ΤΜΗΜΑ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

Περὶ τῶν τῆς Ὑπερβολῆς συμπτωμάτων.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α΄. (*)

Ἐὰν ἐν Ὑπερβολῇ εὐθεῖαι ἀχθῶσι τεταγμένως ἐπὶ τὴν Διάμετρον, ἔσαι τὰ αὐτῶν τετράγωνα ὡς τὰ ὀρθογώνια, τὰ ὑπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων ὑπ᾽ αὐτῶν πρὸς τοῖς πέρασι τῆς πλαγίας πλευρᾶς τῆς Ὑπερβολῆς.

Ἔστω Ὑπερβολὴ ἡ ΖΝΜ, ἧς πλαγία πλευρὰ ἡ ΓΝ, καὶ τετάχθωσαν ἐπὶ τὴν Διάμετρον ΝΦ εὐθεῖαι αἱ ΖΦ, ΕΠ. λέγω ὅτι τὰ ἀπ᾽ αὐτῶν τετράγωνά εἰσιν ὡς τὰ ὀρθογώνια ΝΦ. ΦΓ, ΝΠ. ΠΓ. εἴτουν ὅτι ἐστὶν ὡς $\overline{Z\Phi}^2 : \overline{E\Pi}^2 :: N\Phi.\ \Phi\Gamma : N\Pi.\ \Pi\Gamma$. πίν. Β. χ. 4.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἤχθω ἀπὸ τοῦ Π, καθ᾽ ὃ ἡ τεταγμένη τὴν Διάμετρον τέμνει εὐθεῖα ἡ ΡΠΗ τῇ τῆς βάσεως τοῦ Κώνου Διαμέτρῳ ΔΒ παράλληλος.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ἡ μὲν ΡΗ παράλληλός ἐστι τῇ ΔΒ, (α) ἡ δὲ ΕΙ τῇ ΖΜ, (β) καὶ τὸ ἐπίπεδον ἄρα, τὸ διὰ τῶν

ΡΗ,

(*) Τὸ β΄. μέρος ἐστὶ τῆς κα΄. τοῦ α΄. βιβλ τοῦ Ἀπολλων.
(α) Ἐκ τῆς κατασκ. (β) Κατὰ τὸν ιγ΄. ὁρισμ.

ΡΗ, ΕΙ παράλληλόν ἐστι τῷ διὰ τῶν ΔΒ, ΖΜ, ἤτουν τῇ τοῦ Κώνου βάσει ΔΖΒΜ. (γ) τὸ ἄρα διὰ τῶν ΡΗ, ΕΙ ἐπίπεδον, κύκλος ἐστὶν, οὗ Διάμετρος ἡ ΡΗ. (δ) ἐπεὶ δὲ ἡ ΕΙ δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Π, (ε) πρὸς ὀρθὰς ἄρα ἐστὶ τῇ ΡΗ. (ζ) οὐκοῦν τὸ μὲν $\overline{ΖΦ}^2 = ΔΦ.ΦΒ$, τὸ δὲ $\overline{ΕΠ}^2 = ΡΠ.ΠΗ$. (η) ὡς ἄρα $\overline{ΖΦ}^2 : \overline{ΕΠ}^2 :: ΔΦ.ΦΒ : ΡΠ.ΠΗ$. (θ) ἀλλὰ τὸ $ΔΦ.ΦΒ : ΡΠ.ΠΗ$ λόγον ἔχει συγκείμενον (ι) ἔκτε τοῦ λόγου ὃν ἔχει $ΔΦ : ΡΠ$, ἤτοι $ΝΦ : ΝΠ$, (κ) καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει $ΦΒ : ΠΗ$, ἤτουν $ΦΓ : ΠΓ$. (λ) ἄρα καὶ τὸ $\overline{ΖΦ}^2 : \overline{ΕΠ}^2$ λόγον ἔχει συγκείμενον ἔκτε τοῦ λόγου ὃν ἔχει $ΝΦ : ΝΠ$, καὶ $ΦΓ : ΠΓ$. ὡς ἄρα $\overline{ΖΦ}^2 : \overline{ΕΠ}^2 :: ΝΦ.ΦΓ : ΝΠ.ΠΓ$. (μ) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἐν τῇ ἀντικειμένῃ τομῇ ΧΓΥ, ἐστὶν ὡς $\overline{ΥΟ}^2 : \overline{ΘΠ}^2 :: ΓΟ.ΟΝ : ΓΠ.ΠΝ$.

ΣΥΝΕΠΕΙΑ. (ν)

Ἐὰν ὀρθία τῆς Ὑπερβολῆς πλευρὰ ᾖ ἡ ΝΣ, ἤτουν ἡ τετάρτη ἀνάλογος τοῦ ὀρθογωνίου $ΝΦ.ΦΓ$, τοῦ τετραγώνου $\overline{ΖΦ}^2$, καὶ τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΓΝ, (ξ) ἔσεται καὶ πᾶν ἕτερον ὅμοιον ὀρθογώνιον, οἷον τὸ $ΝΠ.ΠΓ$, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Τεταγμένης ΕΠ τετράγωνον, ὡς ἡ πλαγία πλευρὰ ΓΝ, πρὸς τὴν ὀρθίαν ΝΣ. ἐπεὶ γὰρ ὡς $\overline{ΖΦ}^2 : \overline{ΕΠ}^2 :: ΝΦ.ΦΓ : ΝΠ.ΠΓ$, ἤτουν ὡς $ΝΦ.ΦΓ : ΝΠ.ΠΓ :: \overline{ΖΦ}^2 : \overline{ΕΠ}^2$, ἄρα καὶ ἐναλλὰξ ὡς $ΝΦ.ΦΓ : \overline{ΖΦ}^2 :: ΝΠ.ΠΓ : \overline{ΕΠ}^2$. ἀλλ' ὡς $ΝΦ.ΦΓ : \overline{ΖΦ}^2 ::$

(γ) Κατὰ τὴν ιε΄. τοῦ ια΄. (δ) Κατὰ τὸν ις΄. ὁρισμ. (ε) Κατὰ τὸν ζ΄. ὁρισμ. (ζ) Κατὰ τὴν γ΄. τοῦ γ΄. (η) Κατὰ τὴν β΄. Συνέπ. τὴν μετὰ τὴν ή. τοῦ ς΄. (θ) Κατὰ τὴν ά. τοῦ έ. (ι) Κατὰ τὸ Θεώρ. τὸ μετὰ τὴν κγ΄. τοῦ ς΄. (κ) Κατὰ τὴν θ΄. τοῦ ς΄. (λ) Κατὰ τὴν αὐτ. (μ) Κατὰ τὸν ζ΄. ὁρισμ. τοῦ έ. (ν) Τὸ ά. μέρ. ἐστι τῆς κα. τοῦ ά. β΄. τοῦ Ἀπολλων. (ξ) Ὅρα τὸν κα΄. ὁρισμ.

ΓΝ: ΝϚ. (ο) ἄρα καὶ ὡς ΝΠ. ΠΓ : $\overline{ΕΠ}^2$ :: ΓΝ: ΝϚ. (π)

Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσεται, ὅτι κ̀ ἐν τῇ ἀντικειμένῃ τομῇ ἐστὶν ὡς ΓΟ. ΝΟ: $\overline{ΤΟ}^2$ :: ΓΝ : ΝϚ, καὶ ὡς ΓΠ. ΠΝ : $\overline{ΘΠ}^2$ :: ΓΝ : ΝϚ.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Ἔσται δὴ ἓν ἄρα κ̀ ὡς ΝΦ. ΦΓ : $\overline{ΖΦ}^2$ :: ΓΟ. ΟΝ: $\overline{ΤΟ}^2$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Ἐὰν ἡ πλαγία πλευρὰ ΝΓ ἴση ᾖ τῇ ὀρθίᾳ ΝϚ, **Ἰσοσκελὴς** ἡ Ὑπερβολὴ καλεῖται· ἔστι δὲ ἐν αὐτῇ τὸ μὲν ΝΦ. ΦΓ $=$ $\overline{ΖΦ}^2$, τὸ δὲ ΝΠ. ΠΓ $=$ $\overline{ΕΠ}^2$, ὁμοίως καὶ τὸ ΓΟ. ΟΝ $=$ $\overline{ΤΟ}^2$, καὶ τὸ ΓΠ. ΠΝ $=$ $\overline{ΘΠ}^2$· ἐὰν δὲ ἄνισος, **Σκαληνή.**

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β΄.

Ἐν Ὑπερβολῇ τὸ ἀπὸ τῆς Τεταγμένης τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ὀρθογωνίῳ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῆς ὑπ᾽ αὐτῆς ἀποτεμνομένης, καὶ τῆς τετάρτης ἀναλόγου τῆς πλαγίας πλευρᾶς, τῆς ὀρθίας, καὶ τῆς συγκειμένης ἔκτε τῆς πλαγίας κ̀ τῆς ἀποτετμημένης.

Ἔστω Ὑπερβολὴ ἡ ΥΝΜ, (πίν. 7. σχ. 4.) ἧς πλαγία μὲν πλευρὰ ἡ ΨΝ, ὀρθία δὲ ἡ ΝΑ, Τεταγμένη δὲ ἐπὶ τὴν Διάμετρον ἡ ΜΚ. λέγω, ὅτι τὸ $\overline{ΜΚ}^2$ ἴσον ἐστὶ τῷ ὀρθογωνίῳ τῷ ἐκ τῆς ἀποτεμνομένης ΝΚ, καὶ τῆς τετάρτης ἀναλόγου, τῶν ΨΝ, ΝΑ, ΨΚ.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐπεζεύχθω ἡ ΨΑ, καὶ ἐκβεβλήσθω κατὰ τὸ συνεχὲς, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Κ ἡ ΚΓ τῇ ΝΑ παράλληλος.

ΔΕΙ-

(ο) Ἐξ ὑποθ. (π) Κατὰ τὴν ε. τοῦ ε.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὡς τὸ ΝΚ. ΚΨ : $\overline{MK}^2$ :: ΨΝ : ΝΑ. (ϱ) ἀλλ' ὡς ΨΝ : ΝΑ :: ΨΚ : ΚΓ. (σ) ὡς δὲ ΨΚ : ΚΓ :: ΨΚ. ΝΚ : ΚΓ. ΝΚ. (τ) ὡς ἄρα ΝΚ. ΚΨ : $\overline{MK}^2$ :: ΨΚ. ΝΚ : ΚΓ. ΝΚ. (υ) ἀλλὰ τὸ ΝΚ. ΚΨ = ΨΚ. ΚΝ. ἄρα καὶ τὸ $\overline{MK}^2$ = ΚΓ. ΚΝ. (φ) ἔστι δὲ ἡ ΚΓ τετάρτη ἀνάλογος τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΨΝ, τῆς ὀρθίας ΝΑ, καὶ τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς πλαγίας καὶ τῆς Ἀποτετμημένης, εἴτουν τῆς ΨΚ. ἔστι γὰρ ὡς ΨΝ : ΝΑ :: ΨΚ : ΚΓ. (χ) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ $\overline{I\Pi}^2$ = ΝΠ. ΠΒ.

ΣΥΝΕΠΕΙΑΙ.

Α'. Τὸ ἀπὸ τῆς ὁποιασοῦν Τεταγμένης τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῆς Ἀποτετμημένης ὑπ' αὐτῆς καὶ τῆς ὀρθίας πλευρᾶς περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ σὺν τῷ ὑπὸ τῆς αὐτῆς Ἀποτετμημένης καὶ τῆς τετάρτης ἀναλόγου τῆς πλαγίας πλευρᾶς, τῆς ὀρθίας, καὶ τῆς αὐτῆς Ἀποτετμημένης. ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν Α, Β, Γ σημείων αἱ ΑΗ, ΒΔ, ΓΖ τῇ Διαμέτρῳ ΨΚ παράλληλοι, καὶ ἐκβληθεῖσα ἡ ΝΑ συμβαλλέτω αὐταῖς. ἐπεὶ οὖν τὸ $\overline{MK}^2$ = ΝΚ. ΚΓ, ἔστι δὲ τὸ ΝΚ. ΚΓ = ΚΑ + ΗΖ· καὶ ἔστι τὸ μὲν ΚΑ τὸ ὑπὸ τῆς Ἀποτετμημένης ΝΚ καὶ τῆς ὀρθίας πλευρᾶς ΝΑ, τὸ δὲ ΗΖ, τὸ ὑπὸ τῆς ΗΑ, εἴτουν τῆς αὐτῆς ΝΚ, καὶ τῆς ΑΖ, τῆς τετάρτης ἀναλόγου τῶν ΨΝ, ΝΑ, ΖΓ, ἤτοι ΝΚ. (ἔστι γὰρ ὡς ΨΝ : ΝΑ :: ΖΓ : ΑΖ.) τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς τεταγμένης τετράγωνον $\overline{MK}^2$ ἴσον τῷ ΚΑ, τῷ ὑπὸ τῆς Ἀποτετμημένης ΝΚ, καὶ τῆς ὀρθίας ΝΑ σὺν τῷ ὑπὸ τῆς αὐτῆς ἀποτετμημένης ΝΚ, καὶ τῆς ῥηθείσης τετάρτης ἀναλόγου ΑΖ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ $\overline{I\Pi}^2$ = ΠΑ + ΦΔ.

(ϱ) Κατὰ τὴν Συνέπ. τῆς προλ. προτ. (σ) Κατὰ τὴν δ'. τοῦ ϛ'. (τ) Κατὰ τὴν ά. τοῦ ϛ'. (υ) Κατὰ τὴν ί. τοῦ έ. (φ) Κατὰ τὴν ά. τοῦ ί. (χ) Κατὰ τὴν δ'. τοῦ ϛ'.

Β'. Ἀχθείσης ἀπὸ τοῦ Ψ τῆς ΨΛ παραλλήλου τῇ ΝΑ, καὶ ἐκβληθείσης ἕως οὗ συμπέσῃ τῇ ἐκβληθείσῃ ΗΑ, δῆλον ὅτι τὰ ὀρθογώνια ΚΖ, ΠΔ, τὰ ἴσα τοῖς τετραγώνοις $\overline{MK}^2$, $\overline{I\Pi}^2$ ὑπερέχουσι τὰ ὀρθογώνια ΚΑ, ΠΑ τὰ ὑπὸ τῶν Ἀποτετμημένων ΝΚ, ΝΠ καὶ τῆς ὀρθίας πλευρᾶς ΝΑ τοῖς ὀρθογωνίοις ΗΖ, ΦΔ, τοῖς ὁμοίοις ἀλλήλοις τε καὶ τῷ ὀρθογωνίῳ ΝΛ, τῷ ὑπὸ τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΨΝ, καὶ τῆς ὀρθίας ΝΑ περιεχομένῳ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Μήτι γε δὲ ἐκ τούτου ἡ τομὴ Ὑπερβολὴ ἐκλήθη τουτέστιν ἐκ τοῦ τὰ ἀπὸ τῶν τεταγμένων τετράγωνα ὑπερέχειν τὰ ὀρθογώνια, τὰ ὑπὸ τῆς Ἀποτετμημένης καὶ τῆς ὀρθίας πλευρᾶς περιεχόμενα.

Γ'. Ἐὰν ἀπὸ τῆς κορυφῆς Ν ἐπὶ τὰ τῶν εἰρημένων τετάρτων ἀναλόγων ΚΓ, ΠΒ σημεῖα Γ, Β ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΝΓ, ΝΒ, ἔσται τὸ μὲν $\overline{MK}^2$ διπλάσιον τοῦ ΝΚΓ τριγώνου, τὸ δὲ $\overline{I\Pi}^2$, τοῦ ΠΝΒ. τὸ μὲν γὰρ $\overline{MK}^2 = KZ$; τὸ δὲ $\overline{I\Pi}^2 = \Pi\Delta$. ἀλλὰ τὸ μὲν ΚΖ διπλάσιον τοῦ ΝΚΓ, τὸ δὲ ΠΔ τοῦ ΠΝΒ. (ψ) ἄρα καὶ τὸ $\overline{MK}^2$ διπλάσιον τοῦ ΝΚΓ, ὡσαύτως καὶ τὸ $\overline{I\Pi}^2$ τοῦ ΠΝΒ.

Δ'. Δοθείσης τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΨΝ, καὶ τῆς ὀρθίας ΑΝ, γραφήσεται ἡ Ὑπερβολὴ συνεχῶν ὁρισθέντων σημείων. (σχ. 5.) κείσθω γὰρ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΨΝ ἡ ΑΝ. καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΨΑ, ἐκβεβλήσθω κατὰ τὸ συνεχὲς, ὡσαύτως καὶ ἡ ΨΝ. εἰλήφθω δέ τινα σημεῖα ἀπὸ τῆς ΨΦ τὰ Δ, Φ. καὶ ἤχθωσαν αἱ ΔΜ, ΦΘ τῇ ΑΝ παράλληλοι. καὶ ἀπὸ μὲν τῆς ΒΜ εἰλήφθω ἡ ΒΓ = ΒΝ· ἀπὸ δὲ τῆς ΦΘ, ἡ ΖΛ = ΖΝ. καὶ ἐπὶ τῶν ΔΓ, ΦΛ ἡμικύκλια ἀνα-

(ψ) Κατὰ τὴν λδ. τοῦ α.

ἀναγεγράφθω τὰ ΔΚΓ, ΦΙΛ. καὶ εἰλήφθω ἡ μὲν ΒΕ = ΒΚ, ἡ δὲ ΖΗ = ΖΙ. λέγω ὅτι, ἡ Ὑπερβολὴ διὰ τῶν Ε, Η σημείων ἥξει, καὶ διὰ τῶν ἑξῆς ὁμοίως ποριζομένων. ἐπεὶ γὰρ τὸ $\overline{ΒΚ}^2$ = ΔΒ. ΒΓ, (ω) ἐλήφθη δὲ ἡ μὲν ΒΕ = ΒΚ, ἡ δὲ ΒΓ = ΒΝ, τὸ ἄρα $\overline{ΒΕ}^2$ = ΔΒ. ΒΝ, ἤτουν τὸ ἀπὸ τῆς ΕΒ τεταγμένης τετράγωνον ἴσον τῷ ὀρθογωνίῳ τῷ ὑπὸ τῆς Ἀποτετμημένης ΝΒ, καὶ τῆς ΒΔ, τῆς τετάρτης ἀναλόγου τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΨΝ, τῆς ὀρθίας ΝΛ, καὶ τῆς ΨΒ τῆς συγκειμένης ἐκτὸς τῆς πλαγίας καὶ τῆς Ἀποτετμημένης. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ τὸ $\overline{ΗΖ}^2$ = ΝΖ. ΖΦ. δῆλον οὖν, ὅτι διὰ τῶν Ε, Η σημείων ἡ Ὑπερβολὴ ἥξει.

Ε΄. Ἔστι δὲ καὶ διὰ κινήσεως κανόνων τινῶν τὰ αὐτὰ πορίσασθαι τῆς Ὑπερβολῆς σημεῖα. ἐφηρμόσθωσαν γὰρ ἐπὶ τὰ τῆς πλαγίας πλευρᾶς πέρατα Ψ, Ν οἱ ΨΩ, ΝΧ (σχ. 6.) Κανόνες περὶ αὐτὰ κινητοί. καὶ ἀχθείσης ἀπὸ τοῦ τῆς ὀρθίας πέρατος Λ τῆς ΛΗ παραλλήλου τῇ ΨΚ, οὕτω κινείσθωσαν οἱ Κανόνες, ὥστε τὸ ΝΛ μέρος τῆς ὀρθίας πλευρᾶς, τὸ ὑπὸ τοῦ ΨΩ Κανόνος ἀποτεμνόμενον ἴσον εἶναι τῷ ΛΥ, τῷ ὑπὸ τοῦ ΝΧ ἀποτεμνομένῳ. λέγω δὴ ὅτι διὰ τῶν σημείων, καθ' ἃ ἀλλήλους τέμνουσιν οἱ Κανόνες οὕτω κινούμενοι, ἡ Ὑπερβολὴ ἥξει. ἤχθω γὰρ ἀφ' ἑνὸς τοιούτου σημείου τοῦ Μ, ἡ ΜΚ παράλληλος τῇ ΝΛ. καὶ ἐπεὶ τὸ $\overline{ΜΚ}^2$, πρὸς τὸ ΨΚ. ΚΝ λόγον ἔχει συγκείμενον ἔκ τε τοῦ λόγου ὃν ἔχει ΜΚ : ΚΝ, καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ΜΚ : ΨΚ. (α) ἔστι δὲ ὡς μὲν ΜΚ : ΚΝ :: ΝΛ : ΛΥ, (β) ὡς δὲ ΜΚ : ΨΚ :: ΝΛ :

(ω) Κατὰ τὴν β΄. Συνέπ. τῆς η΄. τοῦ ς΄. (α) Κατὰ τὸ Θεώρ. τὸ μετὰ τὴν κγ΄. τοῦ ς΄. (β) Κατὰ τὴν δ΄. τοῦ ς΄.

ΝΛ : ΝΨ· (γ) τὸ ἄρα $\overline{\text{ΜΚ}}^2$ πρὸς τὸ ΨΚ. ΚΝ λόγον ἔχει συγκείμενον ἔκτε τοῦ λόγου ὃν ἔχει ΝΑ : ΑΥ, ἤτουν ΝΑ : ΝΛ, (ἡ γὰρ ΑΥ = ΝΛ. (δ)) καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ΝΛ : ΝΨ. ἤτουν ὡς ΜΚ^2 : ΨΚ. ΚΝ :: ΝΑ. ΝΛ : ΝΛ. ΝΨ. (ε) ἀλλ' ὡς ΝΑ. ΝΛ : ΝΛ. ΝΨ :: ΝΑ : ΝΨ. (ζ) ὡς ἄρα $\overline{\text{ΜΚ}}^2$: ΨΚ. ΚΝ :: ΗΑ : ΝΨ. ὅπερ ἐστὶν, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς τεταγμένης ΜΚ τετράγωνον, πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ ὑπὸ τῆς Ἀποτετμημένης ΝΚ καὶ τῆς ΨΚ τῆς συγκειμένης ἐκ τῆς πλαγίας πλευρᾶς καὶ τῆς Ἀποτετμημένης λόγον ἔχει ὃν ἡ ὀρθία πλευρὰ ΝΑ, πρὸς τὴν πλαγίαν ΝΨ. δῆλον ἄρα, ὅτι διὰ τοῦ Μ ἡ Ὑπερβολὴ ἥξει. (η) ὡσαύτως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ διὰ πάντων τῶν σημείων τῶν ὁμοίως τῷ Μ ποριθέντων ἡ Ὑπερβολὴ διελεύσεται.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ΄.

Τῶν αὐτῶν κειμένων, ἐὰν ἥτε πλαγία πλευρὰ καὶ ἡ ὀρθία δίχα τμηθῶσι, διαχθῇ δέ τις εὐθεῖα διὰ τῶν διχοτομιῶν, Τεταγμένην τέμνουσα, ἔσεται τὸ ἀπὸ τῆς τμηθείσης Τεταγμένης τετράγωνον διπλάσιον τοῦ τετραπλεύρου τοῦ περατουμένου ὑπὸ τῆς ῥηθείσης εὐθείας, τοῦ ἡμίσεος τῆς ὀρθίας πλευρᾶς, τοῦ τμήματος τῆς Τεταγμένης, καὶ τῆς ὑπ' αὐτῆς Ἀποτεμνομένης.

Τετμη-

(γ) Κατὰ τὴν ἀντ. (δ) Ἐκ τῆς κατασκ. (ε) Κατὰ τὸν ζ. ὁρισμ. τοῦ ε. (ζ) Κατὰ τὴν α. τοῦ ς. (η) Ὅρα τὴν Σχολ. τὴν μετὰ τὴν α. τοῦδε τοῦ τμήμ.

Τετμήσθω δίχα ἥτε πλαγία πλευρὰ ΨΝ, καὶ ἡ ὀρθία ΝΑ, καὶ διαχθεῖσα ἡ ΓΕ εὐθεῖα διὰ τῶν Γ καὶ Ε διχοτομιῶν, τεμνέτω τὴν ΚΒ τεταγμένην κατὰ τὸ Δ. λέγω, ὅτι τὸ $\overline{ΒΚ}^2$ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ΔΕΝΚ τετραπλεύρου. πίν. Η. σχ. 1.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ὡς ΝΓ : ΓΨ :: ΝΕ : ΕΑ, (θ) ἡ ἄρα ΔΓ παράλληλος τῇ ΨΡ. (ι) ὡς ἄρα ΝΓ : ΓΨ :: ΝΦ : ΦΡ. (κ) ἀλλ' ἡ ΝΓ = ΓΨ, (λ) καὶ ἡ ΝΦ ἄρα ἴση τῇ ΦΡ. (μ) ἔχουσι δὲ τὰ τρίγωνα ΦΕΝ, ΦΡΔ καὶ τὰς πρὸς τῷ Φ γωνίας ἴσας, (ν) καὶ τὰς λοιπὰς, (ξ) ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἴσα ἄρα εἰσί. (ο) κοινὸν αὐτοῖς προσκείσθω τὸ ΝΦΔΚ τετράπλευρον, τὸ ἄρα ΝΕΔΚ τετράπλευρον ἴσον τῷ ΝΡΚ τριγώνῳ. ἀλλὰ τῷ $\overline{ΒΚ}^2$ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ΝΡΚ τριγώνου, (π) διπλάσιον ἄρα ἐστὶ καὶ τοῦ ΝΕΔΚ τετραπλεύρου. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ $\overline{ΠΛ}^2$ διπλάσιον τοῦ ΝΕΤΛ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Ἡ μὲν ΨΑ ἢ τὸ πέρας τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΨΝ καὶ τὸ τῆς ὀρθίας ΝΑ ἐπιζευγνῦσα, Διευθετοῦσα καλεῖται· ἡ δὲ ΓΕ, ἡ διὰ τῶν διχοτομιῶν αὐτῶν διηγμένη, Ὑποδιευθετοῦσα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'. (ρ)

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τῆς δοθείσης Ὑπερβολῆς εὐθεῖαν ἁπτομένην ἀγαγεῖν.

(θ) Ἐκ τῆς ὑποθ. δῆλον. (ι) Κατὰ τὴν β'. τοῦ ς'. (κ) Κατὰ τὴν αὐτ. (λ) Ἐξ ὑποθ. (μ) Κατὰ τὴν η'. τοῦ ι'. (ν) Κατὰ τὴν ιε'. τοῦ α'. (ξ) Κατὰ τὴν κθ'. τοῦ α'. (ο) Κατὰ τὴν κς'. τοῦ α'. (π) Κατὰ τὴν γ'. Συνέπ. τῆς προλαβ. προτ. (ρ) Ἡ λβ', καὶ λδ', ἐστὶ τοῦ α'. βιβλ. τοῦ Ἀπολλων.

Ἔςω πρῶτον δοθὲν σημεῖον τῆς ΑΜ Ὑπερβολῆς τὸ κατὰ κορυφὴν Α. χ. 2.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἤχθω ἀπὸ τȣ͂ Α ἡ ΑΩ παράλληλός τινι τῶν τεταγμένων, οἷον τῇ εη. λέγω δὴ ὅτι ἡ ΑΩ ἐκτὸς τῆς τομῆς πίπτει. δειχθήσεται δὲ τȣ͂το καθάπερ ϗ ἐν τῇ Παραβολῇ δέδεικται. (σ)

Ἀλλὰ δὴ μὴ ἔςω ἐπὶ τῆς κορυφῆς τὸ δοθὲν σημεῖον, οἷόν ἐςι τὸ Μ.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἤχθω ἀπὸ τȣ͂ Μ τεταγμένως ἐπὶ τὴν Διάμετρον ΨΥ ἡ ΜΠ, καὶ ἐκβληθεῖσα συμπιπτέτω τῇ Ὑποδιευθετέσῃ ΓΘ κατὰ τὸ Ζ. καὶ τρίτη ἀναλόγῳ τῶν ΖΠ, ΠΜ εὑρεθεῖσῃ ἴσῃ εἰλήφθω ἀπὸ τῆς ΠΨ ἡ ΠΤ. ϗ ἐπεζεύχθω ἡ ΤΜ. λέγω, ὅτι ἡ ΤΜ καθ᾽ ἓν μόνον σημεῖον ἐφάπτεται τῆς τομῆς. ἐφαπτέσθω γάρ, εἰ δυνατὸν, καὶ κατὰ τὸ Δ. ἐπεζεύχθω δὲ ἡ ΤΖ, καὶ ἀπὸ τȣ͂ Δ ἤχθω ἡ ΔΗΦ παράλληλος τῇ ΜΠ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ὡς $ΖΠ : ΠΜ :: ΠΜ : ΠΤ$, (τ) τὸ ἄρα $\overline{ΠΜ}^2 = ΖΠ . ΠΤ$. (φ) ἀλλὰ τὸ $ΖΠ . ΠΤ$ διπλάσιόν ἐςι τȣ͂ ΖΠΤ τριγώνȣ. (χ) καὶ τὸ $\overline{ΠΜ}^2$ ἄρα διπλάσιόν ἐςι τȣ͂ ΖΠΤ. ἀλλὰ τὸ $\overline{ΠΜ}^2$ καὶ τȣ͂ ΑΡΖΠ τετραπλεύρȣ διπλάσιόν ἐςι. (ψ) τὸ ἄρα $ΖΠΤ = ΑΡΖΠ$. ἀφῃρήσθω ἀπὸ μὲν τȣ͂ ΖΠΤ τὸ ΖΛΗΠ τετράπλευρον, ἀπὸ δὲ τȣ͂ ΑΡΖΠ τὸ ΖΦΗΠ, τὸ μεῖζον τȣ͂ ΖΛΗΠ. λοιπὸν ἄρα τρίγωνον τὸ ΛΤΗ μεῖζον λοιπȣ͂ τετραπλεύρȣ τȣ͂ ΑΡΦΗ.

(σ) Ὅρα τὴν δ΄. πρότ. τȣ͂ ά. τμήμ. (τ) Ἐκ τῆς κατασκ. (φ) Κατὰ τὴν ιζ΄. τȣ͂ ς΄. (χ) Κατὰ τὴν μά. τȣ͂ ά. (ψ) Κατὰ τὴν προλαβ. πρότ.

ΑΡΦΗ. ἐπεὶ δὲ ὡς ΠΤΜ : ΗΤΔ :: $\overline{\text{ΠΤ}}^2 : \overline{\text{ΗΤ}}^2$, ὡσαύτως, ὡς ΠΤΖ : ΗΤΛ :: $\overline{\text{ΠΤ}}^2 : \overline{\text{ΗΤ}}^2$, (ω) ἄρα καὶ ὡς ΠΤΜ : ΗΤΔ :: ΠΤΖ : ΗΤΛ. (α) ἀλλ' ὡς ΠΤΜ : ΗΤΔ :: $\overline{\text{ΠΜ}}^2 : \overline{\text{ΗΔ}}^2$. (β) ἄρα καὶ ὡς $\overline{\text{ΠΜ}}^2 : \overline{\text{ΗΔ}}^2$ :: ΠΤΖ : ΗΤΛ. (γ) ἀλλὰ τὸ $\overline{\text{ΠΜ}}^2$ διπλάσιον δέδεικται τοῦ ΠΤΖ. ἄρα καὶ τὸ $\overline{\text{ΗΔ}}^2$ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ΗΤΛ. ἀλλὰ τὸ ΗΤΛ μεῖζον τοῦ ΑΡΦΗ, ὡς δέδεικται, τὸ ἄρα $\overline{\text{ΗΔ}}^2$ μεῖζον τοῦ διπλασίου τοῦ ΑΡΦΗ. ἀλλὰ τὸ αὐτὸ $\overline{\text{ΗΔ}}^2$ καὶ ἴσον ἐστὶ τῷ διπλασίῳ τοῦ ΑΡΦΗ. (δ) μεῖζον ἄρα καὶ ἴσον, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ΤΜ ἐφάπτεται τῆς τομῆς κατὰ τὸ Δ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσεται, ὅτι οὐδὲ κατὰ ἄλλο σημεῖον ἐφάπτεται, πλὴν τοῦ Μ.

ΣΗΝΕΠΕΙΑΙ.

Α'. Ἐντεῦθεν πολλαὶ πορίζονται μέθοδοι τοῦ ἐφαπτομένην ἄγειν ἀπὸ τοῦ δοθέντος τῆς Ὑπερβολῆς σημείου. ἐὰν γὰρ ἀπὸ τοῦ Ἄξονος ΨΥ ληφθῇ ἡ ΠΥ ἴση τῇ ΠΖ, ἔσεται καὶ ὡς ΥΠ : ΠΜ :: ΠΜ : ΠΥ. οὐκοῦν ἡ ΥΜΤ γωνία ὀρθή ἐστι. (ε) ἀχθήσεται ἄρα ἐφαπτομένη τῆς Ὑπερβολῆς, ἐὰν ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου Μ ταχθεῖσα ἐπὶ τὸν Ἄξονα ἡ ΜΠ, ἐκβληθεῖσα συμπέσῃ τῇ Ὑποδιευθετούσῃ κατὰ τὸ Ζ· ληφθῇ δὲ τῇ ΖΠ ἴση ἡ ΠΥ, καὶ τῇ ἐπιζευχθείσῃ ΥΜ πρὸς ὀρθὰς ἀχθῇ εὐθεῖα ἡ ΜΤ. αὕτη γὰρ ἐφάπτεται τῆς τομῆς.

Β'. Συμπεσούσης τῆς ΜΖ τῇ Διευθετούσῃ ΨΝ ἐκβληθείσῃ, κατὰ τὸ Ο, ἔσεται τὸ $\overline{\text{ΜΠ}}^2 =$ ΑΠ. ΠΟ. (ζ) ἀλλὰ τὸ $\overline{\text{ΜΠ}}^2 =$ ΖΠ. ΠΤ. (η) ἄρα καὶ τὸ ΑΠ.

(ω) Κατὰ τὴν ιθ'. τοῦ ϛ'. (α) Κατὰ τὴν ε'. τοῦ ε'. (β) Κατὰ τὴν ιθ'. τοῦ ϛ'. (γ) Κατὰ τὴν αἰρημ. ε'. (δ) Κατὰ τὴν προλαβ. πρότ. (ε) Κατὰ τὴν γ'. Συνέπ. τῆς η' τοῦ ϛ'. (ζ) Κατὰ τὴν β'. τοῦδε τοῦ τμήμ. (η) Ἐκ τῆς κατασκ.

ΠΟ = ΖΠ. ΠΤ. ὡς ἄρα ΖΠ :: ΠΟ :: ΑΠ : ΠΤ. (θ) ἄξεις ἄρα τῆς τομῆς ἐφαπτομένην, ἐὰν ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου Μ, ἀγαγὼν τεταγμένην τὴν ΜΠ, καὶ ἐκβαλὼν αὐτὴν κατὰ τὸ συνεχὲς, καὶ εὑρὼν τετάρτην ἀνάλογον τῶν ΖΠ, ΠΟ, τῶν μεταξὺ τῆς Ὑποδιευθετούσης καὶ Διευθετούσης καὶ Διαμέτρου, καὶ τῆς Ἀποτετμημένης ΑΠ, ἴσην αὐτῇ τῇ εὑρεθείσῃ λάβῃς τὴν ΠΤ, καὶ ἀπὸ τοῦ Τ ἐπὶ τὸ δοθὲν σημεῖον Μ ἐπιζεύξῃς τὴν ΜΤ. καὶ γὰρ ἡ ΜΤ ἔσεται ἡ ἐφαπτομένη.

Γ′. Ἐπεὶ δὲ ὡς ΖΠ : ΠΟ :: ΑΠ : ΠΤ, ἄρα καὶ ἀνάπαλιν ὡς ΠΟ : ΖΠ :: ΠΤ : ΑΠ, καὶ διαιρεθέντα ὡς ΖΟ : ΖΠ :: ΤΑ : ΑΠ, καὶ ἀνάπαλιν ὡς ΖΠ : ΖΟ :: ΑΠ : ΤΑ. ἐὰν ἄρα τῆς εἰρημένης ΖΠ, καὶ τοῦ ἡμίσεως τῆς ὀρθίας πλευρᾶς ΖΟ, (ἡ ΖΟ = ΝΡ. (ι)) καὶ τῆς Ἀποτετμημένης ΑΠ τετάρτη ἀνάλογος εὑρεθῇ, καὶ ληφθῇ αὐτῇ ἴση ἡ ΑΤ, ἡ ἀπὸ τοῦ Τ ἐπὶ τὸ δοθὲν σημεῖον Μ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ΤΜ ἐφάψεται τοῦ εἴδους.

Δ′. Ἐπεὶ ἡ ΖΟ = ΝΡ = ΡΑ, ἐστὶν ἄρα ὡς ΖΠ : ΡΑ :: ΑΠ : ΑΤ. ἀλλ᾽ ὡς ΖΠ : ΡΑ :: ΓΠ : ΓΑ, (κ) ἄρα καὶ ὡς ΓΠ : ΓΑ :: ΑΠ : ΑΤ. (λ) καὶ ἐναλλὰξ ὡς ΓΠ : ΑΠ :: ΓΑ : ΑΤ. καὶ κατὰ ἀναστροφὴν ~~λό~~γου, ὡς ΓΠ : ΓΑ :: ΓΑ : ΓΤ. τὸ ἄρα ΓΑ^2 = ΠΓ. ΓΤ. (μ) ἐὰν οὖν εὑρεθῇ τρίτη ἀνάλογος τῆς ΠΓ, τῆς ἐκ τοῦ ἡμίσεως ΓΑ τῆς πλαγίας πλευρᾶς καὶ τῆς Ἀποτετμημένης ΑΠ συγκειμένης, καὶ αὐτοῦ τοῦ ἡμίσεως ΓΑ τῆς πλαγίας ΨΑ, καὶ ἴση τῇ εὑρεθείσῃ ληφ-

(θ) Κατὰ τὴν ιϛ′. τοῦ ϛ′. (ι) Κατὰ τὴν λδ′. τοῦ α′. (κ) Κατὰ τὴν δ′. τοῦ ϛ′. (λ) Κατὰ τὴν ι′ τοῦ ε′. (μ) Κατὰ τὴν ιζ′. τοῦ ϛ′.

ληφθῇ ἡ ΓΤ, ἡ ἀπὸ τοῦ Τ ἐπὶ τὸ δοθὲν σημεῖον Μ ἐπιζευγνυμένη ἐφάψεται τῆς τομῆς.

Ε΄. Τὸ $ΓΛ^2 = ΠΓ.\ ΓΤ$. (ν) ἐὰν οὖν τούτων ἑκάτερον ἀπὸ τοῦ $ΓΠ^2$ ἀφέλῃς, τὰ λοιπὰ ἴσα ἔσονται, εἴτουν τὸ $ΨΠ.\ ΠΑ = ΓΠ.\ ΠΤ$. (ξ) ὡς ἄρα ΓΠ : ΨΠ :: ΠΑ : ΠΤ. οὐκοῦν ἐὰν τετάρτη ἀνάλογος εὑρεθῇ τῆς ΓΠ, τῆς ἐκ τοῦ τῆς πλαγίας πλευρᾶς ἡμίσεως ΓΑ καὶ τῆς Ἀποτετμημένης ΑΠ συγκειμένης, καὶ τῆς ΨΠ τῆς ἐκ τῆς πλαγίας ΨΑ καὶ τῆς αὐτῆς Ἀποτετμημένης συγκειμένης, καὶ τῆς ΑΠ Ἀποτετμημένης, καὶ ἴση τῇ εὑρεθείσῃ ληφθῇ ἡ ΠΤ, ἡ ἀπὸ τοῦ Τ ἐπὶ τὸ δοθὲν σημεῖον Μ ἐπιζευγνυμένη, τῆς Ὑπερβολῆς ἐφάψεται.

ς΄. Ὁ λόγος ὃν ἔχει ἡ ΠΤ πρὸς τὴν ΤΑ σύγκειται ἐκ τοῦ λόγου ὃν ἔχει ἡ ΠΨ : ΨΑ, καὶ ἐκ τοῦ διπλασίου, εἴτουν ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ὁ 2 : 1. ἐπεὶ γὰρ ὡς ΠΟ : ΠΖ :: ΠΤ : ΠΑ, (ο) ἄρα καὶ κατὰ ἀναστροφὴν λόγου ὡς ΠΟ : ΖΟ :: ΠΤ : ΤΑ, ἤτοι ὡς ΠΟ : ΡΑ :: ΠΤ : ΤΑ. ἀλλ' ἡ ΠΟ πρὸς τὴν ΡΑ λόγον ἔχει συγκείμενον ἔκτε τοῦ λόγου ὃν ἔχει ΠΟ : ΑΝ, καὶ ΑΝ : ΡΑ. (π) ἔστι δὲ ὡς μὲν ΠΟ : ΑΝ :: ΠΨ : ΨΑ, (ρ) ὡς δὲ ΑΝ : ΡΑ :: 2 : 1. ἄρα καὶ ὁ λόγος ὃν ἔχει ἡ ΠΤ : ΤΑ σύγκειται ἐκ τοῦ λόγου ὃν ἔχει ἡ ΠΨ : ΨΑ, καὶ τοῦ ὃν ἔχει ὁ 2 : 1. εἴτουν ὡς ΠΤ : ΤΑ :: 2ΠΨ : ΤΑ. (σ)

Ζ΄. Ἐὰν ἀπὸ τῆς κορυφῆς Α τῆς Ὑπερβολῆς ἐφαπτομένη ἀχθῇ ἡ ΑΧΩ, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου τῆς ἀφῆς

Μ

(ν) Κατὰ τὴν προλ. Συνέπ. (ξ) Ἐκ τῆς ς΄, καὶ β΄. τοῦ β΄. δῆλον. (ο) Ὅρα τὴν προλ. γ΄. Συνέπ. (π) Κατὰ τὸ ά. πόρισ. τὸ μετὰ τὴν ή. τοῦ έ. (ρ) Κατὰ τὴν δ΄. τοῦ ς΄. (σ) Κατὰ τὸν ζ΄. ὁρισ. τοῦ έ.

Μ ἐπὶ τὸ πέρας Ψ τῆς πλαγίας πλευρᾶς ἐπιζευχθῇ ἡ ΜΨ, τὸ ὑπ' αὐτῆς ἀπολαμβανόμενον μέρος ΑΩ τῆς κατὰ κορυφὴν ἁπτομένης δίχα τμηθήσεται κατὰ τὸ Χ ὑπὸ τῆς μὴ κατὰ κορυφὴν ἐφαπτομένης ΜΤ. ἐπεὶ γὰρ ὡς ΠΜ: ΑΧ :: ΠΤ : ΤΑ· (τ) ἡ δὲ ΠΤ : ΤΑ λόγον ἔχει συγκείμενον ἔκτε τῦ λόγε ὃν ἔχει ἡ ΠΨ: ΨΑ, καὶ ἐκ τῦ 2 : 1· (υ) ἄρα καὶ ἡ ΠΜ : ΑΧ λόγον ἔχει συγκείμενον ἔκτε τῦ ὃν ἔχει ἡ ΠΨ: ΨΑ, καὶ ἐκ τῦ 2 : 1. ἀλλ' ἡ ΠΜ : ΑΧ λόγον ἔχει συγκείμενον ἐκ τῦ ὃν ἔχει ἡ ΠΜ: ΑΩ, καὶ ἡ ΑΩ: ΑΧ. (φ) ἔστι δὲ ὁ εἷς τῶν συντιθέντων λόγων ἴσος τῷ ἑνί· ἔστι γὰρ ὡς ΠΨ: ΨΑ :: ΠΜ : ΑΩ· (χ) καὶ ὁ ἕτερος ἄρα ἴσος τῷ ἑτέρῳ, εἴτεν ὡς ΑΩ: ΑΧ :: 2 : 1. ἐκεῖν ἡ ΑΩ διπλασία τῆς ΑΧ. ἡ ἄρα ΑΩ δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Χ ὑπὸ τῆς ΜΤ. ἄξεις ἂν ἐφαπτομένην ἀπὸ τῦ δοθέντος σημείε Μ, ἐὰν ἀπ' αὐτῦ ἐπὶ τὸ τῆς πλαγίας πλευρᾶς πέρας Ψ ἐπιζεύξας τὴν ΨΜ, δίχα τέμῃς τὸ ὑπ' αὐτῆς ἀπολαμβανόμενον τῆς κατὰ κορυφὴν ἐφαπτομένης μέρος ΑΩ κατὰ τὸ Χ, καὶ ἀπὸ τῦ Χ ἐπὶ τὸ Μ ἐπιζεύξῃς τὴν ΧΜ.

Η'. Τὸ σημεῖον Τ, καθ' ὃ ἡ ἐφαπτομένη ΜΤ τὴν πλαγίαν πλευρὰν ΨΑ τέμνει, μεταξὺ κεῖται τῦ κέντρε Γ, καὶ τῆς Α κορυφῆς. ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ ἐφαπτομένη ΜΤ, καὶ συμπιπτέτω κατὰ τὸ Β τῇ ΨΚ, τῇ ἀπὸ τῦ Ψ ἀχθείσῃ τῇ ΑΩ παραλλήλῳ. καὶ καὶ ἐπεὶ ὡς ΨΤ: ΤΑ :: ΨΒ : ΑΧ, (ψ) ἔστι δὲ ἡ ΑΧ

(τ) Κατὰ τὴν δ'. τῦ ς'. (υ) Κατὰ τὴν προλ. Συνέκ. (φ) Κατὰ τὸ ἀρημ. πόρισ. (χ) Κατὰ τὴν δ'. τῦ ς'. (ψ) Κατὰ τὴν δ'. τῦ ς'.

ΑΧ = ΧΩ. ἐκεῖν καὶ ὡς ΨΤ : ΤΑ : : ΨΒ : ΧΩ. ἀλλ' ὡς μὲν ΨΒ : ΧΩ : : ΨΜ : ΜΩ, ὡς δὲ ΨΜ : ΜΩ : : ΨΠ : ΠΑ. (ω) ἄρα καὶ ὡς ΨΤ : ΤΑ : : ΨΠ : ΠΑ. (α) ἀλλ' ἡ ΨΠ μείζων τῆς ΠΑ, ἄρα καὶ ἡ ΨΤ μείζων τῆς ΤΑ. τὸ ἄρα Τ σημεῖον μεταξὺ τῦ κέντρυ Γ καὶ τῆς κορυφῆς Α κεῖται.

Θ'. Ἔστι δὲ καὶ ὡς ΨΒ : ΑΧ : : ΨΠ : ΠΑ. ἐπεὶ γὰρ ὡς ΨΤ : ΤΑ : : ΨΒ : ΑΧ, καὶ ὡς ΨΤ : ΤΑ : : ΨΠ : ΠΑ, (β) ἄρα καὶ ὡς ΨΒ : ΑΧ : : ΨΠ : ΠΑ. (γ)

Ι'. Ἐὰν ἀπὸ τῆς ἐπαφῆς Μ ἐπὶ τῆς κορυφῆς Α ἐπιζευχθῇ ἡ ΜΑ, καὶ ἐκβληθεῖσα συμπέσῃ τῇ ΨΚ, τῇ κατὰ κορυφὴν ἐφαπτομένῃ τῆς ἀντικειμένης τομῆς, (ἐπεὶ γὰρ ἀπὸ τῦ Ψ ἤχθη ἡ ΨΚ παράλληλος τῇ ΑΩ, (δ) ἤτυν ταῖς τεταγμέναις ΜΠ, ΕΗ, ἐφαπτομένη ἐστὶν ἡ ΨΚ κατὰ κορυφὴν τῆς ἀντικειμένης τομῆς. (ε)) τὸ ἀπολαμβανόμενον ὑπ' αὐτῆς ἀπὸ τῆς ΨΚ μέρος δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης ΜΤ κατὰ τὸ Β. ἐπεὶ γὰρ ὡς ΒΨ : ΧΩ : : ΒΜ : ΜΧ, (ζ) καὶ ὡς ΒΜ : ΜΧ : : ΚΒ : ΑΧ, (η) ἄρα καὶ ὡς ΒΨ : ΧΩ : : ΚΒ : ΑΧ. (θ) ἀλλ' ἡ ΧΩ = ΑΧ. (ι) ἄρα καὶ ἡ ΒΨ = ΚΒ. (κ) ἡ ἄρα ΚΨ δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Β.

ΙΑ'. Τὸ ὀρθογώνιον, τὸ ὑπὸ τῶν κατὰ κορυφὴν ἐφαπτομένων ΨΚ, ΑΩ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΨΑ, καὶ τῆς ὀρθίας ΑΝ περιχομένῳ ὀρθογωνίῳ. ἤτυν τὸ ΨΚ. ΑΩ = ΨΑ. ΑΝ. ἐπεὶ γὰρ ὡς ΟΠ :

(ω) Κατὰ τὴν αὐτ. (α) Κατὰ τὴν ε' τῦ ε'. (β) Ὅρα τὴν προλ. Συνέπ. (γ) Κατὰ τὴν ἀρημ. ε'. (δ) Ὅρα τὴν προλ. η'. Συνέπ. (ε) Ὅρα τὸ α'. μέρ. τῆς προκειμ. προτ. (ζ) Κατὰ τὴν δ'. τῦ ς'. (η) Κατὰ τὴν αὐτ. (θ) Κατὰ τὴν ἀρημ. ε'. (ι) Κατὰ τὴν προλ. ζ'. Συνέπ. (κ) Κατὰ τὴν κ'. τῦ ε'.

ΟΠ : ΠΜ : : ΠΜ : ΑΠ, (λ) ἔϛι δὲ ὡς μὲν ΟΠ : ΠΜ : : ΑΝ : ΑΩ, ὡς δὲ ΠΜ : ΑΠ : : ΚΨ : ΨΑ, (μ) ἄρα καὶ ὡς ΨΚ : ΨΑ : : ΑΝ : ΑΩ. (ν) τὸ ἄρα ΨΚ. ΑΩ = ΨΑ. ΑΝ. (ξ) δῆλον δὲ ἐκ τέτȣ ὅτι τὸ ΨΒ. ΑΧ, ἤτȣν τὸ ὑπὸ τῶν ἡμίσεων τῶν κατὰ κορυφὴν ἐφαπτομένων τῶν ἀντικειμένων τομῶν ἴσον ἐϛὶ τεταρτημορίῳ τȣ̃ ὑπὸ τῆς πλαγίας ΨΑ, καὶ τῆς ὀρθίας ΑΝ περιεχομένȣ ὀρθογωνίȣ.

ΘΕΩΡΗΜΑ. (ο)

Εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς Ὑπερβολῆς, καὶ τῆς κατὰ κορυφὴν ἐφαπτομένης αὐτῆς ἑτέρα εὐθεῖα ȣ̓ περεμπεσεῖται.

Ἐφαπτέσθω ἡ ΑΓ τῆς ΗΑΙ Ὑπερβολῆς κατὰ κορυφήν. λέγω, ὅτι εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς ΑΓ εὐθείας καὶ τῆς τομῆς ΗΑ ἑτέρα εὐθεῖα ȣ̓ παρεμπεσεῖται. παρεμπιπτέτω γὰρ, εἰ δυνατὸν, ἡ ΑΔ. Σχ. 3.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἀπὸ τȣ̃ τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΑΒ πέρατος Β ἐπὶ τὸ τῆς ὀρθίας Ζ, τῆς παραλλήλȣ ταῖς τεταγμέναις κειμένης, ἐπεζεύχθω ἡ ΒΖ, καὶ ἐκβεβλήσθω κατὰ τὸ συνεχές. καὶ ἀπό τινος σημείȣ Δ τῆς ΑΔ τεταγμένως ἐπὶ τὴν Διάμετρον καταχθεῖσα ἡ ΔΕ, ὁμοίως ἐκβεβλήσθω. καὶ τρίτη ἀναλόγῳ τῶν ΑΕ, ΔΕ εὑρεθείσῃ εἰλήφθω ἴση ἡ ΕΝ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΝ τὴν ΒΖ τέμνȣσα κατὰ τὸ Ξ. καὶ ἀπὸ τȣ̃ Ξ ἤχθω ἡ ΞΘΚ παράλληλος τῇ ΑΖ.

ΔΕΙ-

(λ) Κατὰ τὴν β΄. τȣ̃ δε τȣ̃ τμήμ. (μ) Κατὰ τὴν δ΄. τȣ̃ ϛ΄. (ν) Κατὰ τὴν ἀριθμ. ε΄. (ξ) Κατὰ τὴν ιϛ΄. τȣ̃ ϛ΄. (ο) Μέρος ἐϛὶ τῆς λβ΄. προτ. τȣ̃ α. βιβλ. τȣ̃ Ἀπολλων.

ΠΕΡΙ ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ὡς ΝΕ : ΔΕ :: ΔΕ : ΑΕ, (π) ἄρα ΝΕ : ΑΕ : $\overline{\Delta E}^2$: $\overline{AE}^2$. (ρ) ἀλλ᾽ ὡς ΝΕ : ΑΕ :: Δ (σ) ὡς ἄρα ΞΘ : ΑΘ :: $\overline{\Delta E}^2$: $\overline{AE}^2$. (τ) ἐπεὶ ὡς ΔΕ : ΑΕ :: ΚΘ : ΑΘ, (υ) ἔστιν ἄρα καὶ $\overline{AE}^2$ :: $\overline{K\Theta}^2$: $\overline{A\Theta}^2$. (φ) διὸ δὴ καὶ ὡς ΞΘ $\overline{K\Theta}^2$: $\overline{\Lambda\Theta}^2$. (χ) ὡς ἄρα ΞΘ : ΚΘ :: ΚΘ : οὐκοῦν τὸ $\overline{K\Theta}^2$ = ΞΘ. ΘΑ. (ω) ἀλλὰ καὶ τ ΞΘ. ΛΘ. (α) τὸ ἄρα $\overline{K\Theta}^2$ = $\overline{\Lambda\Theta}^2$. ὅπερ ἀ ἄρα εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς ΑΓ εὐθείας ΑΗ Ὑπερβολῆς εὐθεῖά τις παρεμπεσεῖται.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Ἰστέον ὅτι καμπύλην μὲν γραμμὴν οὐδὲν ἄτι πίπτειν μεταξὺ τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῆς τομ θεῖαν δὲ, ἀμήχανον. τεμεῖ γὰρ αὐτὴ τὴν τομὴν οὐκ ἐφάψεται. τοῦτο δὲ καὶ περὶ τῆς Παραβολῆς τῆς Ἐλλείψεως, οὐ μὴν ἀλλὰ καὶ περὶ τοῦ κύκλου ῥητέ

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε΄. (β)

Ἐὰν ἐν Ἀντικειμέναις εὐθεῖα ἀχθῇ ἐφ᾽ ἑκάτερα τοῦ κέντρου συμπίπτουσα τῇ τομῇ, δίχα τμηθήσεται κατὰ τὸ κέντρον· αἱ δὲ ἀπὸ τῶν συμπτώσεων ἀχθεῖσαι ἐφαπτόμεναι τῆς τομῆς, καὶ τῇ Διαμέτρῳ συμπίπτουσαι

(π) Ἐκ τῆς κατασκ. (ρ) Κατὰ τὸ β΄. πόρισ. τὸ μετὰ τὴν ή. τοῦ έ. (σ) Κατὰ τὴν δ΄ τοῦ ς΄. (τ) Κατὰ τὴν έ. τοῦ έ. (υ) Κατὰ τὴν δ΄. τοῦ ς΄. (φ) Κατὰ τὸ ζ΄. Θεώρημ. τῶν μετὰ τὸ έ. (χ) Κατὰ τὴν εἰρημ. έ. (ψ) Ἐκ τοῦ εἰρημ. πορίσ. δῆλον. (ω) Κατὰ τὴν ιζ΄. τοῦ ς΄. (α) Κατὰ τὴν β΄. τοῦδε τοῦ τμήτ. (β) Τὸ ά. μέρ. τῆς λ΄. πρότ. ἐστὶ τοῦ ά. βιβλ. τοῦ Ἀπολ.

τε ἀλλήλαις καὶ παράλληλοι ἔσον·

σαν Ἀντικείμεναι Ὑπερβολαὶ αἱ ΑΜ, ΨΝ, καὶ ἡ ΜΝ ἐφ' ἑκάτερα τοῦ κέντρου Γ, συμπιπτέτω ...ς κατὰ τὰ Μ καὶ Ν σημεῖα. ἤχθωσαν δὲ ἀπὸ ... σημείων ἐφαπτόμεναι αἱ ΜΤ, ΝΗ, τῇ Διαπίπτουσαι κατὰ τὰ Τ καὶ Η σημεῖα. λέγω ... ἡ ΓΜ = ΓΝ. Β'. ὅτι ἡ ΜΤ ἴση τε καὶ ...ος τῇ ΝΗ. πίν. Θ. σχ. ι.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

τῶν Μ καὶ Ν σημείων ἤχθωσαν τεταγμένως Διάμετρον αἱ ΜΠ, ΝΦ.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α'.

...ς ΨΠ. ΠΑ : $\overline{ΜΠ}^2$ :: ΑΦ. ΦΨ : $\overline{ΝΦ}^2$. (γ) καὶ ...λλὰξ ὡς ΨΠ. ΠΑ : ΑΦ. ΦΨ :: $\overline{ΜΠ}^2$: $\overline{ΝΦ}^2$. ἀλλ' ...ς $\overline{ΜΠ}^2$: $\overline{ΝΦ}^2$ :: $\overline{ΠΓ}^2$: $\overline{ΦΓ}^2$. (δ) ἔστι γὰρ ὡς ΜΠ : ΝΦ :: ΠΓ : ΦΓ. (ε) ὡς ἄρα ΨΠ. ΠΑ : ΑΦ. ΦΨ :: $\overline{ΠΓ}^2$: $\overline{ΦΓ}^2$. (ζ) καὶ ἐναλλὰξ ὡς ΨΠ. ΠΑ : $\overline{ΠΓ}^2$ :: ΑΦ. ΦΨ : $\overline{ΦΓ}^2$. καὶ ἀνάπαλιν ὡς $\overline{ΠΓ}^2$: ΨΠ. ΠΑ :: $\overline{ΦΓ}^2$: ΑΦ. ΦΨ. καὶ κατ' ἀναστροφὴν λόγου ὡς $\overline{ΠΓ}^2$: $\overline{ΠΓ}^2$ − ΨΠ. ΠΑ :: $\overline{ΦΓ}^2$: $\overline{ΦΓ}^2$ − ΑΦ. ΦΨ. ἀλλὰ τὸ μὲν $\overline{ΠΓ}^2$ − ΨΠ. ΠΑ = $\overline{ΓΑ}^2$, τὸ δὲ $\overline{ΦΓ}^2$ − ΑΦ. ΦΨ = $\overline{ΓΨ}^2$. (η) ὡς ἄρα $\overline{ΠΓ}^2$: $\overline{ΓΑ}^2$ :: $\overline{ΦΓ}^2$: $\overline{ΓΨ}^2$. ἀλλὰ τὸ $\overline{ΓΑ}^2$ = $\overline{ΓΨ}^2$. ἄρα καὶ τὸ $\overline{ΠΓ}^2$ = $\overline{ΦΓ}^2$. (θ) διὸ καὶ ἡ ΠΓ = ΦΓ. ἐπεὶ δὲ καὶ τὰς γωνίας ἴσας ἔχουσι τὰ ΜΓΠ, ΝΓΦ τρί-

(γ) Κατὰ τὸ Πόρισ. τὸ μετὰ τὴν ιά. τοῦδε τοῦ τμήμ. (δ) Κατὰ τὸ ζ'. τῶν μετὰ τὸ ι'. Θεωρημ. (ε) Κατὰ τὴν δ'. τοῦ ι'. (ζ) Κατὰ τὴν ι'. τοῦ ε'. (η) Κατὰ τὴν ς'. τοῦ β'. (θ) Κατὰ τὴν κ'. τοῦ ε'.

τρίγωνα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἔστιν ἄρα καὶ ἡ ΓΜ = ΓΝ. (ι)

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β΄.

Τὸ μὲν ΠΓ. ΓΤ. = $\overline{\Gamma A}^2$, τὸ δὲ ΦΓ. ΓΗ = $\overline{\Gamma\Psi}^2$. (κ) ἀλλὰ τὸ $\overline{\Gamma A}^2$ = $\overline{\Gamma\Psi}^2$. ἄρα καὶ τὸ ΠΓ. ΓΤ = ΦΓ. ΓΗ. ἔστι δὲ ἡ ΠΓ = ΦΓ. ἄρα καὶ ἡ ΓΤ = ΓΗ. τῶν τριγώνων ἐν ΓΜΤ, ΓΝΗ αἱ μὲν ΓΜ, ΓΤ ἴσαι ταῖς ΓΝ, ΓΗ ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, αἱ δὲ πρὸς τῷ Γ γωνίαι ἴσαι. ἄρα καὶ ἡ ΜΤ = ΝΗ, καὶ γωνία ἡ ΝΜΤ = ΜΝΗ. (λ) ἡ ἄρα ΜΤ ἴση τε καὶ παράλληλος τῇ ΝΗ.

ΣΥΝΕΠΕΙΑΙ.

Α΄. Ἐὰν ἀχθεῖσα ἡ δευτέρα Διάμετρος ΒΔ, ἐκβληθῇ ἐφ᾽ ἑκάτερα, δίχα τεμεῖ τὰς ΖΜ, ΟΙ, τὰς ἐπιζευγνύσας τὰς ἐν ταῖς ἀντικειμέναις τομαῖς ἴσας τεταγμένας ΜΠ, ΖΦ, ΙϚ, ΟΞ. ἐπεὶ γὰρ αἱ ΜΠ, ΖΦ ἴσαι τε καὶ παράλληλοι, καὶ ἡ ΜΖ ἄρα ἴση τε καὶ παράλληλος τῇ ΠΦ. (μ) ἐκεῖν παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΜΦ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΒΔ ἑκατέρᾳ τῶν ΜΘ, ΖΝ παράλληλος, (ν) παραλληλόγραμμα ἄρα εἰσὶ τὰ ΜΓ, ΕΦ. διὸ ἡ μὲν ΜΕ = ΠΓ, ἡ δὲ ΕΖ = ΓΦ. (ξ) ἀλλ᾽ ἡ ΓΠ = ΓΦ, (ο) ἄρα καὶ ἡ ΜΕ = ΕΖ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἡ ΙΡ = ΡΟ, καὶ ἡ Θ8 = 8Ν.

Β΄. Αἱ ἄρα ΖΜ, ΟΙ, ΝΘ τεταγμέναι εἰσὶν ἐκτὸς τῶν ἀντικειμένων τομῶν, δίχα τεμνόμεναι ὑπὸ τῆς Δευτέρας Διαμέτρου ΒΔ, τῆς καὶ τὰ παραλληλόγραμμα ΜΦ, ΙΞ, ΠΝ δίχα τεμνούσης.

(ι) Κατὰ τὴν κϛ΄. τοῦ α΄. (κ) Κατὰ τὴν δ΄. Συνέπ. τῆς προλαβ. προτ. (λ) Κατὰ τὴν δ΄. τοῦ α΄. (μ) Κατὰ τὴν λγ΄. τοῦ α΄. (ν) Κατὰ τὸν κδ΄. ὁρισμ. (ξ) Κατὰ τὴν λδ΄. τοῦ α΄. (ο) Κατὰ τὸ α΄. μέρ. τῆς προκειμ. προτ.

Γ'. Ἡ τρίτη ἀνάλογος τῆς δευτέρας Διαμέτρȣ ΒΔ, ϗ τῆς πλαγίας ΨΛ, οἷον ἡ ΒΛ, ὀρθία πλευρά ἐςιν ὡς πρὸς τὴν ΒΔ. ὥσπερ δὲ τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας Διαμέτρȣ τετράγωνον ἴσον τῷ ὀρθογωνίῳ τῷ ὑπὸ τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΨΛ καὶ τῆς ὀρθίας αὐτῆς ΛΥ, εἴτȣν τὸ $\overline{\text{ΒΔ}}^2 = $ ΨΛ. ΛΥ, (π) ὅτω δὴ ϗ τὸ ἀπὸ τῆς πλαγίας πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον τῷ ὀρθογωνίῳ, τῷ ὑπὸ τῆς δευτέρας Διαμέτρȣ ΒΔ καὶ τῆς ὀρθίας πλευρᾶς αὐτῆς ΒΛ, ἤτοι τὸ $\overline{\text{ΨΛ}}^2 =$ ΒΔ. ΒΛ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Αἱ πλαγίᾳ μὲν πλευρᾷ τῇ ΒΔ, ὀρθίᾳ δὲ τῇ ΒΛ γραφόμεναι δύω Ὑπερβολαί, αἱ ΚΒΧ, ΩΔ7, Συζυγεῖς Ἀντικείμεναι, ἢ κατὰ Συζυγίαν Ἀντικείμεναι καλȣ̃νται, τῶν ΙΛ9, ΟΨ4· τȣ̓́μπαλιν δὲ, αὗται Συζυγεῖς Ἀντικείμεναι ἐκείνων, ἡ δὲ πλαγία αὐτῶν πλευρὰ ΨΛ δευτέρα Διάμετρος.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ'.

Τὰ τετράγωνα, τὰ ἀπὸ τῶν ἐκτὸς τῶν ἀντικειμένων τομῶν Τεταγμένων λόγον ἔχȣσι πρὸς ἄλληλα, ὃν τὰ ἀπὸ τῶν ὑπ' αὐτῶν ϗ τȣ̃ κέντρȣ ἀπολαμβανομένων εὐθειῶν τετράγωνα, προσκειμένȣ αὐτοῖς καὶ τȣ̃ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς δευτέρας Διαμέτρȣ τετραγώνȣ.

"Εςω

(π) Ἐκ τȣ̃ κδ'. ὁρισμ. δῆλον.

Ἔστωσαν Ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ ΑΙ, ΨΟ, ἐκτὸς δὲ ἐπὶ τὴν δευτέραν Διάμετρον τεταγμέναι αἱ ΜΕ, ΙΡ, ὑπ' αὐτῶν δὲ ἀποτεμνόμεναι ἀπὸ τῆς δευτέρας Διαμέτρου πρὸς τῷ κέντρῳ Γ εὐθεῖαι, αἱ ΓΕ, ΓΡ. λέγω δὴ ὅτι ὡς $\overline{\mathrm{ME}}^2 : \overline{\mathrm{IP}}^2 :: \overline{\Gamma\mathrm{E}}^2 + \overline{\Gamma\mathrm{B}}^2 : \overline{\Gamma\mathrm{P}}^2 + \overline{\Gamma\mathrm{B}}^2$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὡς $\Psi\Pi.\Pi\mathrm{A} : \overline{\mathrm{M}\Pi}^2 :: \Psi\mathrm{A} : \mathrm{A}\Upsilon$. (ρ) ἀλλ' ὡς $\Psi\mathrm{A} : \mathrm{A}\Upsilon :: \overline{\Psi\mathrm{A}}^2 : \overline{\mathrm{B}\Delta}^2$, (σ) ὡς δὲ $\overline{\Psi\mathrm{A}}^2 : \overline{\mathrm{B}\Delta}^2 :: \overline{\Gamma\mathrm{A}}^2 : \overline{\Gamma\mathrm{B}}^2$. (τ) ὡς ἄρα $\Psi\Pi.\ \Pi\mathrm{A} : \overline{\mathrm{M}\Pi}^2 :: \overline{\Gamma\mathrm{A}}^2 : \overline{\Gamma\mathrm{B}}^2$. (υ) διὸ καὶ ὡς $\Psi\Pi.\ \Pi\mathrm{A} + \overline{\Gamma\mathrm{A}}^2 : \mathrm{M}\Pi^2 + \overline{\Gamma\mathrm{B}}^2 :: \overline{\Gamma\mathrm{A}}^2 : \overline{\Gamma\mathrm{B}}^2$. (φ) ἀλλὰ τὸ μὲν $\Psi\Pi.\ \Pi\mathrm{A} + \overline{\Gamma\mathrm{A}}^2 = \overline{\Gamma\Pi}^2$, (χ) εἴτουν $\overline{\mathrm{ME}}^2$. (ψ) τὸ δὲ $\overline{\mathrm{M}\Pi}^2 = \overline{\Gamma\mathrm{E}}^2$. (ω) ὡς ἄρα $\overline{\mathrm{ME}}^2 : \overline{\Gamma\mathrm{E}}^2 + \overline{\Gamma\mathrm{B}}^2 :: \overline{\Gamma\mathrm{A}}^2 : \overline{\Gamma\mathrm{B}}^2$. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ὡς $\overline{\mathrm{IP}}^2 : \overline{\Gamma\mathrm{P}}^2 + \overline{\Gamma\mathrm{B}}^2 :: \overline{\Gamma\mathrm{A}}^2 : \overline{\Gamma\mathrm{B}}^2$. ἔσται δὴ οὖν καὶ ὡς $\overline{\mathrm{ME}}^2 : \overline{\Gamma\mathrm{E}}^2 + \overline{\Gamma\mathrm{B}}^2 :: \overline{\mathrm{IP}}^2 : \overline{\Gamma\mathrm{P}}^2 + \overline{\Gamma\mathrm{B}}^2$, (α) καὶ ἐναλλὰξ ὡς $\overline{\mathrm{ME}}^2 : \overline{\mathrm{IP}}^2 :: \overline{\Gamma\mathrm{E}}^2 + \overline{\Gamma\mathrm{B}}^2 : \overline{\Gamma\mathrm{P}}^2 + \overline{\Gamma\mathrm{B}}^2$.

ΣΥΝΕΠΕΙΑΙ.

Α΄. Τὸ ἀπὸ τῆς τεταγμένης ΙΡ τετράγωνον, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Ἀποτετμημένης ΓΡ προσκειμένου αὐτῷ καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ΓΒ τῆς δευτέρας Διαμέτρου ΒΔ λόγον ἔχει, ὃν ἡ ὀρθία πλευρὰ ΒΛ, πρὸς τὴν δευτέραν Διάμετρον ΒΔ. εἴτουν ἐστὶν ὡς $\overline{\mathrm{IP}}^2 : \overline{\Gamma\mathrm{P}}^2 + \overline{\Gamma\mathrm{B}}^2 :: \mathrm{B}\Lambda : \mathrm{B}\Delta$. ἐπεὶ γὰρ ὡς $\mathrm{B}\Delta : \Lambda\Psi :: \Lambda\Psi : \mathrm{B}\Lambda$, (β) ὡς ἄρα $\overline{\mathrm{B}\Delta}^2 : \overline{\Lambda\Psi}^2 :: \mathrm{B}\Delta : \mathrm{B}\Lambda$, (γ) καὶ ἀνάπαλιν ὡς $\overline{\Lambda\Psi}^2 : \overline{\mathrm{B}\Delta}^2 :: \mathrm{B}\Lambda : \mathrm{B}\Delta$. ἀλλ' ὡς

 $\overline{\Lambda\Psi}^2$:

(ρ) Κατὰ τὴν Συνέπ. τῆς α΄. τοῦ δε τοῦ τμήμ. (σ) Ἐκ τοῦ κδ΄. ὁρισμ. δῆλον. (τ) Κατὰ τὴν ή. τοῦ ι΄. (υ) Κατὰ τὴν ι΄. τοῦ ι΄. (φ) Κατὰ τὴν θ΄. τοῦ ι΄. (χ) Κατὰ τὴν ϛ΄. τοῦ β΄. (ψ) Κατὰ τὴν λδ΄. τοῦ α΄. (ω) Ἐκ τῆς αὐτ. δῆλον. (α) Κατὰ τὴν ἀριθμ. ε΄. (β) Κατὰ τὴν προλ. γ΄. Συνέπ. (γ) Κατὰ τὸ β΄. Πόρισ. τὸ μετὰ τὴν ή. τοῦ ι΄.

$\overline{\mathrm{A\Psi}}^2 : \overline{\mathrm{B\Delta}}^2 :: \overline{\Gamma\mathrm{A}}^2 : \overline{\Gamma\mathrm{B}}^2$. (δ) ἄρα καὶ ὡς $\overline{\Gamma\mathrm{A}}^2 : \overline{\Gamma\mathrm{B}}^2 ::$ ΒΛ : ΒΔ. (ε) ἔστι δὲ ὡς $\overline{\mathrm{IP}}^2 : \overline{\Gamma\mathrm{P}}^2 + \overline{\Gamma\mathrm{B}}^2 :: \overline{\Gamma\mathrm{A}}^2 : \overline{\Gamma\mathrm{B}}^2$, (ζ) ἄρα καὶ ὡς $\overline{\mathrm{IP}}^2 : \overline{\Gamma\mathrm{P}}^2 + \overline{\Gamma\mathrm{B}}^2 ::$ ΒΛ : ΒΔ. (η)

Β΄. Ἐὰν γραφεῖσαι αἱ κατὰ Συζυγίαν Ἀντικείμεναι τομαὶ ΚΒΧ, ΩΔ7, τὰς ἐκτὸς τῶν Ἀντικειμένων τομῶν τεταγμένας τέμνωσιν, ἔσται τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων, ΙΚ, ΚΟ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον τῷ δὶς τετραγώνῳ, τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ΓΑ τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΨΑ, ἤτοι ἔσεται τὸ $\mathrm{IK.\,KO} = 2\overline{\Gamma\mathrm{A}}^2$. ἐπεὶ γὰρ ὡς $\overline{\mathrm{KP}}^2 : \Delta\mathrm{P.\,PB} ::$ ΒΛ : ΒΔ· (θ) ὡς δὲ ΒΛ : ΒΔ $:: \overline{\mathrm{IP}}^2 : \overline{\Gamma\mathrm{P}} + \overline{\Gamma\mathrm{B}}^2$· (ι) ὡς ἄρα $\overline{\mathrm{IP}}^2 : \overline{\Gamma\mathrm{P}}^2 + \overline{\Gamma\mathrm{B}}^2 :: \overline{\mathrm{KP}}^2 : \Delta\mathrm{P.\,PB}$, (κ) καὶ ἐναλλὰξ ὡς $\overline{\mathrm{IP}}^2 : \overline{\mathrm{KP}}^2 :: \overline{\Gamma\mathrm{P}}^2 + \overline{\Gamma\mathrm{B}}^2 : \Delta\mathrm{P.\,PB}$, καὶ διαιρεθέντα ὡς $\overline{\mathrm{IP}}^2 - \overline{\mathrm{KP}}^2 : \overline{\mathrm{KP}}^2 :: \overline{\Gamma\mathrm{B}}^2 + \overline{\Gamma\mathrm{P}}^2 - \Delta\mathrm{P.\,PB} : \Delta\mathrm{P.\,PB}$. ἀλλὰ τὸ μὲν $\overline{\mathrm{IP}}^2 - \overline{\mathrm{KP}}^2 = \mathrm{IK.\,KO}$, τὸ δὲ $\overline{\Gamma\mathrm{P}}^2 - \Delta\mathrm{P.\,PB} = \overline{\Gamma\mathrm{B}}^2$. (λ) ὡς ἄρα $\mathrm{IK.\,KO} : \overline{\mathrm{KP}}^2 :: 2\overline{\Gamma\mathrm{B}}^2 : \Delta\mathrm{P.\,PB}$· καὶ ἐναλλὰξ, ὡς $\mathrm{IK.\,KO} : 2\overline{\Gamma\mathrm{B}}^2 :: \overline{\mathrm{KP}}^2 : \Delta\mathrm{P.\,PB}$· ἀλλ᾽ ὡς $\overline{\mathrm{KP}}^2 : \Delta\mathrm{P.\,PB} ::$ ΒΛ : ΒΔ, (μ) ὡς δὲ ΒΛ : ΒΔ $:: \overline{\Gamma\mathrm{A}}^2 : \overline{\Gamma\mathrm{B}}^2$, (ν) ἄρα καὶ ὡς ΒΛ : ΒΔ $:: 2\overline{\Gamma\mathrm{A}}^2 : 2\overline{\Gamma\mathrm{B}}^2$· (ξ) ἄρα καὶ ὡς $\mathrm{IK.\,KO} : 2\overline{\Gamma\mathrm{B}}^2 :: 2\overline{\Gamma\mathrm{A}}^2 : 2\overline{\Gamma\mathrm{B}}^2$. (ο) τὸ ἄρα $\mathrm{IK.\,KO} = 2\overline{\Gamma\mathrm{A}}^2$. (π)

Γ΄. Τῆς ΙΟ ἐπὶ τὰ Β μέρη φερομένης, καὶ παραλλήλω τῇ ΨΑ διαμενούσης, καὶ ἐπὶ τὸ Β ἡκούσης, τὸ ΙΚ. ΚΟ ὀρθογώνιον εἰς τετράγωνον μεταβάλλεται, τὸ

(δ) Κατὰ τὴν η΄. τοῦ ε΄. (ε) Κατὰ τὴν ἀρημ. ε΄. (ζ) Ὅρα τὴν δεῖξ. τῆς πρόκειμ. προτ. (η) Κατὰ τὴν ἀρημ. ι΄. (θ) Κατὰ τὴν Συνεπ. τῆς α΄. τοῦ δὲ τοῦ τμήματ. (ι) Κατὰ τὴν προλ. Συνέπ. (κ) Κατὰ τὴν ι΄. τοῦ ε΄. (λ) Κατὰ τὴν ς΄. τοῦ β΄. (μ) Κατὰ τὴν ἀρημ. τῆς α΄. Συνέπ. (ν) Ὅρα τὴν προλ. Συνέπ. (ξ) Κατὰ τὴν η΄. τοῦ ε΄. (ο) Κατὰ τὴν ἀρημ. ι΄. (π) Κατὰ τὴν β΄. τοῦ ε΄.

τὸ ἀπὸ ὁποτέρας δῆθεν τῶν ΙΡ, ΡΟ, καὶ ἴσον ἐστὶ τῷ $2\overline{ΓΑ}^2$, ἐπεὶ γὰρ ἡ μὲν ΙΡ=ΡΟ, (ρ) ἡ δὲ ΚΡ=ΡΧ, (σ) καὶ ἡ ΙΚ ἄρα ἴση τῇ ΧΟ. καὶ ἐπεὶ φερομένης μὲν τῆς ΙΟ ἐπὶ τὰ Β μέρη, ἡ ΚΧ συνεχῶς ἐλαττοῦται, ἡξάσης δὲ ἐπὶ τὸ Β, καὶ ἐφαπτομένης κατὰ κορυφὴν γεγονυίας, τὰ μὲν σημεῖα Κ, Χ ταυτίζεται, ἡ δὲ ΙΚ ἴση τῇ ΙΡ γίνεται, ὁμοίως ἡ ΟΧ τῇ ΟΡ, δῆλον ἄρα ὅτι τὸ ΙΚ. ΚΟ εἰς τὸ $\overline{ΙΡ}^2$, ἢ εἰς τὸ $\overline{ΡΟ}^2$ μεταβάλλεται. ἴσου δὲ ὄντος τοῦ ΙΚ. ΚΟ τῷ $2\overline{ΓΑ}^2$, ἴσον ἔσεται καὶ τὸ $\overline{ΙΡ}^2$, ἢ τὸ $\overline{ΡΟ}^2$ τῷ αὐτῷ $2\overline{ΓΑ}^2$.

ΛΗΜΜΑ. (τ)

Ἐὰν Ὑπερβολῆς τῆς ΑΕ εὐθεῖα ἐπιψαύουσα ἡ ΜΤ συμπίπτῃ τῇ ἀρχικῇ Διαμέτρῳ ΨΝ κατὰ τὸ Τ, καὶ ἀπὸ τῆς ἁφῆς Μ καταχθῇ εὐθεῖα τεταγμένως ἐπὶ τὴν Διάμετρον ἡ ΜΠ, καὶ ταύτῃ διὰ τῆς κορυφῆς παράλληλος ἀχθῇ ἡ ΑΔ συμπίπτουσα τῇ μὲν ΜΤ τῇ διὰ τῆς ἁφῆς κατὰ τὸ Ο, τῇ δὲ διὰ τοῦ κέντρου Γ καὶ τῆς ἁφῆς Μ ἠγμένῃ ΓΜ κατὰ τὸ Δ, ληφθέντος δέ τινος σημείου ἐπὶ τῆς τομῆς, οἷον τοῦ Φ ἀχθῶσι δύω εὐθεῖαι, αἱ ΦΗ, ΦΥ, ἡ μὲν τῇ ἐφαπτομένῃ ΜΤ παράλληλος, ἡ δὲ ἐπὶ τὴν Διάμετρον τεταγ-

(ρ) Κατὰ τὴν ά. Συνέπ. τῆς προλ. προτ. (σ) Κατὰ τὸν ζ. ὁρισμ.
(τ) Ἡ μγ΄. πρότ. τοῦ ά. βιβλ. Ἀπολλων.