπεὶ γὰρ ὡς $ΑΕ : ΑΩ :: ΕΝ : ΩΖ$, καὶ ὡς $ΑΕ : ΑΩ :: ΑΝ : ΑΖ$, (ι) ἔστι δὲ τῆς ΑΩ διπλασία ἡ ΑΕ, (κ) ἄρα καὶ ἡ ΕΝ διπλασία τῆς ΩΖ, καὶ ἡ ΑΝ τῆς ΑΖ. προσκείσθω τῇ μὲν ΑΝ ἡ ΨΑ, τῇ δὲ ΑΖ ἡ ΓΑ. ἡ ἄρα ΨΝ διπλασία τῆς ΓΖ. διὸ τὸ ΨΝ. ΝΑ τετραπλάσιον τοῦ ΓΖ. ΖΑ. ἔστι δὲ καὶ τὸ $\overline{ΕΝ}^2$ τετραπλάσιον τοῦ $\overline{ΩΖ}^2$. ὡς ἄρα $\overline{ΩΖ}^2 : \overline{ΕΝ}^2 :: ΓΖ.ΖΑ : ΨΝ.ΝΑ$. ἔστι δὲ καὶ ὡς $\overline{ΕΝ}^2 : \overline{ΜΠ}^2 :: ΨΝ.ΝΑ : ΨΠ.ΠΑ$. (λ) ἄρα καὶ δι᾽ ἴσου ὡς $\overline{ΩΖ}^2 : \overline{ΜΠ}^2 :: ΓΖ.ΖΑ : ΨΠ.ΠΑ$. ἀλλ᾽ ὡς $\overline{ΩΖ}^2 : \overline{ΜΠ}^2 :: \overline{ΓΖ}^2 : \overline{ΓΠ}^2$· (μ) ἔστι γὰρ ὡς $ΩΖ : ΜΠ :: ΓΖ : ΓΠ$· (ν) ἄρα καὶ ὡς $\overline{ΓΖ}^2 : \overline{ΓΠ}^2 :: ΓΖ.ΖΑ : ΨΠ.ΠΑ$. (ξ) καὶ ἐναλλὰξ ὡς $\overline{ΓΖ}^2 : ΓΖ.ΖΑ :: \overline{ΓΠ}^2 : ΨΠ.ΠΑ$. καὶ κατ᾽ ἀναστροφὴν ὡς $\overline{ΓΖ}^2 : \overline{ΓΖ}^2 - ΓΖ.ΖΑ :: \overline{ΓΠ}^2 : \overline{ΓΠ}^2 - ΨΠ.ΠΑ$. ἀλλὰ τὸ μὲν $\overline{ΓΖ}^2 - ΓΖ.ΖΑ = ΓΖ.ΓΑ$, (ο) τὸ δὲ $\overline{ΓΠ}^2 - ΨΠ.ΠΑ = \overline{ΓΑ}^2$. (π) ὡς ἄρα $\overline{ΓΖ}^2 : ΓΖ.ΓΑ :: \overline{ΓΠ}^2 : \overline{ΓΑ}^2$, καὶ ἐναλλὰξ, ὡς $\overline{ΓΖ}^2 : \overline{ΓΠ}^2 :: ΓΖ.ΓΑ : \overline{ΓΑ}^2$. ἀλλ᾽ ὡς ΓΖ.

(ι) Κατὰ τὴν δ΄. τοῦ ϛ΄. (κ) Ἐκ τῆς προκειμ. προτ. δῆλον. (λ) Κατὰ τὴν α΄. τοῦ δε τοῦ τμήμ. (μ) Κατὰ τὸ ζ΄. Θεωρ. τῶν μετὰ τὸ ε΄. (ν) Κατὰ τὴν δ΄. τοῦ ϛ΄. (ξ) Κατὰ τὴν ι΄. τοῦ ε (ο) Κατὰ τὴν β΄. τοῦ β΄. (π) Κατὰ τὴν ϛ΄. τοῦ β.

ΓΖ. ΓΑ: $\overline{ΓΑ}^2$ :: ΓΖ: ΓΑ. (ρ) ὡς ἄρα $\overline{ΓΖ}^2$: $\overline{ΓΠ}^2$ :: ΓΖ: ΓΑ, ἤτοι ἡ ΓΖ: ΓΑ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΖ: ΓΠ, (σ) ἤτοι ὡς ΓΖ : ΓΠ :: ΓΠ : ΓΑ. ἔσαι δὴ οὖν καὶ τὸ $ΓΠ^2$ = ΓΖ. ΓΑ. (τ)

Ε'. Τὰ τρίγωνα τὰ ὑπὸ τῆς Δευτεραίας Διαμέτρου ἀποτεμνόμενα, ἤτοι τὰ ΩΓΑ, ΜΓΠ ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν. ἐπεὶ γὰρ ὡς ΩΓ : ΜΓ :: ΖΓ : ΠΓ, (υ) ἔστι δὲ ὡς ΖΓ : ΠΓ :: ΠΓ : ΓΑ, (φ) ἄρα καὶ ὡς ΩΓ: ΜΓ :: ΠΓ : ΓΑ. (χ) τὸ ἄρα ΩΓΑ = ΜΓΠ. (ψ)

Ϛ'. Ἐὰν δύω ἀχθῶσι δεύτεραι Διάμετροι ἤτε ψα τῆς ἀρχικῆς καὶ πρώτης ΨΑ, καὶ ἡ ςμ τῆς Δευτεραίας ϚΜ, λόγον ἕξουσι πρὸς ἀλλήλας ὃν αἱ τεταγμέναι ἐπί τε τὴν πρώτην καὶ Δευτεραίαν Διάμετρον, ἤτουν ἔσεται ὡς ψα : ςμ : : ΜΠ : ΑΩ. ἐπεὶ γὰρ ὡς ΩΓ : ΜΓ :: ΠΓ : ΑΓ, (ω) καὶ κατ᾽ ἀναστροφὴν, ὡς ΩΓ : ΩΜ :: ΠΓ : ΠΑ, καὶ διαιρεθέντα ὡς ΜΓ : ΩΜ :: ΑΓ: ΠΑ, ἄρα καὶ ὡς ϚΜ : ΩΜ :: ΨΑ : ΠΑ, (α) καὶ ἀνάπαλιν ὡς ΩΜ : ϚΜ : : ΠΑ : ΨΑ, καὶ συντεθέντα ὡς ϚΩ : ϚΜ : : ΨΠ : ΨΑ, καὶ ἀνάπαλιν ὡς ϚΜ : ϚΩ : : ΨΑ : ΨΠ. ἔστι δὲ ὡς μὲν ϚΜ : ΩΜ : : ΨΑ : ΠΑ, καθάπερ δέδεικται. ἄρα καὶ ὡς $\overline{ϚΜ}^2$: ϚΩ. ΩΜ :: $\overline{ΨΑ}^2$: ΨΠ. ΠΑ. (β) ἀλλ᾽ ὡς ΨΠ. ΠΑ : $\overline{ΜΠ}^2$ :: ψΑ

(ρ) Κατὰ τὴν α'. τοῦ ϛ'. (σ) Ὅρα τὴν δ'. Σημ. τὴν ἐν τοῖς ὁρισμ. τοῦ ε'. (τ) Κατὰ τὴν ιζ'. τοῦ ϛ'. (υ) Κατὰ τὴν δ'. τοῦ ϛ'. (φ) Κατὰ τὴν προλ. Συνέπ. (χ) Κατὰ τὴν ε'. τοῦ ε'. (ψ) Κατὰ τὴν ιε'. τοῦ ϛ'. (ω) Ὅρα τὴν προλ. Συνέπ. (α) Κατὰ τὴν ιϛ'. τοῦ ε'. (β) Κατὰ τὴν αὐτ.

ψΑ, πρὸς τὴν ὀρθίαν πλευρὰν, οἷον τὴν ΑΣ, (γ) ὡς δὲ ΨΑ : ΛΣ :: $\overline{\Psi A}^2$: $\overline{\psi\alpha}^2$· (δ) ἔστι γὰρ ὡς ΨΑ : ψα :: ψα : ΑΣ· (ε) ὡς ἄρα ΨΠ. ΠΑ : $\overline{\mathrm{M\Pi}}^2$ :: $\overline{\Psi A}^2$: $\overline{\psi\alpha}^2$. (ζ) καὶ ἐναλλὰξ ὡς $\overline{\Psi A}^2$: ψΠ. ΠΑ :: $\overline{\psi\alpha}^2$: ΜΠ². ἀλλὰ δέδεικται καὶ ὡς $\overline{\text{ϛM}}^2$: ϛΩ. ΩΜ :: $\overline{\Psi A}^2$: ΨΠ. ΠΑ. ἄρα καὶ ὡς $\overline{\text{ϛΠ}}^2$: ϛΩ. ΩΜ :: $\overline{\psi\alpha}^2$: $\overline{\mathrm{M\Pi}}^2$. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ δειχθήσεται ὡς $\overline{\text{ϛM}}^2$: ϛΩ. ΩΜ :: $\overline{\text{ϛμ}}^2$: $\overline{\mathrm{A\Omega}}^2$. ἐπεὶ δὲ ἀνωτέρω δέδεικται ὡς $\overline{\text{ϛM}}^2$: ϛΩ. ΩΜ :: $\overline{\Psi A}^2$: ΨΠ. ΠΑ, ἔσται δὴ ἄρα καὶ ὡς $\overline{\psi\alpha}^2$: $\overline{\mathrm{M\Pi}}^2$ :: $\overline{\text{ϛμ}}^2$: $\overline{\mathrm{A\Omega}}^2$. (η) ἄρα καὶ ὡς ψα : ΜΠ :: ϛμ : ΑΩ, (θ) καὶ ἐναλλὰξ ὡς ψα : ϛμ :: ΜΠ : ΑΩ. δῆλον δὲ ὅτι καὶ ὡς ψΓ : μγ :: ΜΠ : ΑΩ.

Ζ′. Τῶν αὐτῶν κειμένων, ἔσονται τὰ πέρατα μ, ϛ (πίν. I. σχ. 1.) τῆς δευτέρας διαμέτρου μϛ ἐν ταῖς γραφείσαις συζυγέσι τομαῖς Βμ, Δϛ. ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ πέρατος ϛ ἡ μὲν ϛΕ παράλληλος τῇ πλαγίᾳ πλευρᾷ ΨΑ, ἡ δὲ ϛΖ τῇ Δευτερεύᾳ Διαμέτρῳ ϛΜ, συμπίπτουσαι τῇ δευτέρᾳ Διαμέτρῳ ΒΔ κατὰ Ε καὶ Ζ σημεῖα. ἔστω δὲ κατὰ κορυφὴν μὲν ἁπτομένη ἡ ΑΗ, τεταγμέναι δὲ αἱ ΜΠ, ΑΙ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΓΖ : ΓΔ λόγον ἔχει συγκείμενον ἔκ τε τοῦ λόγου ὃν ἔχει ΓΖ : Γϛ καὶ Γϛ : ΓΔ· (ι) ἔστι δὲ ὡς μὲν ΓΖ : Γϛ :: ΑΗ : ΑΙ. (κ) (ὅμοια γὰρ τὰ ΓΖϛ, ΑΗΙ τρίγωνα. ἔστι γὰρ ἡ μὲν γωνία ΓΖϛ = ΒΓΗ, ἤτουν τῇ ΑΗΙ, ἡ δὲ ΓϛΖ = ϛΓΙ, ἤτοι τῇ ΓΙΑ. (λ)) ὡς δὲ Γϛ : ΓΔ :: ΑΙ : ΜΠ· (μ) ἡ ἄρα

(γ) Κατὰ τὴν Συνέπ. τῆς ά. τοῦ δε τοῦ τμήμ. (δ) Κατὰ τὸ β′ Πόρ. τὸ μετὰ τὴν ή. τοῦ έ. (ε) Κατὰ τὸν κδ′. ὁρισμ. (ζ) Κατὰ τὴν έ. τοῦ έ. (η) Κατὰ τὴν αὐτ. (θ) Κατὰ τὸ ζ′ τῶν μετὰ τὸ έ. Θεώρημ. (ι) Κατὰ τὸ ά. Πόρ. τὸ μετὰ τὴν ή τοῦ έ. (κ) Κατὰ τὴν δ′. τοῦ ϛ′. (λ) Κατὰ τὴν κθ′. τοῦ ά. (μ) Κατὰ τὴν προλ. Συνέπ.

ἄρα ΓΖ : ΓΔ λόγον ἔχει συγκείμενον ἔκτε τȣ̃ λόγȣ ὃν ἔχει ΑΗ: ΑΙ, καὶ ΑΙ : ΜΠ, εἴτȣν ἐςὶν ὡς ΓΖ : ΓΔ : : ΑΗ. ΑΙ: ΑΙ. ΜΠ. (ν) ἀλλ᾽ ὡς ΑΗ. ΑΙ : ΑΙ. ΜΠ : : ΑΗ : ΜΠ, (ξ) ὡς δὲ ΑΗ : ΜΠ : : ΓΑ : ΓΠ, (ο) καὶ ὡς ΓΑ : ΓΠ : : ΓΜ : ΓΙ, (π) ὡς δὲ ΓΜ : ΓΙ : : ΜΤ : ΙΑ. (ρ) ἄρα καὶ ὡς ΓΖ : ΓΔ : : ΜΤ : ΙΑ. (σ) ἀλλ᾽ ἡ ΜΤ : ΙΑ λόγον ἔχει συγκείμενον ἔκτε τȣ̃ λόγȣ ὃν ἔχει ΜΤ : ΜΠ, καὶ ΜΠ : ΙΑ· (τ) ἔςι δὲ ὡς μὲν ΜΤ : ΜΠ : : Γς : ΓΕ, (υ) ὅμοια γὰρ τὰ ΜΤΠ, ςΓΕ τρίγωνα. (ἔςι γὰρ ἡ μὲν γωνία ἡ πρὸς τῷ Π ἴση τῇ πρὸς τῷ Ε, ἡ δὲ ΠΤΜ $=$ ΠΓς, ἤτοι τῇ ΓςΕ.) (φ) ὡς δὲ ΜΠ : ΙΑ : : ΓΔ : Γς. (χ) ἄρα καὶ ἡ ΓΖ : ΓΔ λόγον ἔχει συγκείμενον ἐκ τȣ̃ ὃν ἔχει Γς : ΓΕ, καὶ ΓΔ : Γς, εἴτȣν ἐςὶν ὡς ΓΖ : ΓΔ : : Γς. ΓΔ : ΓΕ. Γς. (ψ) ἀλλ᾽ ὡς Γς. ΓΔ: ΓΕ. Γς : : ΓΔ : ΓΕ. (ω) ἄρα καὶ ὡς ΓΖ : ΓΔ : : ΓΔ : ΓΕ. (α) τὸ ἄρα $\overline{\Gamma\Delta}^2 = $ ΓΖ. ΓΕ. (β) τȣ́των ἑκάτερον ἀφῃρήσθω ἀπὸ τȣ̃ $\overline{\Gamma E}^2$. τὸ ἄρα ΒΕ. ΕΔ $=$ ΓΕ. ΕΖ. (γ) ἐπεὶ δὲ καὶ τὸ ΨΠ. ΠΑ $=$ ΤΠ. ΠΓ, (δ) ȣ̉κȣ̃ν ἐςὶν ὡς ΤΠ. ΠΓ : $\overline{\text{ΜΠ}}^2$: : ΨΠ. ΠΑ : $\overline{\text{ΜΠ}}^2$. (ε) ἀλλ᾽ ὡς ΨΠ. ΠΑ : $\overline{\text{ΠΜ}}^2$: : ΨΑ : ΑΣ, (ζ) καὶ ὡς ΨΑ: ΑΣ : : $\overline{\text{ΨΑ}}^2$: $\overline{\text{ΒΔ}}^2$. (η) ὡς ἄρα ΤΠ. ΠΓ : $\overline{\text{ΜΠ}}^2$: : $\overline{\text{ΨΑ}}^2$: $\overline{\text{ΒΔ}}^2$

(ν) Κατὰ τὸν ζ. ὁρισμ. τȣ̃ έ. (ξ) Κατὰ τὴν ά. τȣ̃ ς'. (ο) Κατὰ τὴν δ'. τȣ̃ ς'. (π) Ὅρα τὴν προλ έ. Συνέπ. (ρ) Κατὰ τὴν δ'. τȣ̃ ς'. (σ) Κατὰ τὴν έ. τȣ̃ έ. (τ) Κατὰ τὸ ἀρημ. Πόρισ. (υ) Κατὰ τὴν δ'. τȣ̃ ς'. (φ) Κατὰ τὴν κθ'. τȣ̃ ά. (χ) Κατὰ τὴν προλ. Συνέπ. (ψ) Κατὰ τὸν ζ. ὁρισμ. τȣ̃ έ. (ω) Κατὰ τὴν ά. τȣ̃ ς'. (α) Κατὰ τὴν έ. τȣ̃ έ. (β) Κατὰ τὴν ιζ. τȣ̃ ς'. (γ) Κατὰ τὴν ς', καὶ β'. τȣ̃ β'. (δ) Κατὰ τὴν έ. Συνέπ. τῆς δ'. προτ. τȣ̃ δε. τȣ̃ τμήμ. (ε) Κατὰ τὴν ά. τȣ̃ έ. (ζ) Κατὰ τὴν Συνέπ. τῆς ά. τȣ̃ δε τμήμ. (η) Ἐκ τȣ̃ δ'. ὁρισμ. δῆλον.

$\overline{\mathrm{B}\Delta}^2$. ἀλλὰ τὸ ΤΠ. ΠΓ : $\overline{\mathrm{M}\Pi}^2$ λόγον ἔχει συγκείμενον ἔκτε τȣ̃ ὃν ἔχει ΤΠ : ΜΠ, ϰ̀ ΠΓ : ΜΠ· (ϑ) ἔςι δὲ ὡς μὲν ΤΠ : ΜΠ :: ςΕ : ΓΕ, ὡς δὲ ΠΓ : ΜΠ :: ςΕ : ΖΕ. (ι) ὡς ἄρα $\overline{\Psi\mathrm{A}}^2 : \overline{\mathrm{B}\Delta}^2 :: \overline{\varsigma\mathrm{E}}^2$: ΓΕ. ΖΕ. ἀλλὰ τὸ ΓΕ. ΖΕ = ΒΕ. ΕΔ, ὡς ἀνωτέρω δέδεικται. ὡς ἄρα $\overline{\Psi\mathrm{A}}^2 : \overline{\mathrm{B}\Delta}^2 :: \overline{\varsigma\mathrm{E}}^2$: ΒΕ. ΕΔ, καὶ ἀνάπαλιν ὡς ΒΕ. ΕΔ : $\overline{\varsigma\mathrm{E}}^2 :: \overline{\mathrm{B}\Delta}^2 : \overline{\Psi\mathrm{A}}^2$. κειμένȣ δὲ τὴν ΒΛ ὀρθίαν πλευρὰν εἶναι τῆς ΒΔ, ἐςὶν ὡς $\overline{\mathrm{B}\Delta}^2 : \overline{\Psi\mathrm{A}}^2$ :: ΒΔ : ΒΛ. (κ) ὡς ἄρα ΒΕ. ΕΔ : $\overline{\varsigma\mathrm{E}}^2$ :: ΒΔ : ΒΛ. τὸ σημεῖον ἄρα ς ἐπὶ τῆς Δς τομῆς κεῖται. (λ) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ τὸ μ ἐπὶ τῆς Βμ τομῆς ἐςί.

ΛΗΜΜΑ.

Ἐὰν ἐν ταῖς Ἀντικειμέναις τομαῖς ὁ ΥΚ Ἄξων ȣ̓́τω τμηθῇ πρὸς ταῖς κορυφαῖς, Ψ, Α, ὥςε τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης ΑΥ, ἢ ΨΦ ϰ̀ ἑκατέρȣ τῶν τμημάτων ΨΥ, ἢ ΑΦ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τεταρτιμορίῳ τȣ̃ ὑπὸ τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΨΑ ϰ̀ τῆς ὀρθίας ΑΛ περιεχομένȣ ὀρθογωνίȣ, εἴτȣν ἐὰν ᾖ ΑΥ. ΨΥ = $\frac{\Psi\mathrm{A}.\ \mathrm{A}\Lambda}{4}$, ἢ ΨΦ. ΑΦ = $\frac{\Psi\mathrm{A}.\ \mathrm{A}\Lambda}{4}$· ἀπὸ δὲ τῶν Υ ϰ̀ Φ σημείων ἐπὶ τὰ Β ϰ̀ Χ, καθ' ἃ ἡ ἐφαπτομένη ΜΒ τὰς κατὰ κορυφὴν ἁπτομένας ΑΧ, ΨΒ τέμνει, ἐπιζευχθῶσιν εὐθεῖαι αἱ ΥΒ,

(ϑ) Κατὰ τὴν κγ΄. τȣ̃ ς΄. (ι) Κατὰ τὴν δ΄. τȣ̃ ε΄. (κ) Ἐκ τῆς γ΄. Συνεπ. τῆς ι΄. προτ. τȣ̃ δε τȣ̃ τμήμ. δῆλον (λ) Ἐκ τῆς Συνεπ. τῆς α΄. προτ. τȣ̃ δε πȣ̃ τμήμ δῆλον.

ΥΒ, ΥΧ, καὶ αἱ ΦΧ, ΦΒ, λέγω Α΄. ὅτι αἱ ὑπ' αὐτῶν περιεχόμεναι γωνίαι, αἱ μὲν πρὸς τοῖς Υ καὶ Φ σημείοις, ἤτουν αἱ ΒΥΧ, ΒΦΧ, ὀρθαί εἰσιν· αἱ δὲ ὑπὸ τῶν ΒΥ, ΦΧ ὑποτεινόμεναι ἴσαι ἀλλήλαις, τουτέστιν ἡ μὲν ΒΧΥ = ΒΦΥ, ἡ δὲ ΦΥΧ = ΦΒΧ. Β΄. ὅτι ἐὰν δύω ἐκ τῶν ἐπιζευχθεισῶν εὐθειῶν αἱ ΥΧ, ΒΦ ἐκβληθεῖσαι συμπέσωσιν, ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως αὐτῶν Η ἐπὶ τῆς ἐπαφῆς Μ ἐπιζευχθεῖσα εὐθεῖα ΗΜ τῇ ἐφαπτομένῃ ΜΒ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α΄.

Τὸ $\mathrm{B\Psi . AX} = \frac{\Psi\mathrm{A} . \mathrm{A}\Lambda}{4}$ (μ) ἀλλὰ καὶ τὸ $\mathrm{A\Upsilon} . \psi\Upsilon = \frac{\psi \mathrm{A} . \mathrm{A}\Lambda}{4}$. (ν) τὸ ἄρα ΒΨ. ΑΧ = ΑΥ. ΨΥ. ὡς ἄρα ΒΨ : ΨΥ :: ΑΥ : ΑΧ. (ξ) ἔστι δὲ καὶ γωνία ἡ ΒΨΥ = ΥΑΧ, ἰσογώνια ἄρα εἰσὶ τὰ ΒΨΥ, ΥΑΧ τρίγωνα, καὶ γωνία ἡ ΥΒΨ = ΑΥΧ. (π) κοινὴ προσκείσθω ἡ ΒΥΨ, ἡ ἄρα ΥΒΨ + ΒΥΨ = ΑΥΧ + ΒΥΨ. ἀλλ' ἡ ΥΒψ + ΒΥΨ μιᾷ ὀρθῇ ἴση. (ρ) ἄρα καὶ ἡ ΑΥΧ + ΒΥΨ, ἤτουν ἡ ΒΥΧ ἴση μιᾷ ὀρθῇ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἡ ΒΦΧ ὀρθή ἐστιν. ὁ οὖν διαμέτρῳ τῇ ΒΧ γραφόμενος κύκλος διὰ τῶν Β, Υ, Χ, Φ σημείων ἥξει. (σ) αἱ

(μ) Κατὰ τὴν ια΄. Συνέπ. τῆς δ΄. τοῦ δε τοῦ τμήμ. (ν) Ἐξ ὑποθ. (ξ) Κατὰ τὴν ιϛ΄. τοῦ ϛ΄. (ο) Ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα διὰ τὸν ΥΚ Ἄξονα. (π) Κατὰ τὴν ϛ΄. τοῦ ϛ΄. (ρ) Κατὰ τὴν δ΄. Συνέπ. τὴν μετὰ τὴν δ΄. Συνέπ. τὴν μετὰ τὴν λβ΄. τοῦ α΄. (σ) Κατὰ τὴν δ΄. Συνέπ. τὴν μετὰ τὴν η΄. τοῦ ϛ΄.

αἱ ἄρα ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι τοῦ κύκλου γωνίαι ΒΧΥ, ΒΦΥ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ὡσαύτως αἱ ΦΥΧ, ΦΒΧ.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β.

Εἰ γὰρ μὴ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΜΒ ἡ ΗΜ, ἤχθω ἀπὸ τοῦ Η ἡ ΗΙ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΜΒ. καὶ ταχθείσης ἀπὸ τοῦ Μ ἐπὶ τοῦ Ἄξονος ΥΚ τῆς ΜΚ, ἐπεζεύχθω ἡ ΚΙ. καὶ ἐπεὶ τῶν τριγώνων ΒΨΥ, ΒΙΗ ἡ μὲν γωνία ΒΨΥ = ΒΙΗ· (ἑκατέρα γὰρ ὀρθή.) ἡ δὲ ΥΒΨ = ΙΒΗ· ἑκατέρα γὰρ ἴση δέδεικται τῇ ΦΥΧ· ὡς ἄρα ΙΒ : ΒΨ : : ΒΗ : ΒΥ. (τ) ἀλλ' ὡς ΒΗ : ΒΥ : ΗΧ : ΧΦ, (υ) ὡς δὲ ΗΧ : ΧΦ : : ΙΧ : ΑΧ· ὅμοια γὰρ τὰ ΗΧΙ, ΦΧΑ τρίγωνα· (ἡ μὲν γὰρ γωνία ΗΙΧ = ΦΑΧ· ἑκατέρα γὰρ ὀρθή· ἡ δὲ ΗΧΙ = ΑΧΦ· ἑκατέρα γὰρ ἴση τῇ ΒΦΥ· ἡ γὰρ ΗΧΙ = ΒΧΥ, (φ) ἡ δὲ ΒΧΥ = ΒΦΥ. (χ) ὥσπερ δὲ δέδεικται ἡ ΥΒΨ = ΑΥΧ, οὕτω δειχθήσεται καὶ ἡ ΑΧΦ = ΒΦΥ.) ὡς ἄρα ΙΒ : ΒΨ : : ΙΧ : ΑΧ, (ψ) καὶ ἐναλλὰξ ὡς ΙΒ : ΙΧ : : ΒΨ : ΑΧ. ἔστι δὲ ὡς ΒΨ ΑΧ : : ΨΚ : ΚΑ. (ω) ὡς ἄρα ΙΒ : ΙΧ : : ΨΚ : ΚΑ, (α) καὶ διαιρεθέντα, ὡς ΒΧ : ΙΧ : : ΨΑ : ΚΑ. ἀλλ' ὡς ΨΑ : ΚΑ : : ΠΧ : ΧΡ. (ἔστι γὰρ ὡς ΥΚ : ΥΨ : : ΥΡ : ΥΠ, (β) καὶ κατὰ ἀναστροφὴν, ὡς ΥΚ : ΨΚ : : ΥΡ : ΠΡ, καὶ ἀνάπαλιν ὡς ΨΚ : ΥΚ : : ΠΡ : ΥΡ. καὶ διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἐστὶν ὡς ΥΚ : ΚΑ : : ΥΡ : ΧΡ. διὸ καὶ δι' ἴσου ὡς ΨΚ : ΚΑ : : ΠΡ : ΧΡ, καὶ διαιρεθέντα, ὡς ΨΑ : ΚΑ : : ΠΧ : ΧΡ.) καὶ ὡς ΠΧ : ΧΡ : : ΒΧ : ΧΜ. (γ) ὡς ἄρα ΒΧ : ΙΧ : : ΒΧ : ΧΜ. (δ) ἡ ἄρα ΧΜ = ΙΧ.

(τ) Κατὰ τὴν δ'. τοῦ ϛ'. (υ) Κατὰ τὴν αὐτ. (φ) Κατὰ τὴν ιά. τοῦ ά. (χ) Κατὰ τὸ προλ. μέρος (ψ) Κατὰ τὴν ί. τοῦ έ. (ω) Κατὰ τὴν θ'. Συνέπ. τῆς δ'. τοῦ δε τοῦ τμήμ. (α) Κατὰ τὴν ἔκθεσιν έ. (β) Κατὰ τὴν δ'. τοῦ ϛ'. (γ) Κατὰ τὴν αὐτ. (δ) Κατὰ τὴν ἀρημ. έ.

IX. (ε) τὸ ὅλον ἴσον τῷ μέρει, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ΗΙ κάθετος τῇ ΒΜ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσεται, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τὶς πλὴν τῆς ΗΜ. ἡ ἄρα ΗΜ τῇ ΒΜ πρὸς ὀρθάς ἐστι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η΄.

Τῶν αὐτῶν κειμένων, ἐὰν ἀπὸ τῶν εἰρημένων τοῦ Ἄξονος σημείων ἐπὶ τὴν ἐπαφὴν ἐπιζευχθῶσιν εὐθεῖαι, αἱ ὑπ' αὐτῶν καὶ τῆς ἐφαπτομένης περιεχόμεναι γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.

Ἀπὸ τῶν εἰρημένων τοῦ Ἄξονος σημείων Υ, Φ ἐπὶ τὴν ἐπαφὴν Μ ἐπεζεύχθωσαν εὐθεῖαι αἱ ΥΜ, ΦΜ. λέγω, ὅτι αἱ ὑπ' αὐτῶν καὶ τῆς ἐφαπτομένης ΜΒ περιεχόμεναι γωνίαι αἱ ΥΜΒ, ΦΜΒ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ γὰρ ἑκατέρα τῶν ΒΜΗ, ΒΥΗ γωνιῶν ὀρθή ἐστιν, (ζ) ὁ ἄρα διαμέτρῳ τῇ ΒΗ γραφόμενος κύκλος διὰ τῶν Η, Μ, Υ, Β σημείων ἥξει. ὡσαύτως ἐπεὶ ἑκατέρα τῶν ΧΜΗ, ΧΦΗ ὀρθή, ὁ διαμέτρῳ τῇ ΧΗ γραφόμενος κύκλος διὰ τῶν Χ, Μ, Η, Φ ἥξει σημείων. (η) οὐκοῦν ἡ μὲν ΒΗΥ γωνία ἴση τῇ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι ΥΜΒ, ἡ δὲ ΦΜΧ ἴση τῇ αὐτῇ ΒΗΥ, ἤτουν τῇ ΦΗΧ. (θ) ἡ ἄρα ΥΜΒ = ΦΜΧ.

ΣΥ-

(ε) Κατὰ τὴν β΄. τοῦ ι΄. (ζ) Κατὰ τὸ προλ. Λῆμ. (η) Κατὰ τὴν δ΄. Συνέπ. τὴν μετὰ τὴν ή. τοῦ ϛ΄. (θ) Κατὰ τὴν κα΄. τοῦ γ΄.

ΣΥΝΕΠΕΙΑΙ.

Α΄. Τὰ εἰρημένα Υ, Φ σημεῖα ὁρισθήσονται, ἐὰν ἀπὸ τοῦ κέντρου Γ πρὸς ὀρθὰς τῷ ΥΚ Ἄξονι ἀχθῇ ἡ ΓΝ ἴση τῷ ἡμίσει τῆς δευτέρας Διαμέτρου, καὶ τῇ ἐπιζευχθείσῃ ΨΝ ἴση ληφθῇ ἑκατέρα τῶν ΓΥ, ΓΦ. ἐπεὶ γὰρ τὸ $\mathrm{A\Upsilon}.\,\mathrm{\Upsilon\Psi} + \overline{\Gamma\Psi}^2 = \overline{\Gamma\Upsilon}^2$, (ι) ἔστι δὲ ἡ $\Gamma\Upsilon = \Psi\mathrm{N}$, (κ) τὸ ἄρα $\mathrm{A\Upsilon}.\,\mathrm{\Upsilon\Psi} + \overline{\Gamma\Psi}^2 = \overline{\Psi\mathrm{N}}^2$. ἀλλὰ τὸ $\overline{\Psi\mathrm{N}}^2 = \overline{\Gamma\Psi}^2 + \overline{\Gamma\mathrm{N}}^2$. (λ) τὸ ἄρα $\mathrm{A\Upsilon}.\,\mathrm{\Upsilon\Psi} + \overline{\Gamma\Psi}^2 = \overline{\Gamma\Psi}^2 + \overline{\Gamma\mathrm{N}}^2$. ἀφῃρήσθω κοινὸν τὸ $\overline{\Gamma\Psi}^2$. τὸ ἄρα $\mathrm{A\Upsilon}.\,\mathrm{\Upsilon\Psi} = \overline{\Gamma\mathrm{N}}^2$. ἀλλὰ τὸ $\overline{\Gamma\mathrm{N}}^2 = \Psi\mathrm{A}.\,\mathrm{A}\Lambda$. (ἔστι γὰρ ἡ ΓΝ ἴση τῷ ἡμίσει τῆς δευτέρας διαμέτρου ἢ τῆς μέσης ἀναλόγου τῶν ΨΑ, ΑΛ.) ἄρα καὶ τὸ $\mathrm{A\Upsilon}.\,\mathrm{\Upsilon\Psi} = \Psi\mathrm{A}.\,\mathrm{A}\Lambda$. Τὸ ἄρα Υ σημεῖον τὸ ἕτερον τῶν προειρημένων ἢ ἐστί. (μ) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἐπιζευχθείσης τῆς ΑΝ, δειχθήσεται ὅτι τὸ Φ τὸ ἕτερον τῶν σημείων ἐστίν.

Β΄. Ἐκ τούτου δὲ καὶ ἐφαπτομένην ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου Μ τῆς δοθείσης Ὑπερβολῆς ῥᾳδίως ἐστὶν ἀγαγεῖν. ἐὰν γὰρ ἀπὸ τῶν εὑρεθέντων σημείων Υ, Φ ἐπιζευχθῶσιν εὐθεῖαι αἱ ΥΜ, ΦΜ, καὶ ἀχθῇ ἡ ΜΒ δίχα τέμνουσα τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ΥΜΒ, ἡ ΜΒ ἐφαπτομένη ἔσται τῆς Ὑπερβολῆς κατὰ τὸ Μ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Τὰ Υ καὶ Φ σημεῖα, Ἑστίαι ἢ ὀμφαλοὶ τῆς Ὑπερβολῆς καλοῦνται.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ΄.

Ἐὰν ἀπὸ τυχόντος τῆς Ὑπερβολῆς σημείου ἐπὶ τὰς Ἑστίας εὐθεῖαι ἐπιζευχθῶσιν, ἡ ὑπε-

(ι) Κατὰ τὴν ϛ΄. τοῦ β΄. (κ) Ἐξ ὑποθ. (λ) Κατὰ τὴν μζ΄. τοῦ α΄. (μ) Κατὰ τὸ προλ. Λῆμ.

περοχὴ αὐτῶν ἴση ἔσεται τῇ πλαγίᾳ πλευρᾷ.

Ἀπὸ τοῦ τυχόντος τῆς Ὑπερβολῆς σημείου Μ ἐπὶ τὰς Ἑστίας Υ, Φ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΜΥ, ΜΦ. λέγω ὅτι ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν ἴση ἐστὶ τῇ πλαγίᾳ πλευρᾷ ΨΑ, ἤτουν ὅτι ἡ ΥΜ — ΦΜ = ΨΑ. πίν. ΙΑ΄. σχ. 1.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἤχθω ἀπὸ μὲν τοῦ Μ ἡ ΜΤ, ἀπὸ δὲ τῶν Α καὶ Ψ αἱ ΑΧ, ΨΒ ἐφαπτόμεναι τῆς τομῆς. καὶ ἀπὸ τοῦ Γ κέντρου καὶ τῆς ἑτέρας τῶν Ἑστιῶν Υ αἱ ΥΓΝ, ΥΠ παράλληλοι τῇ ΦΜ. καὶ ἀπὸ μὲν τοῦ Τ, καθ᾽ ὃ ἡ διὰ τοῦ κέντρου τῇ ἐφαπτομένῃ ΜΠ συμπίπτει ἐπὶ τὰ Υ, Ψ, Α σημεῖα ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΤΥ, ΤΨ, ΤΑ· ἀπὸ δὲ τοῦ Υ, ἐπὶ τὰ Β, Χ, καθ᾽ ἃ τὴν αὐτὴν ΜΠ αἱ κατὰ κορυφὴν ἁπτόμεναι τέμνουσιν, αἱ ΥΒ, ΥΧ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ γωνία ΥΜΠ = ΦΜΠ. (ν) ἀλλ᾽ ἡ ΦΜΠ = ΜΠΥ. (ξ) ἄρα καὶ ἡ ΥΜΠ = ΜΠΥ. ἡ ἄρα ΥΜ = ΥΠ. (ο) ἐπεὶ δὲ ὡς ΠΤ : ΤΜ :: ΥΝ : ΝΜ, (π) καὶ ὡς ΥΝ : ΝΜ :: ΥΓ : ΓΦ, (ρ) ἄρα καὶ ὡς ΠΤ : ΤΜ :: ΥΓ : ΓΦ. (σ) ἀλλ᾽ ἡ ΥΓ = ΓΦ. (τ) ἄρα καὶ ἡ ΠΤ = ΤΜ. ἐπεὶ οὖν τῶν ΠΥΤ, ΜΥΤ τριγώνων ἡ μὲν ΥΠ = ΥΜ, ἡ δὲ ΠΤ = ΤΜ, ἡ δὲ ΥΤ κοινή, καὶ γωνία ἄρα ἡ ΥΤΠ = ΥΤΜ. (υ) ὀρθὴ ἄρα ἑκατέρα αὐτῶν. (φ) ἔστι δὲ ὀρθὴ καὶ ἡ ΒΨΥ. (χ) ὁ ἄρα διαμέτρῳ τοῦ

(ν) Κατὰ τὴν προλ. πρότ. (ξ) Κατὰ τὴν κθ΄. τοῦ ά. (ο) Κατὰ τὴν δ΄. τοῦ ά. (π) Κατὰ τὴν β΄. τοῦ ς΄. (ρ) Κατὰ τὴν αὐτ. (σ) Κατὰ τὴν ι. τοῦ ι, (τ) Ἐκ τοῦ προλ. Λήμ. δῆλον (υ) Κατὰ τὴν η΄. τοῦ ά. (φ) Κατὰ τὴν ιγ΄. τοῦ ά. (χ) Ἄξων γὰρ ὁ ΤΒ.

τῇ ΥΒ γραφόμενος κύκλος, διὰ τῶν Β, Τ, Ψ, Υ σημείων ἥξει. (ψ) ἔσονται δὲ αἱ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι γωνίαι ΥΒΨ, ΥΤΨ ἴσαι ἀλλήλαις. (ω) ὡσαύτως ἐπειδὴ ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ΥΤΧ, ΥΑΧ, ὁ διαμέτρῳ τῇ ΥΧ γραφόμενος κύκλος, διὰ τῶν Υ, Τ, Α, Χ σημείων ἥξει. καὶ αἱ γωνίαι ΑΥΧ, ΑΤΧ αἱ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται. ἔστι δὲ ἡ ΑΥΧ=ΥΒΨ, (α) ἄρα καὶ ἡ ΥΤΨ=ΑΤΧ. κοινὴ προσκείσθω ἡ ΨΤΧ. ἡ ἄρα ΥΤΧ=ΨΤΑ. ἀλλ' ἡ ΥΤΧ ὀρθή ἐστιν, ὡς δέδεικται, ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ΨΤΑ. ὁ ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ Γ, διαστήματι δὲ ὁποτέρᾳ τῶν ΓΨ, ΓΑ γραφόμενος κύκλος, διὰ τοῦ Τ ἥξει. ἐκοῦν αἱ ΓΨ, ΓΤ, ΓΑ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται. καὶ ἐπεὶ ὡς ΜΠ : ΜΤ :: ΠΥ : ΤΝ· (β) ἔστι δὲ ἡ ΜΠ διπλασία τῆς ΜΤ· ἄρα καὶ ἡ ΠΥ, εἴτουν ἡ ΥΜ διπλασία τῆς ΤΝ. ὡσαύτως ἐπεὶ ὡς ΥΦ : ΥΓ :: ΦΜ : ΓΝ, (γ) ἡ δὲ ΥΦ διπλασία τῆς ΥΓ, καὶ ἡ ΦΜ ἄρα διπλασία τῆς ΓΝ. ἄρα ἡ ΥΜ — ΦΜ διπλασία τῆς ΤΝ—ΓΝ, ἤτοι τῆς ΤΓ, ἢ τῆς ΓΑ. ἀλλὰ καὶ ἡ ΨΑ διπλασία τῆς ΓΑ. ἡ ἄρα ΥΜ—ΦΜ=ΨΑ.

ΣΥΝΕΠΕΙΑΙ.

Α'. Ἔστιν ἄρα συνεχῆ πορίσασθαι σημεῖα, δι' ὧν, δοθείσης τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΒΑ (σχ. 2.) καὶ τοῦ τῶν Ἑστιῶν ἀποστήματος ΥΦ, ἡ Ὑπερβολὴ γραφήσεται. ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Υ εὐθεῖα ἡ ΥΜ τῆς ΒΑ μείζων. καὶ ληφθείσης τῆς ΥΔ ἴσης τῇ ΒΑ, κέντρῳ μὲν τῷ Υ, διαστήματι δὲ τῷ ΥΕ μείζονι τῆς ΥΔ τόξον γεγράφθω τὸ ΘΕΟ, κέντρῳ δὲ τῷ Φ, διαστήματι δὲ τῷ ΕΔ τόξον γεγράφθω τὸ ΗΠ, τέμνον

(ψ) Κατὰ τὴν δ'. Συμπ. τὴν μετὰ τὴν ῃ'. τοῦ ς'. (ω) Κατὰ τὴν κα', τοῦ γ'. (α) Ὅρα τὴν δεῖξ. τοῦ ά. μέρ. τοῦ προλ. Λήμ. (β) Κατὰ τὴν δ'. τοῦ ς'. (γ) Κατὰ τὴν αὐτ.