ρες τὲς Κώνες ἐθεώρησαν, ᾗ ἐπὶ ἑκάςε ἰδίαν τομήν. ὁ δὲ Ἀπολλώνιος ὑποθέμενος Κῶνον καὶ ὀρθὸν ᾗ σκαληνὸν, τῇ διαφόρῳ τε ἐπιπέδε κλίσει διαφόρες ἐποίησε τὰς τομάς. (υ)

ΤΜΗΜΑ ΠΡΩΤΟΝ

Περὶ τῶν τῆς Παραβολῆς συμπτωμάτων.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α΄.

Ἐὰν ἐν Παραβολῇ ἀπὸ τῆς τομῆς καταχθῶσι δύω εὐθεῖαι ἐπὶ τὴν Διάμετρον τεταγμένως, ἔςαι ὡς τὰ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα πρὸς ἄλληλα, ὅτως αἱ ἀποτεμνόμεναι ὑπ' αὐτῶν ἀπὸ τῆς Διαμέτρε πρὸς τῇ κορυφῇ τῆς τομῆς.

Ἔςω Παραβολὴ, ἧς Διάμετρος ἡ ΝΚ. καὶ εἰλήφθω τινὰ σημεῖα ἐπ' αὐτῆς, τὰ Φ, Μ, καὶ ἀπ' αὐτῶν τεταγμένως κατήχθησαν ἐπὶ τὴν Διάμετρον ΚΝ αἱ ΦΙ, ΜΚ. λέγω ὅτι ἐςὶν ὡς $\overline{ΦΙ}^2 : \overline{ΜΚ}^2 :: ΝΙ : ΝΚ$. πίν. Γ. σχ. 2.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἤχθω διὰ τε Ι ἐν τῷ διὰ τε Ἄξονος τριγώνῳ ΔΑΒ ἡ ΓΙΕ παράλληλος τῇ τῆς βάσεως τε Κώνε ΑΔΒ Διαμέτρῳ ΔΒ. καὶ ἤχθω διὰ τῶν ΦΙ, ΓΕ ἐπίπεδον τὸ ΓΦΕ.

(υ) Ὅρα τὸ γ΄. Πόρισμ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ἡ μὲν ΓΕ τῇ ΔΒ, (α) ἡ δὲ ΦΙ τῇ ΜΚ παράλληλος, (β) καὶ τὰ δι' αὐτῶν ἄρα ἐπίπεδα ΓΦΕ, ΔΜΒ παράλληλά εἰσιν. (γ) ἡ ἄρα ΓΦΕ γραμμὴ κύκλος ἐστί. (δ) καὶ ἐπεὶ ἡ γωνία ΦΙΓ $=$ ΜΚΔ, (ε) ἔστι δὲ ἡ ΜΚΔ ὀρθή, (ζ) ἄρα καὶ ἡ ΦΙΓ ὀρθή. τὸ μὲν ἄρα $\overline{\Phi I}^2 = \Gamma I.\ IE$, τὸ δὲ $\overline{MK}^2 = \Delta K.\ KB$. (η) ὡς ἄρα $\overline{\Phi I}^2 : \overline{MK}^2 :: \Gamma I.\ IE : \Delta K.\ KB$. (θ) ἀλλ' ὡς $\Gamma I.\ IE : \Delta K.\ KB :: \Gamma I : \Delta K$. (ι) ἔστι γὰρ ἡ ΙΕ $=$ ΚΒ, (κ) ὡς δὲ $\Gamma I : \Delta K :: NI : NK$. (λ) ἄρα καὶ ὡς $\overline{\Phi I}^2 : \overline{MK}^2 :: NI : NK$. (μ) ὃ ἔδει δεῖξαι.

ΣΥΝΕΠΕΙΑΙ.

Α'. Αἱ τεταγμέναι ΦΙ, ΜΚ ὑποδιπλασίονα λόγον ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας, ἥπερ αἱ ὑπ' αὐτῶν ἀποτεμνόμεναι ΝΙ, ΝΚ· εἴτουν $\Phi I : MK :: \sqrt{NI} : \sqrt{NK}$. ἐπεὶ γὰρ ὡς $\overline{\Phi I}^2 : \overline{MK}^2 :: NI : NK$, ἄρα καὶ ὡς $\Phi I : MK :: \sqrt{NI} : \sqrt{NK}$. (ν)

Β'. Ἐὰν ἀπὸ τῆς κορυφῆς Α (Σχ. 3.) τῆς Παραβολῆς ΑΜ παράλληλος ἀχθῇ ἡ ΑΡ ὁποιαοῦν τῶν ἐπὶ τὴν Διάμετρον ΑΠ τεταγμένων ΜΠ, μπ, αἱ ἀπὸ τῶν σημείων Μ, μ τεταγμένως καταχθεῖσαι ἐπὶ τὴν ΑΡ λόγον ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας, ὃν τὰ ἀπὸ τῶν ἀποτετμημένων ὑπ' αὐτῶν ἀπὸ τῆς ΑΡ πρὸς τῇ κορυφῇ τετράγωνα, εἴτουν ἐστὶν ὡς $MK : \mu\kappa :: \overline{AK}^2 :$

(α) Ἐκ τῆς κατασκ. (β) Κατὰ τὸν ιγ'. ὁρισμ. (γ) Κατὰ τὴν ιε. τοῦ ια. (δ) Κατὰ τὴν β'. Σημ. (ε) Κατὰ τὴν ι. τοῦ ια. (ζ) Ἐκ τοῦ ιζ. ὁρισμ. δῆλον. (η) Κατὰ τὴν β'. Συνέπ. τῆς η. τοῦ ς'. (θ) Ἐκ τῆς α. τοῦ ς. δῆλον. (ι) Κατὰ τὴν α τοῦ ς'. (κ) Κατὰ τὴν λδ'. τοῦ α. (λ) Κατὰ τὴν δ'. τοῦ ς. (μ) Κατὰ τὴν ι. τοῦ ε. (ν) Κατὰ τὸ ζ. τῶν μετὰ τὸ ε βιβ. Θεωρημ.

$\overline{ΑΚ}^2 : \overline{ακ}^2$. ἐπεὶ γὰρ ΑΠ : Απ :: $\overline{ΠΜ}^2 : \overline{πμ}^2$, (ξ) ἔστι δὲ ἡ μὲν ΑΠ = ΜΚ, ἡ δὲ Απ τῇ μκ, ἡ δὲ ΠΜ τῇ ΑΚ, καὶ ἡ πμ τῇ Ακ (ο) ἄρα καὶ ὡς ΜΚ : μκ :: $\overline{ΑΚ}^2 : \overline{Ακ}^2$. οὐκοῦν ἐντὸς μὲν τῆς Παραβολῆς, αἱ ἀποτετμημέναι λόγον ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας ὃν τὰ ἀπὸ τῶν τεταγμένων τετράγωνα· ἐκτὸς δὲ τἀναντίον, ἀμέλειτοι αἱ τεταγμέναι λόγον ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας, ὃν τὰ ἀπὸ τῶν ἀποτετμημένων τετράγωνα.

Γ΄. Ἐὰν ἀπό τινος τῆς ΑΡ σημείου τοῦ Γ ἀχθῇ ἡ ΓΟ παράλληλος τῇ Διαμέτρῳ ΑΠ, τέμνουσα τὴν μὲν Παραβολὴν κατὰ τὸ Φ, τὴν δὲ ἐπιζευχθεῖσαν ΑΜ κατὰ τὸ Ι, τὴν δὲ τεταγμένην ΜΠ κατὰ τὸ Ο, ἔσονται αἱ ΓΟ, ΓΙ, ΓΦ συνεχῶς ἀνάλογον. ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν Φ καὶ Ι σημείων αἱ ΦΔ, ΙΛ παράλληλοι τῇ τεταγμένῃ ΜΠ. καὶ ἐπεὶ τὸ $\overline{ΠΜ}^2 : \overline{ΛΙ}^2$ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΠΜ : ΛΙ. (π) ἔστι δὲ ὡς ΠΜ : ΛΙ :: ΑΠ, ΑΛ, (ρ) εἴτουν ὡς ΓΟ : ΓΙ. τὸ ἄρα $\overline{ΠΜ}^2 : \overline{ΛΙ}^2$, ἢ τὸ $\overline{ΠΜ}^2 : \overline{ΔΦ}^2$ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΟ : ΓΙ. ἀλλ' ὡς $\overline{ΠΜ}^2 : \overline{ΔΦ}^2$ :: ΑΠ : ΑΔ, (σ) ἤτοι ὡς ΓΟ : ΓΦ. ἡ ἄρα ΓΟ : ΓΦ : διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΟ : ΓΙ, ὅπερ ἐστὶν, ΓΟ : ΓΙ :: ΓΙ : ΓΦ. (τ)

Δ΄. Ἐὰν αἱ τεταγμέναι ΦΔ, μπ, ΜΠ, λόγον ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας ὃν οἱ ἀριθμοὶ τῆς Φυσικῆς σειρᾶς 1, 2, 3, αἱ ἀπ' αὐτῶν ἀποτετμημέναι ΑΔ, Απ, ΑΠ, λόγον ἕξουσιν ὃν τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν εἰρημέ-

(ξ) Κατὰ τὴν προκαμ. πρότ. (ο) Κατὰ τὴν λδ΄. τοῦ α΄. (π) Ἐκ τῆς ιθ΄ τοῦ ε΄. δῆλον. (ρ) Κατὰ τὴν δ΄. τοῦ ϛ΄. (σ) Κατὰ τὴν προκαμ. πρότ. (τ) Ὅρα τὸ β΄. πόρ. τοῦ ε΄.

μένων ἀριθμῶν, ἤτουν $1, 4, 9$. ἔστι γὰρ ὡς $ΑΔ : Απ : \overline{ΦΔ}^2 : \overline{μπ}^2$, καὶ ὡς $Απ : ΑΠ :: \overline{μπ}^2 : \overline{ΜΠ}^2$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β΄. (υ)

Τὸ ἀπὸ πάσης ἐν Παραβολῇ τεταγμένης τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῆς ἀποτετμημένης ὑπ' αὐτῆς καὶ τῆς ὀρθίας πλευρᾶς περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἔστω Παραβολὴ ἡ ΑΜ, ἧς Διάμετρος μὲν ἡ ΑΚ, ὀρθία δὲ πλευρὰ ἡ ΑΖ, ἡ τρίτη ἀνάλογος τοῖς ἀποτετμημένης ΑΠ, καὶ τῆς τεταγμένης ΜΠ. (φ) λέγω, ὅτι καὶ τὸ $ΑΙ^2 = ΑΙ. ΑΖ$. χ. 4.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπειδὴ ὡς $ΑΠ : ΜΠ :: ΜΠ : ΑΖ$, (χ) τὸ ἄρα $\overline{ΜΠ}^2 = ΑΠ. ΑΖ$. (ψ) ἐπεὶ δὲ ὡς $\overline{ΜΠ}^2 : \overline{ΑΙ}^2 :: ΑΠ : ΑΙ$, (ω) ἔστι δὲ ὡς $ΑΠ : ΑΙ :: ΑΠ. ΑΖ : ΑΙ. ΑΖ$, (α) ἄρα καὶ ὡς $\overline{ΜΠ}^2 : \overline{ΑΙ}^2 :: ΑΠ. ΑΖ : ΑΙ. ΑΖ$. (β) ἀλλὰ τὸ $\overline{ΜΠ}^2 = ΑΠ. ΑΖ$. ἄρα καὶ τὸ $\overline{ΑΙ}^2 = ΑΙ. ΑΖ$. (γ) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ τὸ $\overline{ΨΔ}^2 = ΑΨ. ΑΖ$, καὶ τὸ ἀπὸ πάσης ἄλλης τεταγμένης τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῆς ἀποτετμημένης ὑπ' αὐτῆς καὶ τῆς ὀρθίας πλευρᾶς ΑΖ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

ΣΗΝΕΠΕΙΑΙ.

Α΄. Τῆς ὀρθίας πλευρᾶς ΑΖ ἀπὸ τῆς κορυφῆς Α παραλλήλου ἀχθείσης ταῖς τεταγμέναις, δίχα δὲ τμηθεί-

---

(υ) Ἡ ια΄. ἐστὶ τοῦ α΄. τοῦ Ἀπολλων. (φ) Ὅρα τὸν κα΄. ὁρισμ. (χ) Ἐξ ὑποθ. (ψ) Κατὰ τὴν ιζ΄. τοῦ ϛ΄. (ω) Κατὰ τὴν α΄. (α) Κατὰ τὴν α΄. τοῦ ϛ΄. (β) Κατὰ τὴν ε΄. τοῦ ε΄. (γ) Κατὰ τὴν κ΄. τοῦ ε΄.

θείσης κατὰ τὸ Γ, καὶ ἀπὸ τῶν σημείων Ζ, Γ ἀχθεισῶν τῶν ΖΟ, ΓΡ παραλλήλων τῇ Διαμέτρῳ ΑΚ, ἐκβληθεισῶν τε τῶν τεταγμένων ΜΠ, ΛΙ κατὰ τὰ Ο, Η σημεῖα, τὸ ἀπὸ τῆς ΜΠ τετράγωνον ἴσον μὲν ἔσται τῷ παραλληλογράμμῳ ΠΖ, διπλάσιον δὲ τοῦ ΠΓ· ὡσαύτως τὸ ἀπὸ τῆς ΛΙ ἴσον μὲν τῷ ΙΖ, διπλάσιον δὲ τοῦ ΙΓ. τὸ αὐτὸ δὴ ῥητέον καὶ περὶ τοῦ ἀπὸ πάσης τεταγμένης τετραγώνου.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'.

Τὴν μὲν ΖΟ, **Διευθετοῦσαν** καλεῖν εἰώθασι· τὴν δὲ ΓΡ, **Ὑποδιευθετοῦσαν**· καὶ μήτιγε διὰ τοῦτο ἡ τοιαύτη τοῦ Κώνου τομὴ, Παραβολὴ ἐπεκλήθη, παρὰ τοῦ παραβάλλεσθαι δηλαδὴ παρὰ τὴν ὀρθίαν πλευρὰν ΑΖ τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν τεταγμένων τετραγώνοις. καὶ γὰρ καὶ ὁ Εὐκλείδης φησὶ, παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν. (δ)

Β'. Δοθείσης τῆς ὀρθίας πλευρᾶς ΑΖ, ῥαδίως ὁρίσαι ἔνεστι, πότερον τὸ δοθὲν σημεῖον Δ ἐν τῇ Παραβολῇ ἐστὶν ἢ οὔ. κατήχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Δ ἡ ΔΨ πρὸς ὀρθὰς τῇ Διαμέτρῳ ΑΚ, καὶ ληφθείσης τῆς ΨΚ ἴσης τῇ ὀρθίᾳ ΑΖ, ἡμικύκλιον γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΚ. ἐὰν οὖν τοῦτο διὰ τοῦ Δ ἥξῃ, ἐν τῇ Παραβολῇ ἐστὶ τὸ Δ σημεῖον. ἐπεὶ γὰρ τὸ ΑΨ. ΨΚ $= \overline{\Psi\Delta}^2$, (ε) ἔστι δὲ ἡ ΨΚ $=$ ΑΖ, ἄρα καὶ τὸ ΑΨ. ΑΖ $= \overline{\Psi\Delta}^2$. ἐξ οὗ δῆλον, ὅτι τὸ Δ σημεῖον ἐν τῇ Παραβολῇ ΑΜ κεῖται.

Γ'. Καὶ ἡ Παραβολὴ δὲ καταγραφήσεται, ἧς ἡ ὀρθία δέδοται· ἔστω γὰρ ὀρθία πλευρὰ ἡ ΑΚ, (πίν. Δ'.

χ.

(δ) Ἐν τῇ μδ'. τοῦ α'. (ε) Κατὰ τὴν δ'. Συνέπ. τῆς η'. τοῦ ς'.

σχ. 1.) καὶ κείσθω ἐπ' εὐθείας εὐθεία τῇ ΑΧ, τὸν τῆς παραβολῆς Ἄξονα ἐμφαινούσῃ. καὶ ἀπὸ τοῦ Α ἤχθω τὶς εὐθεῖα ἡ ΑΨ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΚΧ, καὶ ἐκβεβλήσθω κατὰ τὸ συνεχές. καὶ σημείων συνεχῶν ληφθέντων ἐπὶ τῆς ΑΧ, τῶν Γ, Λ, Μ, Χ, γεγράφθω ἐπὶ τῶν ΚΓ, ΚΛ, ΚΜ, ΚΧ ἡμικύκλια τὴν ΑΨ τέμνοντα κατὰ Η, Ε, Ι, Ψ σημεῖα, καὶ ἐξ αὐτῶν ἀνασήτωσαν εὐθεῖαι αἱ ΓΒ, ΛΔ, ΜΦ, ΧΖ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΑΧ. καὶ εἰλήφθω ἡ μὲν ΓΒ = ΑΗ, ἡ δὲ ΛΔ = ΑΕ, ἡ δὲ ΜΦ = ΑΙ, ἡ δὲ ΧΖ = ΑΨ. λέγω δὴ ὅτι διὰ τῶν σημείων Β, Δ, Φ, Ζ Παραβολὴ ἥξει, ὅπερ ἐστὶν, ἐπιζευχθεισῶν τῶν ΑΒ, ΒΔ, ΔΦ, ΦΖ, Παραβολὴ συγκροτηθήσεται, ἧς ὀρθία μὲν πλευρὰ ἡ ΑΚ, Ἄξων δὲ ἡ ΑΧ, καὶ κορυφὴ τὸ Α. ἐπεὶ γὰρ τὸ $\overline{\mathrm{AH}}^2 = \mathrm{KA}.\ \mathrm{A\Gamma}$, (ζ) ἔστι δὲ ἡ ΑΗ = ΓΒ, ἄρα καὶ τὸ $\overline{\mathrm{\Gamma B}}^2 = \mathrm{KA}.\ \mathrm{A\Gamma}$. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσεται ὅτι τὸ μὲν $\overline{\Lambda\Delta}^2 = \mathrm{KA}.\ \mathrm{A}\Lambda$, τὸ δὲ $\overline{\Phi \mathrm{M}}^2 = \mathrm{KA}.\ \mathrm{AM}$, τὸ δὲ $\overline{\mathrm{ZX}}^2 = \mathrm{KA}.\ \mathrm{AX}$. ἡ ἄρα ΑΖ Παραβολή ἐστι.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'.

Ὅσον ἐγγύτερον ἀλλήλων ἐκλαμβάνεις τὰ Α, Γ, Λ, Μ, Χ σημεῖα, τοσοῦτον μᾶλλον ἀλλήλοις ἐγγίζουσι καὶ τὰ Α, Β, Δ, Φ, Ζ. διὸ ἀκριβέστερον ἡ Παραβολὴ καταγραφήσεται. δεῖ δὲ καὶ ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη τὰ αὐτὰ κατασκευάσαι, ὅπως ἂν ἀρτία γραφῇ ἡ Παραβολή.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ'. (η)

Ἐν Παραβολῇ τὸ ὑπὸ δύω ὁποιωνοῦν τεταγμένων, ὡς ὑπὸ μιᾶς καὶ τῆς ὑπεροχῆς αὐ-

(ζ) Κατὰ τὴν αὐτ. (η) Ἐν τοῖς τοῦ Ἀπολλων. οὐχ εὕρηται, οἶον δὲ συνέπεια τῆς προληφθείσης προτάσεως ἐστὶν, ἣν ὁ Πάππος ὁ Ἀλεξανδρεὺς ἐσχάτην τοῦ δ'. βιβλ. τῶν Συλλογ. ἔταξε.

αὐτῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὀρθογωνίῳ τῷ ὑπὸ τῆς ὑπεροχῆς τῶν ὑπ' αὐτῶν ἀποτεμνομένων καὶ τῆς ὀρθίας πλευρᾶς.

Ἔστω Παραβολὴ ἡ ΑΝΕ, ἧς ὀρθία μὲν ἡ ΑΓ, Διάμετρος δὲ ἡ ΑΔ, τεταγμέναι δὲ ὁποιαιοῦν αἱ ΝΜ, ΕΔ. λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν δύω ΝΜ, ΕΔ, ὡς ὑπὸ μιᾶς καὶ τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῆς ὑπεροχῆς τῶν ὑπ' αὐτῶν ἀποτεμνομένων ΑΜ, ΑΔ, εἴτουν τῷ ὑπὸ τῆς ΜΔ καὶ τῆς ὀρθίας πλευρᾶς ΑΓ. πίν. Γ. σχ. 5.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ ἕτερα τῆς Παραβολῆς μέρη ἡ ΕΔ. καὶ ἀπὸ τοῦ Ν ἤχθω ἡ ΝΗ παράλληλος τῇ ΑΔ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ μὲν $\overline{ΕΔ}^2 = ΑΔ.\ ΑΓ$, τὸ δὲ $\overline{ΝΜ}^2 = ΑΜ.\ ΑΓ$. (θ) τὸ ἄρα $\overline{ΕΔ}^2 - \overline{ΝΜ}^2 = ΑΔ.\ ΑΓ - ΑΜ.\ ΑΓ = \overline{ΑΔ - ΑΜ}.\ ΑΓ. = ΜΔ.\ ΑΓ.$ (ι) ἐπεὶ δὲ τὸ $\overline{ΕΔ}^2 = ΦΗ.\ ΗΕ. + \overline{ΔΗ}^2$, (κ) ἔστι δὲ ἡ $ΔΗ = ΝΜ$, (λ) τὸ ἄρα $\overline{ΕΔ}^2 = ΦΗ.\ ΗΕ + \overline{ΝΜ}^2$. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ $\overline{ΝΜ}^2$. τὸ ἄρα $\overline{ΕΔ}^2 - \overline{ΝΜ}^2 = ΦΗ.\ ΗΕ.$ ἀλλὰ δέδεικται τὸ $\overline{ΕΔ}^2 - \overline{ΝΜ}^2 = ΜΔ.\ ΑΓ.$ τὸ ἄρα $ΦΗ.\ ΗΕ = ΜΔ.\ ΑΓ.$ ἔστι δὲ ἡ μὲν ΦΗ ἴση ταῖς δυσὶ τεταγμέναις ΝΜ, ΕΔ· ἡ μὲν γὰρ $ΝΜ = ΗΔ$, (μ) ἡ δὲ $ΕΔ = ΦΔ$, (ν) ἡ δὲ ΗΕ ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν. τὸ ἄρα ὑπὸ δύω τεταγμένων ὡς ὑπὸ μιᾶς, καὶ τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον τῷ ὑπὸ

(θ) Κατὰ τὴν α'. (ι) Κατὰ τὸ γ'. Κ'ξ. τοῦ α'. (κ) Κατὰ τὴν ι. τοῦ β'. (λ) Κατὰ τὴν λδ'. τοῦ α'. (μ) Κατὰ τὴν αὐτήν. (ν) Κατὰ τὸν ζ'. ὁρισμ.

ὑπὸ τῆς ὑπεροχῆς τῶν ὑπ᾿ αὐτῶν ἀποτεμνομένων καὶ τῆς ὀρθίας πλευρᾶς.

ΣΥΝΕΠΕΙΑΙ.

Α΄. Ἡ ὀρθία τῆς Παραβολῆς πλευρὰ πρὸς τὸ ἄθροισμα δύω ὁποιωνοῦν τεταγμένων λόγον ἔχει, ὃν ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν, πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τῶν ὑπ᾿ αὐτῶν ἀπομεμνομένων. Ἐπεὶ γὰρ ΜΔ. ΑΓ = ΦΗ. ΗΕ, ὡς ἄρα ΑΓ : ΦΗ :: ΗΕ : ΜΔ. (ξ)

Β΄. Αἱ ἀπὸ τῶν τυχόντων τῆς Παραβολῆς σημείων Τ, Ν ἀγόμεναι τῇ ΑΔ Διαμέτρῳ παράλληλοι ΤΥ, ΝΗ, καὶ τὴν ΦΕ τεταγμένην τέμνουσαι κατὰ τὰ Υ, Η σημεῖα, λόγον ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας, ὃν τὰ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς ΦΕ περιεχόμενα ὀρθογώνια, εἴτουν ἐςὶν ὡς ΤΥ : ΝΗ :: ΦΥ. ΥΕ : ΦΗ. ΗΕ. τεταγμένως γὰρ καταχθείσης ἀπὸ τοῦ Τ τῆς ΤΧ, ἔσεται τὸ μὲν ΧΔ. ΑΓ, ἤτοι ΤΥ. ΑΓ = ΦΥ. ΥΕ, τὸ δὲ ΜΔ. ΑΓ, εἴτουν ΝΗ. ΑΓ = ΦΗ. ΗΕ. ὡς ἄρα ΤΥ. ΑΓ : ΝΗ. ΑΓ :: ΦΥ. ΥΕ : ΦΗ. ΗΕ. (ο) ἀλλ᾿ ὡς ΤΥ. ΑΓ : ΝΗ. ΑΓ :: ΤΥ : ΝΗ. (π) ὡς ἄρα ΤΥ : ΝΗ :: ΦΥ. ΥΕ : ΦΗ. ΗΕ.

Γ΄. Τὰ ὑπὸ τῶν τεταγμένων ΦΕ, ϛΝ ἀπολαμβανόμενα τῆς ΤΥ μέρη, ΤΥ, ΤΚ εἰσὶ πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ ὑπὸ τῶν τμημάτων ΦΥ, ΥΕ, ϛΚ, ΚΝ τῶν τεταγμένων περιεχόμενα ὀρθογώνια, ἤτοι ἐςὶν ὡς ΤΥ : ΤΚ :: ΦΥ. ΥΕ : ϛΚ. ΚΝ. τὸ μὲν γὰρ ΦΥ. ΥΕ = ΤΥ. ΑΓ, τὸ δὲ ϛΚ. ΚΝ = ΜΧ. ΑΓ = ΤΚ, ΑΓ. ὡς ἄρα ΤΥ. ΑΓ : ΤΚ. ΑΓ :: ΦΥ. ΥΕ : ϛΚ. ΚΝ. ἔςι δὲ ὡς ΤΥ. ΑΓ : ΤΚ. ΑΓ :: ΤΥ : ΤΚ. (ρ) ἄρα καὶ ὡς ΤΥ : ΤΚ :: ΦΥ. ΥΕ : ϛΚ. ΚΝ. (σ)

Δ΄.

(ξ) Κατὰ τὴν ιϛ΄. τοῦ ϛ΄. (ο) Κατὰ τὴν α΄. τοῦ ε΄. (π) Κατὰ τὴν α΄. τοῦ ϛ΄. (ρ) Κατὰ τὴν αὐτ. (σ) Κατὰ τὴν ι΄. τοῦ ε΄.

Δ'. Ἐὰν ἀπὸ ἐκβληθείσης τεταγμένης τῆς ΨΤ ληφθῇ σημεῖα τὰ Ω, Ζ, αἱ ἀπ' αὐτῶν τῇ Διαμέτρῳ ΑΔ ἀγόμεναι παράλληλοι ΩΝ, ΖΕ, καὶ τῇ Παραβολῇ κατὰ τὰ Ν, Ε σημεῖα συμπίπτουσι λόγον ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας, ὃν τὰ ὀρθογώνια τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων ὑπὸ τῶν παραλλήλων τῆς ἐκβληθείσης μερῶν, καὶ τῶν μεταξὺ αὐτῶν καὶ τῆς Παραβολῆς τμημάτων, ἤτουν ἐστὶν ὡς ΩΝ : ΖΕ :: ΨΩ. ΩΤ : ΨΖ. ΖΤ. ἐπεὶ γὰρ τὸ μὲν $\overline{MN}^2 = AM.A\Gamma$, τὸ δὲ $\overline{XT}^2 = AX.A\Gamma$, (τ) ἄρα καὶ τὸ $\overline{MN}^2 - \overline{XT}^2$, ἤτοι τὸ $\overline{X\Omega}^2 - \overline{XT}^2 = AM.A\Gamma - AX.A\Gamma = \overline{AM - AX}.A\Gamma = XM.A\Gamma = \Omega N.A\Gamma$. ἐπεὶ δὲ τὸ $\Psi\Omega.\Omega T + \overline{XT}^2 = \overline{X\Omega}^2$, (υ) κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ $\overline{XT}^2$, ἔσεται τὸ $\Psi\Omega.\Omega T = \overline{X\Omega}^2 - \overline{XT}^2$. τὸ ἄρα $\Psi\Omega.\Omega T = \Omega N.A\Gamma$. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ τὸ $\Psi Z.ZT = ZE.A\Gamma$. ὡς ἄρα ΩΝ. ΑΓ : ΖΕ. ΑΓ, ἤτουν ὡς ΩΝ : ΖΕ :: ΨΩ. ΩΤ : ΨΖ. ΖΤ.

Ε'. Ἐὰν δέ τις τεταγμένη ἡ ϛΝ ἐκβληθεῖσα τέμνῃ τὴν ῥηθεῖσαν ΖΕ, ἔσεται ὅλη ἡ ΖΕ πρὸς τὸ τμηθὲν μέρος ΙΕ, ὡς τὸ προειρημένον ὀρθογώνιον ΨΖ. ΖΤ, πρὸς τὸ ϛΙ. ΙΝ. τὸ μὲν γὰρ $\Psi Z.ZT = ZE.A\Gamma$, τὸ δὲ $\text{ϛ}I.IN = IE.A\Gamma$. (φ) ὡς ἄρα ΖΕ. ΑΓ : ΙΕ. ΑΓ, ἤτοι ὡς ΖΕ : ΙΕ :: ΨΖ. ΖΤ : ϛΙ. ΙΝ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'. (χ)

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τῆς δοθείσης Παραβολῆς εὐθεῖαν ἁπτομένην ἀγαγεῖν.

Η Ἔστω

(τ) Κατὰ τὴν β'. (υ) Κατὰ τὴν ι. τοῦ β'. (φ) Κατὰ τὴν προλ. Συνέχ. (χ) Ἦτοι ιζ', καὶ ἡ λγ'. ἐστὶ τοῦ α. βιβλ. τοῦ Ἀπολλων.

Ἔστω πρῶτον τὸ δοθὲν τῆς Παραβολῆς ΦΑΕ σημεῖον ἡ κορυφὴ αὐτῆς Α. σχ. 5.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἤχθω ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου Α ἡ ΑΓ παράλληλος ὁποιαοῦν τῶν τεταγμένων, οἷον τῇ ΨΤ. λέγω, ὅτι ἡ ΑΓ ἐκτὸς τῆς τομῆς πίπτει.

ΔΕΙΞΙΣ.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, πιπτέτω ἐντὸς, ὡς ἡ ΑΒ. ἀπὸ τοῦ σημείου ἄρα Β τῆς Παραβολῆς ἡ ΒΑ ἤχθη παράλληλος μὲν ταῖς τεταγμέναις, συμπίπτουσα δὲ κατὰ τὸ τῆς Διαμέτρου πέρας Α. ἡ ἄρα ΑΒ τεταγμένη ἐστὶν ἐπὶ τὴν Διάμετρον ΑΔ, (ψ) καὶ μὴ διχοτομουμένη ὑπ' αὐτῆς. ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. (ω) ἐκτὸς ἄρα τῆς Παραβολῆς πίπτει ἡ ΑΓ, καὶ ἐφάπτεται αὐτῆς κατὰ τὸ Α σημεῖον.

Ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστω ἡ κορυφὴ τὸ δοθὲν σημεῖον, ἀλλ' ἄλλο τὶ, οἷόν ἐστι τὸ Μ. πίν. Δ'. σχ. 2.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἀπὸ τοῦ Μ τεταγμένως κατήχθω ἐπὶ τὴν Διάμετρον ἡ ΜΠ. καὶ ἀπὸ τῆς ἐκβληθείσης Διαμέτρου ἐκτὸς τῆς τομῆς εἰλήφθω ἡ ΑΤ=ΑΠ. καὶ ἀπὸ τοῦ Τ ἐπὶ τὸ Μ ἐπεζεύχθω ἡ ΤΜ. λέγω ὅτι ἡ ΤΜ καθ' ἓν μόνον σημεῖον τὸ Μ ἐφάπτεται τῆς τομῆς. (*)

Ἐφαπτέσθω γὰρ, εἰ δυνατὸν, καὶ κατὰ τὸ Δ, καὶ ἀχθείσης τῆς ὀρθίας πλευρᾶς ΑΝ παραλλήλου τῇ τεταγμένῃ ΜΠ, καὶ τῆς Ὑποδιευθετούσης ΡΖ, τετάχθω ἀπὸ τοῦ Δ ἡ ΔΗ, καὶ ἐκβεβλήσθω, ὡσαύτως καὶ ἡ ΜΠ, καὶ συμβαλλέτωσαν τῇ Ὑποδιευθετούσῃ κατὰ τὰ

Φ

(ψ) Κατὰ τὸν ιγ'. ὁρισμ. (ω) Ἐκ τοῦ ζ'. ὁρισμ. δῆλον. (*) Τοῦτο μέρους τῆς λδ'. τοῦ α'. βιβλ. τοῦ Ἀπολλων.

Φ καὶ Ζ σημεῖα. καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ Τ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΤ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ ΠΤ διπλασία ἐστὶ τῆς ΠΑ. (α) τὸ τρίγωνον ἄρα ΖΠΤ ἴσον ἐστὶ τῷ παραλληλογράμμῳ ΡΠ. (β) ἀφῃρήσθω ἀπὸ μὲν τοῦ τριγώνου ΖΠΤ τὸ τετράπλευρον ΖΛΗΠ, ἀπὸ δὲ τοῦ παραλληλογράμμου ΡΠ τὸ παραλληλόγραμμον ΠΦ, τὸ μεῖζον τοῦ τετραπλεύρου ΖΛΗΠ. λοιπὸν ἄρα τὸ ΛΤΗ τρίγωνον μεῖζον λοιποῦ τοῦ ΡΗ παραλληλογράμμου. καὶ ἐπεὶ ὡς $\overline{ΜΠ}^2 : \overline{ΔΗ}^2 :: $ ΠΤΜ τρίγωνον : ΗΤΔ τρίγων. (γ) ἔστι δὲ ὡς ΠΤΜ : ΗΤΔ :: ΠΤΖ : ΗΤΛ. καὶ γὰρ ὡς ΠΤΜ : ΗΤΔ :: $\overline{ΠΤ}^2 : \overline{ΗΤ}^2$, ὁμοίως καὶ ὡς ΠΤΖ : ΗΤΛ : : $\overline{ΠΤ}^2 : \overline{ΗΤ}^2$. (δ) ἄρα καὶ ὡς $\overline{ΜΠ}^2 : \overline{ΔΗ}^2 :: $ ΠΤΖ : ΗΤΛ. (ε) ἀλλὰ τὸ $\overline{ΜΠ}^2$ διπλάσιον ὂν τοῦ ΡΠ, (ζ) διπλάσιόν ἐστι καὶ τοῦ ἴσου αὐτῷ τριγώνου ΠΤΖ. ἄρα καὶ τὸ $\overline{ΔΗ}^2$ διπλάσιον τοῦ ΗΤΛ. ἀλλὰ τὸ ΗΤΛ μεῖζον δέδεικται τοῦ ΡΗ. ἄρα τὸ $\overline{ΔΗ}^2$ μεῖζον τοῦ διπλασίου τοῦ ΡΗ. ἀλλὰ τὸ αὐτὸ $\overline{ΔΗ}^2$ ἐστὶ διπλάσιον καὶ τοῦ ΡΗ. (η) τὸ αὐτὸ ἄρα $\overline{ΔΗ}^2$ καὶ μεῖζον καὶ ἴσον τῷ διπλασίῳ τοῦ ΡΗ, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ΤΜ ἐφάπτεται τῆς τομῆς κατὰ τὸ Δ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσεται, ὅτι οὐδὲ κατὰ ἄλλο σημεῖον, πλὴν τοῦ Μ ἐφάπτεται. ἡ ΤΜ ἄρα ἐστὶν ἡ ζητουμένη.

ΣΥΝΕΠΕΙΑΙ.

Α΄. Ἐντεῦθεν πολλαὶ προκύπτουσι τοῦ εὐθεῖαν ἁπτομένην ἄγειν ἀπὸ τοῦ δοθέντος τῆς Παραβολῆς σημείου μέθοδοι. ἐπεὶ γὰρ τὸ $\overline{ΜΠ}^2$ διπλάσιόν ἐστιν, ὡς δέ-

(α) Ἐκ τῆς κατασκ. δῆλον. (β) Ἐκ τῆς μα΄. τοῦ α΄. δῆλον. (γ) Κατὰ τὴν ιθ΄. τοῦ ϛ΄. (δ) Κατὰ τὴν αὐτήν. (ε) Κατὰ τὴν ξ΄. τοῦ ι΄. (ζ) Κατὰ τὴν α΄. Συνέπ. τῆς β΄. (η) Κατὰ τὴν αὐτήν.

δέδεικται, τῷ ΠΤΖ τριγώνῳ, ἴσον ἄρα ἐστὶ τῷ ὀρθογωνίῳ ΖΠ. ΠΤ. ὡς ἄρα ΖΠ : ΜΠ :: ΜΠ : ΠΤ. οὐκοῦν ἐὰν ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου Μ τεταγμένη ἐπὶ τὴν Διάμετρον καταχθῇ ἡ ΜΠ, καὶ ἐκβληθεῖσα συμπέσῃ τῇ Ὑποδιευθετούσῃ κατὰ τὸ Ζ, εὑρεθῇ δὲ τρίτη ἀνάλογος τῆς τε ΖΠ, τῆς μεταξὺ τῆς Διαμέτρου καὶ τῆς Ὑποδιευθετούσης, καὶ τῆς τεταγμένης ΜΠ, ληφθῇ δὲ ἡ ΠΤ ἴση τῇ εὑρεθείσῃ τρίτῃ ἀναλόγῳ, καὶ ἀπὸ τοῦ Τ ἐπὶ τὸ Μ ἐπιζευχθῇ ἡ ΤΜ, αὕτη ἐφαπτομένη ἐστὶ τῆς Παραβολῆς κατὰ τὸ Μ.

Β΄. Ἐὰν ἀπὸ τοῦ Μ ἀχθῇ ἡ ΜΒ παράλληλος τῇ Διαμέτρῳ, τὸ ὑπ᾽ αὐτῆς ἐμπεριλαμβανόμενον τῆς κατὰ κορυφὴν ἐφαπτομένης μέρος, τὸ ΑΒ, δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης ΜΤ κατὰ τὸ Γ. ἐπεὶ γὰρ ὡς ΜΠ : ΓΑ :: ΠΤ : ΑΤ, (θ) ἐστι δὲ ἡ ΠΤ διπλασία τῆς ΑΤ, (ι) ἄρα καὶ ἡ ΜΠ, εἴτουν ἡ ΑΒ διπλασία τῆς ΓΑ. ἡ ἄρα ΑΓ = ΓΒ. ἐὰν οὖν ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου Μ παράλληλος τῇ Διαμέτρῳ ἀχθῇ, συμπίπτουσα τῇ κατὰ κορυφὴν ἐφαπτομένῃ τῆς Παραβολῆς, διχοτομηθῇ δὲ τὸ ὑπ᾽ αὐτῶν ἀπολαμβανόμενον μέρος ΑΒ, καὶ ἀπὸ τῆς διχοτομίας Γ ἐπὶ τὸ δοθὲν σημεῖον Μ ἐπιζευχθῇ ἡ ΓΜ, αὕτη τῆς Παραβολῆς ἐφάψεται.

Γ΄. Ἐὰν δὲ ἡ διάμετρος ΑΠ, Ἄξων ᾖ, ληφθῇ δὲ τῇ ΠΖ, εἴτουν τῷ ἡμίσει τῆς ὀρθίας πλευρᾶς ΑΝ, ἴση ἡ ΠΥ, καὶ ἀπὸ τοῦ Υ ἐπὶ τὸ Μ ἐπιζευχθῇ ἡ ΥΜ, ἔσεται ἡ γωνία ΥΜΤ ὀρθή. ἐπεὶ γὰρ ὡς ΖΠ, ἤτοι ΥΠ : ΜΠ :: ΜΠ : ΠΤ, (κ) ἡ δὲ ΜΠ πρὸς

(θ) Κατὰ τὴν δ΄. τοῦ ϛ΄. (ι) Ἐκ τῆς κατασκ. (κ) Ὅρα τὴν προλαμβ. α΄. Συνέπ.

πρὸς ὀρθὰς τῇ ΑΥ, (λ) ὀρθὴ ἄρα ἡ ΥΜΤ γωνία. (μ) ἐὰν ἄρα ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου Μ τεταγμένως καταχθῇ ἐπὶ τὸν Ἄξονα ἡ ΜΠ, ληφθῇ δὲ τῷ ἡμίσει τῆς ὀρθίας πλευρᾶς ἴση ἡ ΠΥ, καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς ΥΜ ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Μ ἡ ΜΤ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΥΜ, ἔσεται ἡ ΜΤ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Ἡ μὲν ὑπὸ τοῦ σημείου τῆς ἐπαφῆς Μ καὶ τῆς ἐκβεβλημένης Διαμέτρου ΥΤ ἐμπεριλαμβανομένη ΜΤ, **Ἐφαπτομένη** λέγεται· ἡ δὲ ὑπὸ τῆς τεταγμένης ΜΠ καὶ τῆς Ἐφαπτομένης ΜΤ, τουτέστιν ἡ ΠΤ, **Ὑφαπτομένη**· ἡ δὲ ἀπὸ τῆς ἐπαφῆς Μ πρὸς ὀρθὰς τῇ Ἐφαπτομένῃ ΜΤ, καὶ ὑπὸ τῆς Διαμέτρου ΑΥ περατουμένη ΜΥ, **Κάθετος**· ἡ δὲ ΠΥ ἡ ὑπό τε τῆς τεταγμένης ΜΠ καὶ τῆς Καθέτου ΥΜ περατουμένη, **Ὑποκάθετος**.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Οὐκοῦν ἐν Παραβολῇ ἡ μὲν Ὑφαπτομένη ΠΤ διπλασία ἐστὶ τῆς ἀποτετμημένης ΑΠ, ἡ δὲ Ὑποκάθετος ΠΥ ἴση τῷ ἡμίσει τῆς ὀρθίας πλευρᾶς ΑΝ.

Δ΄. (ν) Τῶν αὐτῶν κειμένων, ἐὰν ληφθῇ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Ε, (σχ. 3.) καὶ καταχθῶσιν ἐπὶ τὴν Διάμετρον δύω εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν, ἡ ΕΥ, παράλληλος ᾖ τῇ Ἐφαπτομένῃ ΜΤ, ἡ δὲ ΕΗ, τῇ ἐπὶ τῆς κορυφῆς Α ἐφαπτομένῃ ΑΒ, τὸ γινόμενον ὑπ᾽ αὐτῶν τρίγωνον ΕΗΥ ἴσον ἐστὶ τῷ ΗΒ παραλληλογράμμῳ, τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τῆς ἀπὸ

(λ) Κατὰ τὸν ή. ὁρισμ. (μ) Κατὰ τὴν β΄. Συνέπ. τῆς ή. τοῦ γ΄. (ν) Ἡ μβ΄. ἐστὶ τοῦ α΄. βιβλ. τοῦ Ἀπολλων.

τῆς ἀφῆς κατηγμένης ΑΒ, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ΑΗ, ὑπὸ τῆς παραλλήλε ΕΗ πρὸς τῇ κορυφῇ Α. ὡς γὰρ τρίγων. ΠΤΜ : τρίγων. ΗΥΕ :: $\overline{\text{ΠΜ}}^2 : \overline{\text{ΗΕ}}^2$. (ξ) ἀλλ' ὡς $\overline{\text{ΠΜ}}^2 : \overline{\text{ΗΕ}}^2$ :: ΑΠ : ΑΗ. (ο) καὶ ὡς ΑΠ : ΑΗ :: ΠΒ : ΗΒ, (π) ὡς ἄρα ΠΤΜ : ΗΥΕ :: ΠΒ : ΗΒ. (ρ) ἀλλὰ τὸ ΠΤΜ = ΠΒ. (σ) ἄρα καὶ τὸ ΗΥΕ = ΗΒ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ τὸ ΦΝΥ = ΝΒ, καὶ τὸ ΧΛΑ = ΑΒ.

ΘΕΩΡΗΜΑ. (τ)

Εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς Παραβολῆς, καὶ τῆς κατὰ κορυφὴν ἐφαπτομένης αὐτῆς εὐθεῖα ἐ παρεμπεσεῖται.

Ἔστω Παραβολὴ, ἧς Διάμετρος μὲν ἡ ΑΒ, ὀρθία δὲ πλευρὰ, ἡ ΑΖ. καὶ ἐφαπτέσθω αὐτῆς ἡ ΓΑ κατὰ τὸ Α. Λέγω δὴ, ὅτι εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς ἁπτομένης ΑΓ, καὶ τῆς καμπύλης ΑΗ εὐθεῖα ἐ παρεμπεσεῖται. σχ. 4.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, παρεμπιπτέτω, ὡς ἡ ΑΔ.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΑΔ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ. καὶ ἀπὸ τῆ Δ τεταγμένως κατήχθω ἐπὶ τὴν Διάμετρον ΑΒ ἡ ΔΕ. καὶ γεγονέτω ὡς $\overline{\text{ΔΕ}}^2 : \overline{\text{ΕΑ}}^2$ :: ΖΑ πρὸς τὴν τετάρτην. καὶ εἰλήφθω ἡ ΘΛ ἴση τῇ εὑρεθείσῃ τετάρτῃ. καὶ ἀπὸ τῆ Θ ἤχθω τῇ ΕΔ παράλληλος ἡ ΘΚ.

ΔΕΙ-

(ξ) Κατὰ τὴν ιθ'. τῆ ς'. (ο) Κατὰ τὴν ά. (π) Κατὰ τὴν ά. τῆ ς'. (ρ) Κατὰ τὴν έ. τῆ έ. (σ) Κατὰ τὴν μά. τῆ ά. (τ) Μέρος ἐσὶ τῆς λβ'. προτ. τῆ ά. βιβλ. τῆ Ἀπολλωνίε.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ $\overline{\Delta E}^2 : \overline{EA}^2 > \overline{HE}^2 : \overline{EA}^2$. (υ) ἀλλὰ τὸ $\overline{HE}^2 = ZA . AE$. (φ) τὸ ἄρα $\overline{\Delta E}^2 : \overline{EA}^2 > ZA . AE : \overline{EA}^2$. ἔςι δὲ ὡς $ZA . AE : \overline{EA}^2 :: ZA : EA$. (χ) τὸ ἄρα $\overline{\Delta E}^2 : \overline{EA}^2 > ZA : EA$. ἀλλ᾽ ὡς $\overline{\Delta E}^2 : \overline{EA}^2 :: ZA : \Theta A$. (ψ) ἄρα ἡ $ZA : \Theta A > ZA : EA$. ἐξ ὃ δῆλον ὅτι ἡ $EA > \Theta A$: ἐπεὶ δὲ ὡς $\overline{\Delta E}^2 : \overline{EA}^2 :: ZA \cdot \Theta A$, (ω) καὶ ὡς $ZA : \Theta A :: ZA . \Theta A : \overline{\Theta A}^2$, (α) ὡς ἄρα $\overline{\Delta E}^2 : \overline{EA}^2 :: ZA . \Theta A : \overline{\Theta A}^2$. ἀλλὰ τὸ $ZA . \Theta A = \overline{\Theta \Lambda}^2$. (β) ἄρα ὡς $\overline{\Delta E}^2 : \overline{EA}^2 :: \overline{\Theta \Lambda}^2 : \overline{\Theta A}^2$. (γ) ἀλλ᾽ ὡς $\overline{\Delta E}^2 : \overline{EA}^2 :: \overline{K\Theta}^2 : \overline{\Theta A}^2$, (δ) ἄρα ὡς $\overline{K\Theta}^2 : \overline{\Theta \Lambda}^2 :: \overline{\Theta A}^2 : \overline{\Theta A}^2$: τὸ ἄρα $\overline{K\Theta}^2 = \overline{\Theta \Lambda}^2$. καὶ ἡ ΚΘ ἄρα ἴση τῇ ΘΛ. ὅπερ ἄτοπον. ὐκ ἄρα εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς ΑΓ εὐθείας, καὶ τῆς ΑΗ καμπύλης ἑτέρα εὐθεῖα παρεμπεσεῖται.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε′. (ε)

Ἐὰν Παραβολῆς εὐθεῖα ἐπιψαύυσα συμπίπτῃ τῇ Διαμέτρῳ, ἡ διὰ τῆς ἁφῆς παράλληλος ἀγομένη τῇ διαμέτρῳ ἐπὶ ταὐτὰ τῆς τομῆς, τὰς ἀγομένας ἐν τῇ τομῇ παραλλήλυς τῇ ἐφαπτομένῃ δίχα τέμνει· εἰσὶ δὲ ὡς τὰ ἀπ᾽ αὐτῶν τετράγωνα πρὸς ἄλληλα, ὕτως αἱ ἀποτεμνόμεναι ὑπ᾽ αὐτῶν ἀπὸ τῆς παραλλήλυ τῇ Διαμέτρῳ πρὸς τῇ ἁφῇ.

(υ) Κατὰ τὴν γ′, τῦ ι. (φ) Κατὰ τὴν β′. (χ) Κατὰ τὴν α′ τῦ ϛ′. (ψ) Ἐκ τῆς κατασκ. (ω) Ἐκ τῆς κατασκ. (α) Κατὰ τὴν α′ τῦ ϛ′. (β) Κατὰ τὴν β′. (γ) Κατὰ τὴν ε, τῦ ι. (δ) Κατὰ τὴν ιθ′. τῦ ϛ′. (ε) Τὸ μὲν α′ μέρ. ἡ μϛ′. πρότ. ἐςὶ τῦ α′. βιβλ. τῦ Ἀπολλων. τὸ δὲ 6′. Συνέπ. τῆς μθ′. τῦ αὐτ.

Ἔςω Παραβολὴ, ἧς Διάμετρος ἡ ΑΛ, καὶ ἐφαπτέσθω τῆς τομῆς ἡ ΤΜ, συμπίπτουσα τῇ ΑΛ κατὰ τὸ Τ. διὰ δὲ τοῦ Μ παράλληλος ἤχθω τῇ ΑΛ ἡ ΒΜΚ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς τομῆς τυχόντα σημεῖα τὰ Ε, Α. καὶ ἤχθωσαν τῇ ΤΜ παράλληλοι αἱ ΕΥΙΦ, ΑΡΧ. λέγω Α΄. ὅτι ἡ μὲν ΕΙ $=$ ΙΦ, ἡ δὲ ΑΡ τῇ ΡΧ. Β΄. ὅτι ὡς $\overline{ΕΙ}^2 : \overline{ΑΡ}^2 ::$ ΜΙ : ΜΡ. σχ. 3.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἀπὸ τῶν Ε, Μ, Φ, Χ σημείων κατήχθωσαν τεταγμένως ἐπὶ τὴν ΑΛ Διάμετρον αἱ ΨΕΗ, ΜΠ, ΦΝ, ΧΛ. ἤχθω δὲ καὶ ἡ κατὰ κορυφὴν ἁπτομένη ΑΒ.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Α΄.

Τὸ μὲν ΦΥΝ τρίγωνον ἴσον ἐςὶ τῷ παραλληλογράμμῳ ΝΒ· τὸ δὲ ΕΥΗ, τῷ ΗΒ. ἀφῃρήσθω ἀπὸ μὲν τοῦ ΦΥΝ τὸ ΕΥΗ, ἀπὸ δὲ τοῦ ΝΒ τὸ ΗΒ. τὸ ἄρα τραπέζιον ΗΕΦΝ ἴσον τῷ παραλληλογράμμῳ ΝΨ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΝΗΕΙΖ τραπέζιον. οὐκοῦν τὸ ΖΙΦ τρίγωνον ἴσον τῷ ΕΙΨ τριγώνῳ. ἔςι δὲ ὡς ΖΙΦ : ΕΙΨ :: $\overline{ΦΙ}^2 : \overline{ΙΕ}^2$. (ζ) τὸ ἄρα $\overline{ΦΙ}^2 = \overline{ΙΕ}^2$. διὸ καὶ ἡ ΦΙ $=$ ΙΕ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἡ ΑΡ $=$ ΡΧ.

Ἐὰν δὲ ἡ τῇ ἐφαπτομένῃ ΜΤ ἀχθεῖσα παράλληλος ΕΦ (σχ. 5.) συμπίπτῃ τῇ Διαμέτρῳ ἐντὸς τῆς τομῆς, κατὰ τὸ Υ, δειχθήσεται πάλιν ἡ μὲν ΕΙ $=$ ΦΙ, ἡ δὲ ΑΡ $=$ ΡΧ οὕτω· τὸ τρίγωνον ΥΦΝ ἴσον ἐςὶ τῷ παραλληλογράμμῳ ΝΒ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ τραπέζιον ΖΙΥΝ. τὸ ἄρα τρίγωνον ΦΙΖ ἴσον τῷ τραπεζίῳ ΙΒΑΥ, εἴτουν τῷ ΙΨΗΥ $+$ ΗΒ. ἀλλὰ τὸ παραλληλόγραμμον ΗΒ ἴσον, τῷ τριγώνῳ ΕΥΗ. τὸ ἄρα ΦΙΖ $=$ ΙΨΗΥ $+$ ΕΥΗ, εἴτουν τῷ ΕΙΨ τριγώνῳ. ἀλλ' ὡς ΦΙΖ : ΕΙΨ :: $\overline{ΦΙ}^2 : \overline{ΕΙ}^2$. τὸ ἄρα $\overline{ΦΙ}^2 = \overline{ΕΙ}^2$. διὸ καὶ ἡ ΦΙ $=$ ΕΙ. ἐπεὶ δὲ τὰ

(ζ) Κατὰ τὴν ιθ΄. τοῦ ς΄.

τὸ ΛΑΧ = ΛΒ, κοινȣ̃ ἀφαιρεθέντος τȣ̃ τραπεζίȣ ΛΑΡΚ, ἔσεται τὸ ΑΡΒ = ΚΡΧ. ἀλλ' ὡς ΑΡΒ : ΚΡΧ :: $\overline{\text{ΑΡ}}^2$: $\overline{\text{ΡΧ}}^2$. τὸ ἄρα $\overline{\text{ΑΡ}}^2 = \overline{\text{ΡΧ}}^2$. διὸ ΑΡ = ΡΧ.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β΄.

Τῶν ΑΓΤ, ΒΓΜ τριγώνων αἱ μὲν πρὸς τῷ Γ γωνίαι (κ. 3 ϗ 5.) ἴσαι, (η) ἡ δὲ πρὸς τῷ Α ἴση τῇ πρὸς τῷ Β, (θ) ἔςι δὲ ϗ ἡ ΑΓ = ΜΒ. ἔςι γὰρ ἡ ΜΒ = ΑΠ, ἡ δὲ ΑΠ = ΑΤ. (ι) ἴσον ἄρα τὸ ΑΓΤ τρίγωνον τῷ ΒΓΜ τριγώνῳ. (κ) κοινὸν προσκείσθω τὸ τραπέζιον ΑΓΜΡ. τὸ ἄρα ΑΡΜΤ παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ ΑΡΒ τριγώνῳ. ἀλλὰ τὸ ΑΡΒ = ΚΡΧ, ὡς δέδεικται. τὸ ἄρα ΑΡΜΤ = ΚΡΧ. προσκείσθω πάλιν τοῖς αὐτοῖς τριγώνοις ΑΓΤ, ΒΓΜ κοινὸν τὸ τραπέζιον ΑΓΜΖΝ. ἐκεῖν τὸ τετράπλευρον ΤΜΖΝ ἴσον τῷ παραλληλογράμμῳ ΝΒ. ἀλλὰ τὸ ΝΒ = ΝΦΥ, τὸ ἄρα ΤΜΖΝ = ΝΦΥ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ τετράπλευρον ΥΙΖΝ τὸ ἄρα παραλληλόγραμμον ΥΙΜΤ = ΙΖΦ. ὡς ἄρα ΑΡΜΤ : ΥΙΜΤ :: ΚΡΧ : ΙΖΦ. ἀλλ' ὡς μὲν ΑΡΜΤ : ΥΙΜΤ :: ΜΡ : ΜΙ, (λ) ὡς δὲ ΚΡΧ : ΙΖΦ :: $\overline{\text{ΧΡ}}^2$: $\overline{\text{ΦΙ}}^2$. (μ) ἄρα καὶ ὡς ΜΡ : ΜΙ :: $\overline{\text{ΧΡ}}^2$: $\overline{\text{ΦΙ}}^2$. (ν) ἔςι δὲ ἡ μὲν ΧΡ = ΑΡ, ἡ δὲ ΦΙ = ΕΙ. (ξ) ἄρα ϗ ὡς ΜΡ : ΜΙ :: $\overline{\text{ΑΡ}}^2$: $\overline{\text{ΕΙ}}^2$. ϗ ἀνάπαλιν $\overline{\text{ΕΙ}}^2$: $\overline{\text{ΑΡ}}^2$ :: ΜΙ : ΜΡ.

ΣΥΝΕΠΕΙΑΙ.

Α΄. Δευτεραία ἄρα Διάμετρός ἐςιν ἡ ΜΖ, (ο) ἀχθείσης δὲ τῆς κατὰ κορυφὴν ἁπτομένης ΑΒ, ἔσεται ἡ Ὑφαπτομένη ΒΡ διπλασία τῆς ἀποτετμημένης ΜΡ.

(η) Κατὰ τὴν ιε. τȣ̃ α΄ (θ) Κατὰ τὴν κθ΄. τȣ̃ α. (ι) Κατὰ τὸ μετὰ τὴν δ΄. Πόρισ. (κ) Κατὰ τὴν κϛ΄. τȣ̃ α. (λ) Κατὰ τὴν α. τȣ̃ ϛ΄. (μ) Κατὰ τὴν ιθ΄. τȣ̃ ϛ΄. (ν) Κατὰ τὴν ε. τȣ̃ ε. (ξ) Κατὰ τὸ α. μέρ. τῆς προκειμ. προτ. (ο) Κατὰ τὸν κε ὁρισμ.

ἐπεὶ γὰρ ἡ ΠΑ $=$ ΑΤ. (π) ἔςι δὲ ἡ μὲν ΠΑ $=$ ΜΒ, ἡ δὲ ΑΤ $=$ ΜΡ. (ϱ) ἄϱα ϗ ἡ ΜΒ $=$ ΜΡ. διὸ ἡ ΒΡ διπλασία τῆς ΜΡ.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Ἐντεῦθεν ἄλλη πρόεισι μέθοδος τȣ̃ ἐφαπτομένην ἄγειν ἀπὸ τȣ̃ δοθέντος τῆς Παραβολῆς σημείȣ, οἷον τȣ̃ Μ. ἤχθω γὰρ ἀπὸ τȣ̃ Μ ἡ Δευτεραία Διάμετρος ΒΜΖ τῇ κατὰ κορυφὴν ἐφαπτομένῃ συμπίπτȣσα κατὰ τὸ Β. ϗ ληφθείσης τῆς ΜΡ ἴσης τῇ ΜΒ, ἀπὸ τῆς κορυφῆς Α ἐπὶ τὸ Ρ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΡ. ἔςαι δὴ ȣ̃ν ἡ ἀπὸ τȣ̃ Μ τῇ ΡΑ ἀγομένη παράλληλος ΜΓ ἐφαπτομένη τῆς Παραβολῆς κατὰ τὸ Μ.

Β΄. Εὑρεθείσης τῆς ὀρθίας πλευρᾶς Χ τῆς Δευτεραίας Διαμέτρȣ ΜΖ, εἴτȣν τῆς τρίτης ἀναλόγȣ τῆς ἀποτετμημένης ΜΙ, ϗ τῆς τεταγμένης ΙΕ, (σ) ἔσεται τὸ ἀπὸ πάσης τεταγμένης τετράγωνον, οἷον τὸ ἀπὸ τῆς ΡΑ ἴσον τῷ ὀρθογωνίῳ τῷ ὑπὸ τῆς ἀποτεμνομένης ὑπ' αὐτῆς ΜΡ ϗ τῆς ὀρθίας πλευρᾶς Χ περιεχομένῳ. ἐπεὶ γὰρ ὡς ΜΙ : ΙΕ : : ΙΕ : Χ. ἄρα τὸ ΜΙ. Χ $= \overline{\text{ΙΕ}}^2$. (τ) ἔςι δὲ ὡς ΜΙ : ΜΡ : : $\overline{\text{ΙΕ}}^2 : \overline{\text{ΡΑ}}^2$, (υ) διὸ ϗ ὡς ΜΙ : ΜΡ : : ΜΙ. Χ : $\overline{\text{ΡΑ}}^2$. τὸ ἄρα ΜΙ. $\overline{\text{ΡΑ}}^2 =$ ΜΡ. ΜΙ. Χ. ϗ τῶν ἴσων διὰ τῆς ΜΙ διαιρεθέντων, ἔσεται τὸ $\overline{\text{ΡΑ}}^2 =$ ΜΡ. Χ. (φ).

Γ΄. Καὶ τὸ ὀρθογώνιον δὲ τὸ ὑπὸ τȣ̃ ἀθροίσματος δύω ὁποιωνȣ̃ν τεταγμένων ϗ τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν περιεχόμενον ἴσον δειχθήσεται τῷ ὀρθογωνίῳ τῷ ὑπὸ τῆς

(π) Κατὰ τὸ ἄρτι. Πόρισ. (ϱ) Κατὰ τὴν λδ΄. τȣ̃ ά. (σ) Ὅρα τὸν κά. ὁρισμ. (τ) Κατὰ τὴν ιϛ΄ τȣ̃ ϛ΄. (υ) Κατὰ τὸ β΄. μέρ. τῆς προκειμ. προτ. (φ) Ἡ μθ΄. πρότ. ἐςὶ τȣ̃ ά βιβλ. τȣ̃ Ἀπολλων.