νία ΑΓΒ, γνωστὴ ἔσται καὶ ἡ λοιπὴ τοῦ τριγώνου πλευρὰ ΑΒ, (κ) ἥτις ἐστὶ τὸ ζητούμενον ἀπόστημα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'.

Τοῦ προσιτοῦ πύργου ΒΓ τὸ ὕψος εὑρεῖν. χ. 31.

ΠΡΑΚΤΕΟΝ.

Τόπον εὑρὼν τὸν Α πρὸς τὸ ὁρᾷν τὴν τοῦ πύργου κορυφὴν Β ἐπιτήδειον, βακτηρίαν τὴν ΑΕ πρὸς ὀρθὰς τῷ ὁρίζοντι πῆξον. ἐπιζεύξας δὲ λεπτὸν χοινίον τὸ ΑΔ παραλλήλως τῇ ὁριζοντίῳ ΕΓ, τὸν Γωνιομέτρην τε ἐπὶ τὸ Α στήσας, διὰ τῆς διόπτρας τὸ πέρας τῆς τοῦ πύργου κορυφῆς Β ὅρα. καταμέτρησον δὲ τήν τε ΒΑΔ γωνίαν, τὴν ὑπὸ τοῦ χοινίου ΑΔ καὶ τῆς ἀκτῖνος τοῦ φωτὸς τῆς ἀπὸ τοῦ πέρατος Β ἐπὶ τὸν ὀφθαλμὸν πεμπομένης περιεχομένην, ἔτι δὲ καὶ τὸ ΑΔ χοινίον. καὶ ἐπὶ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΔΒ γνωσταί εἰσι δύω γωνίαι, ἥτε καταμετρηθεῖσα ΒΑΔ καὶ ἡ ὀρθὴ ΑΔΒ, ἔτι δὲ καὶ ἡ πλευρὰ ΑΔ, γνωστὴ ἄρα καὶ ἡ ΒΔ. (λ) ἀλλὰ καὶ ἡ ΔΓ γνωστὴ, ὡς ἴση τῇ ΑΕ, γνωστὴ ἄρα καὶ ὅλη ἡ ΒΓ, τουτέστι τὸ ζητούμενον ὕψος.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'.

Τὸ ἀπόστημα ΑΒ εὑρεῖν δύω τόπων τῶν Α καὶ Β, ὧν ὁ ἕτερος μόνον Α προσιτός. χ. 32.

ΠΡΑΚΤΕΟΝ.

Ἐν τῷ τυχόντι τόπῳ Γ, ἐξ οὗ ὁρατὸς μὲν ὁ Β, προσιτὸς δὲ ὁ Α, βακτηρίαν στήσας, ὡσαύτως καὶ τῷ Α τόπῳ, καὶ λεπτὸν χοινίον τὸ ΑΓ ἐπιζεύξας καὶ ἐντείνας, καὶ ἀπὸ ἑκατέρου τῶν τόπων Α καὶ Γ, τὸν Β θεασάμενος, τὰς ΒΑΓ, ΒΓΑ γωνίας, ᾧ ἐν τῷ προλαβόντι προ-

(κ) Κατὰ τὸ θ'. πρόβλ. (λ) Κατὰ τὸ γ'. πρόβλ.

προβλήματι εἴρηται τρόπῳ καταμέτρησον, ἐμὴν ἀλλὰ καὶ τὸ ΑΓ χοινίον. καὶ ἐπεὶ τῦ ΑΒΓ τριγώνυ γνωσαὶ εἰσι δύω γωνίαι αἱ ΑΓΒ, ΓΑΒ, καὶ μία πλευρὰ ἡ ΑΓ, γνωςὴ ἔσαι καὶ ἡ ΑΒ, (μ) τὸ ζητόμενον δηλονότι ἀπόσημα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'.

Ευρεῖν τὸ ΑΒ ἀπόσημα τῶν Α καὶ Β ἀπροσίτων τόπων. χ. 33.

ΠΡΑΚΤΕΟΝ.

Τρεῖς ἐπ' εὐθείας ἐκλέξας τόπυς, ἐξ ὧν ὁρατοὶ οἱ δύω Α καὶ Β, ἐπίζευξον ἐν αὐτοῖς τὸ λεπτὸν χοινίον ΔΓΕ. καὶ ἀπὸ ἑνὸς ἑκάςυ αὐτῶν διὰ τῶν ΕΒ, ΓΒ, ΓΑ, ΔΑ ἀκτίνων τῶν ἐπὶ τὺς ὀφθαλμὺς πιπτυσῶν, τὺς Α καὶ Β τόπυς θεασάμενος, καταμέτρησον, ὡς εἴρηται, τάστε γωνίας ΒΕΓ, ΒΓΕ, ΒΓΑ, ΑΓΔ, ΑΔΓ, καὶ τὰ ΓΕ, ΓΔ χοινία. Ἐπεὶ δὲ τῦ τριγώνυ ΒΓΕ γνωσαὶ εἰσι δύω γωνίαι, ἡ ΒΕΓ καὶ ἡ ΒΓΕ, καὶ μία πλευρὰ ἡ ΓΕ, γνωςὴ ἄρα ἔσαι καὶ ἡ ΓΒ. (ν) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ γνωςὴ καὶ ἡ τῦ ΑΓΔ τριγώνυ πλευρὰ ΑΓ. ἐπεὶ ἐν τῷ ΑΓΒ τριγώνυ γνωσαί εἰσι δύω πλευραὶ, αἱ ΓΒ, ΓΑ, καὶ ἡ ὑπ' αὐτῶν περιεχομένη γωνία ΑΓΒ, γνωςὴ ἄρα ἔσεται καὶ ἡ ΑΒ πλευρὰ, ἥτις ἐςὶ τὸ ζητόμενον τῶν δύω ἀπροσίτων τόπων ἀπόσημα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε'.

Τῦ ἀπροσίτυ πύργυ ΑΒ τὸ ὕψος εὑρεῖν. χ. 34.

ΠΡΑΚΤΕΟΝ.

Δύω τόπυς εὑρὼν τὺς Ε, Ζ, ἐπ' εὐθείας τῇ ὁριζοντίῳ ΕΒ κειμένυς, καὶ τὺς Γωνιομέτρας ΕΔ, ΖΗ ἐπ' αὐτῶν

(μ) Κατὰ τὸ ζ. πρόβλ. (ν) Κατὰ τὸ αὐτ. πρόβλ.

τῶν πρὸς ὀρθὰς ςήσας, καὶ λεπτὸν χοινίον τὸ ΔΗ παράλληλον τῇ ΕΒ ἐπιζεύξας καὶ ἐντείνας, καὶ ἀπὸ τῶν Δ καὶ Η τὸ ἔσχατον τῆς κορυφῆς Α πέρας, καὶ τὸ ἔσχατον τῆς βάσεως Β θεασάμενος, καταμέτρησον, ὡς ἄρηται, τὰς ΑΔΓ, ΑΗΓ, ΓΗΒ γωνίας, καὶ τὸ ΔΗ χοινίον. καὶ ἐπεὶ τοῦ ΔΑΗ τριγώνου γνωςὴ μὲν ἡ ΑΔΗ γωνία ὡς καταμετρηθεῖσα, γνωςὴ δὲ καὶ ἡ ΑΗΔ, ὡς παραπλήρωμα πρὸς δύω ὀρθὰς τῆς καταμετρηθείσης ΒΗΓ, γνωςὴ δὲ καὶ ἡ ΗΔ πλευρὰ, γνωςὴ ἄρα ἔςαι καὶ ἡ ΑΗ. (ξ) τοῦ ὀρθογωνίου οὖν τριγώνου ΑΗΓ γνωςαὶ αἱ δύω γωνίαι, ἤτε ὀρθὴ ΑΓΗ, καὶ ἡ καταμετρηθεῖσα ΑΗΓ, γνωςὴ δὲ καὶ ἡ ΑΗ πλευρὰ, γνωςαὶ ἄρα ἔσονται καὶ αἱ λοιπαὶ αὐτοῦ πλευραὶ, ΑΓ, ΗΓ. (ο) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ γνωςὴ ἔσεται καὶ ἡ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΗΓΒ πλευρὰ ἡ ΓΒ. γνωςὴ δὲ καὶ ἡ ΑΓ, γνωςὴ ἄρα ὅλη ἡ ΑΒ, ἥτις ἐςὶ τὸ ζητούμενον ὕψος ΑΒ. Ὁμοίαις μεθόδοις καὶ ἄλλα τοιαῦτα, καὶ αὐτὰ δὴ τὰ ἀςρονομικὰ, ἐπιλύεται προβλήματα.

ΤΕΛΟΣ

ΤΗΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ.

ΚΩ-

(ξ) Κατὰ τὸ αὐτ. πρόβλ. (ο) Κατὰ τὸ β'. πρόβλ.

ΚΩΝΙΚΩΝ ΤΟΜΩΝ ΣΥΜΠΤΩΜΑΤΑ ΤΑ ΚΥΡΙΩΤΕΡΑ.

ΟΡΙΣΜΟΙ.

Α'. Ἐὰν ἀπότινος σημείου Α πρὸς κύκλου περιφέρειαν τὴν ΔΕΒ, ὃς οὐκ ἔστιν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἐν ᾧ τὸ σημεῖον, εὐθεῖα ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΑΔ, ἐφ᾽ ἑκάτερα προσεκβληθῇ· καὶ μένοντος τοῦ σημείου Α, ἡ εὐθεῖα ΑΔ περὶ τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν περιενεχθεῖσα, εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι· τὴν γραφεῖσαν ὑπὸ τῆς εὐθείας ΑΔ ἐπιφάνειαν, ἣ σύγκειται ἐκ δύω ἐπιφανειῶν, κατὰ κορυφὴν ἀλλήλαις κειμένων, ὧν ἑκατέρα εἰς ἄπειρον αὔξεται, τῆς γραφούσης εὐθείας εἰς ἄπειρον προσεκβαλλομένης, Ἐπιφάνειαν κωνικὴν καλοῦσι. πίν. Α. σχ. 1.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. (*)

Ἐκ τούτου φανερὸν, ὅτι αἱ ἀπὸ τοῦ σημείου Α τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας ἐπιζευγνύμεναι ἐπὶ τὰ ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ σημεῖα Β, Η, εἴτουν αἱ ΑΒ, ΑΗ ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ εἰσί. μὴ γάρ. οὐκοῦν ἐὰν περιενεχθῇ ἡ ΑΔ, ἡ τὴν κωνικὴν ἐπιφάνειαν γεγραφυῖα, καὶ διὰ τῶν σημείων Η καὶ Β ἥξῃ, δύω εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΑΖΒ, καὶ αἱ ΑΗ, ΑΘΗ χωρίον περιέξουσιν. ὅπερ ἀδύνατον. σχ. 2.

Β'. **Κῶνον** καλοῦσι τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τοῦ κύκλου ΔΕΒ, καὶ τῆς μεταξὺ τοῦ μεμενηκότος σημείου Α καὶ τοῦ κύκλου περιφερείας κωνικῆς ἐπιφανείας. σχ. 1.

Γ'. **Κορυφὴν** δὲ τῆς τε κωνικῆς ἐπιφανείας καὶ τοῦ κώνου αὐτὸ τὸ μεμενηκὸς σημεῖον Α.

Δ'. **Ἄξονα** δὲ τῆς τε κωνικῆς ἐπιφανείας καὶ τοῦ Κώνου τὴν ἀπὸ τῆς κορυφῆς Α ἐπὶ τὸ κέντρον Κ τοῦ κύκλου ΔΕΒ ἐπιζευγνυμένην εὐθεῖαν ΑΚ.

Ε'. **Βάσιν** δὲ τῆς μὲν κωνικῆς ἐπιφανείας, τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν· τοῦ δὲ Κώνου, αὐτὸν τὸν κύκλον ΔΕΒ.

ς'. Καὶ **ὀρθὸν** μὲν Κῶνον, τὸν ΑΔΕΒ, τὸν πρὸς ὀρθὰς ἔχοντα τῇ βάσει τὸν Ἄξονα ΑΚ· (σχ. 1.) **Σκαληνὸν** δὲ τὸν ΑΓΕΒ, τὸν μὴ πρὸς ὀρθὰς ἔχοντα τῇ βάσει ΓΕΒ τὸν Ἄξονα ΑΚ. σχ. 3.

Ζ'. Πάσης καμπύλης γραμμῆς, οἷον τῆς ΑΒΘ, ἥτις ἐστὶν ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ, (ἡ τοῦ κυλίνδρου ἕλιξ καὶ τῆς Σφαίρας οὐκ ἔστιν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ.) **Διάμετρον** μὲν καλοῦσιν εὐθεῖαν τὴν ΑΒ, ἥτις ἠγμένη ἀπὸ τῆς

κοιμ-

(*) Η' α. πρότ. ἐστὶ τοῦ α. βιβλ. τοῦ Ἀπολλωνίου.

καμπύλης γραμμῆς ΑΒΘ, πάσας τὰς ἀγομένας ἐν αὐτῇ εὐθείας, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ παραλλήλους δίχα τέμνει. σχ. 4.

Η΄. Ἄξονα δὲ τὴν αὐτὴν Διάμετρον ΑΒ, ἐὰν δίχα τε καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνῃ τὰς παραλλήλους ΙΚ, ΛΜ, ΝΞ. σχ. 5.

Θ΄. Καμπύλων δὲ γραμμῶν τῶν ΕΑΖ, ΘΒΛ ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ κειμένων, Διάμετρον μὲν πλαγίαν καλοῦσιν εὐθεῖαν τὴν ΑΜ, ἢ ΒΗ, ἥτις τὰς δύω καμπύλας γραμμὰς τέμνουσα, πάσας τὰς ἀγομένας παραλλήλους ΓΔ, ΕΖ, ΙΚ, ΘΛ ἐν ἑκατέρᾳ τῶν καμπύλων γραμμῶν δίχα τέμνει· Ἄξονα δὲ, εἰ δίχα καὶ πρὸς ὀρθάς. σχ 6 καὶ 7.

Ι΄. Ὀρθίαν δὲ Διάμετρον εὐθεῖαν τὴν ΠΡ, ἥτις κειμένη μεταξὺ τῶν δύω καμπύλων ΕΑΖ, ΘΒΛ, πάσας τὰς ἀγομένας εὐθείας ΕΘ, ΓΙ, ΔΚ, ΖΛ παραλλήλους τῇ πλαγίᾳ Διαμέτρῳ ΑΜ, τὰς ἀπολαμβανομένας μεταξὺ τῶν καμπύλων γραμμῶν δίχα τέμνει· ἐὰν δὲ δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς, Ἄξονα ὀρθόν.

ΙΑ΄. Καὶ συζυγεῖς μὲν Διαμέτρους καμπύλης γραμμῆς τῆς ΒΑΘ, καὶ δύω καμπύλων γραμμῶν, τῶν ΕΑΖ, ΘΒΛ εὐθείας τὰς ΑΒ, ΠΡ, ὧν ἑκατέρα Διάμετρος οὖσα, τὰς τῇ ἑτέρᾳ παραλλήλους δίχα διαιρεῖ· (σχ. 4, 6.) εἰ δὲ δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς, Ἄξονας συζυγεῖς. σχ. 5, καὶ 7.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄.

Πᾶς ἄρα Ἄξων, Διάμετρός ἐστιν, οὐχὶ δὲ καὶ τἀναντίον.

ΙΒ΄.

ΙΒ'. **Κορυφὴ** μὲν καμπύλης γραμμῆς λέγεται τὸ ἐν αὐτῇ πέρας Α τῆς Διαμέτρȣ ΑΒ. (σχ. 8.) **Κορυφαὶ** δὲ καμπύλων γραμμῶν τὰ πρὸς αὐταῖς πέρατα. Α, Β. σχ. 4, 5, 6, 7.

ΙΓ'. **Τεταγμένως** δὲ κατῆχθαι ἐπὶ τὴν Διάμετρον ΑΒ, ἡ **Τεταγμένη**, ἑκάστη τῶν ἐν ταῖς καμπύλαις γραμμαῖς παραλλήλων, ΓΔ, ΕΖ, (σχ. 4.) ΙΚ, ΛΜ, (σχ. 5.) ΕΖ, ΓΔ, ΙΚ, ΘΛ, (σχ. 6, 7.) ΙΚ, ΛΜ. σχ. 8.

ΙΔ'. **Ἀποτετμημένη** δὲ μέρος, οἷον τὸ ΑΥ, ΑΦ τῆς Διαμέτρȣ, τὸ ἀπὸ τῆς κορυφῆς Α, καὶ τῆς τεταγμένης ΓΔ, ΙΚ, (σχ. 4, 5.) ἢ ΕΖ, ΙΚ, (σχ. 6, 7.) ἢ ΛΜ ἀπολαμβανόμενον. (σχ. 8. 5.)

ΙΕ'. Ἐὰν ὁ Κῶνος ΑΒΔ ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τῆς κορυφῆς Α, ἡ τομὴ **τρίγωνον** ἔσται· ἤτοι τὸ ΒΑΔ, ἐὰν διὰ τῆς κορυφῆς καὶ τȣ̃ Ἄξονος· (σχ. 1.) ἢ τὸ ΑΒΝ, ἐὰν διὰ μόνης τῆς κορυφῆς. σχ. 2.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Α'.

Ἰστέον, ὅτι ὁ ὁρισμὸς ȣ̃τος ἡ τρίτη πρότασις τȣ̃ α. βιβλίȣ τȣ̃ Ἀπολλωνίȣ ἐστίν. ἧς ἡ δεῖξις ἐπίδηλος. ἐπεὶ γὰρ ἡ ἀπὸ τȣ̃ Α ἐπὶ τὸ Β ἐπιζευγνυμένη κοινὴ τομή ἐστι τȣ̃ τέμνοντος ἐπιπέδȣ καὶ τῆς τȣ̃ Κώνȣ ἐπιφανείας, εὐθεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ, ὁμοίως δὲ καὶ ἡ ΑΔ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΒΔ εὐθεῖα. τρίγωνον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΑΔ. σχ. 1, 2.

ΙϚ'. Ἐὰν κῶνος ὁ ΑΒΔ ἐπιπέδῳ τμηθῇ τῷ ΗΙΖ παραλλήλῳ τῇ τȣ̃ κώνȣ βάσει ΒΕΔ, τὸ ἀπολαμβανόμενον ἐπίπεδον μεταξὺ τῆς ἐπιφανείας, εἴτȣν ἡ γινομένη τομή, **κύκλος** ἐστί, τὸ κέντρον ἔχον ἐπὶ τȣ̃ Ἄξονος ΑΚ. πίν. Β. σχ. 1.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β΄.

Ὁ ὁρισμὸς οὗτος ἡ τετάρτη πρότασις ἐστὶ τοῦ α΄. βιβλίου τοῦ Ἀπολλωνίου, ἥτις κἂν ἐκ τῆς τοῦ Κώνου γενέσεως προφανής, δείκνυται δ' οὖν ὅμως οὑτωσί· συμβαλλέσθω ἐπίπεδον διὰ τῆς ΑΚ, καὶ ἔσται δὴ τρίγωνον τὸ ΑΒΔ. (α) καὶ εἰλήφθω τυχὸν σημεῖον τὸ Ι ἐπὶ τῆς ΗΙΖ γραμμῆς, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΑΙ, ἐκβεβλήσθω. αὕτη δὴ συμπεσεῖται τῇ περιφερείᾳ τοῦ κύκλου ΒΕΔ. (β) καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου Γ, καθ' ὃ τὸ τέμνον ἐπίπεδον τῷ ΑΚ Ἄξονι συμβάλλει, ἐπὶ τὸ Ι ἐπεζεύχθω ἡ ΓΙ, ὁμοίως καὶ ἡ ΚΕ. καὶ ἐπεὶ ὡς ΑΚ : ΑΓ :: ΚΔ : ΓΖ, (γ) ἔστι δὲ καὶ ὡς ΑΚ : ΑΓ :: ΚΕ : ΓΙ, ἄρα καὶ ὡς ΚΔ : ΓΖ :: ΚΕ : ΓΙ. (δ) ἀλλ' ἡ ΚΔ = ΚΕ. ἄρα καὶ ἡ ΓΖ = ΓΙ. (ε) ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ πᾶσαι αἱ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου πρὸς τὴν ΗΙΖ γραμμὴν προσπίπτουσαι εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. κύκλος ἄρα ἐστὶν ὁ ΗΙΖ, τὸ κέντρον ἔχων ἐπὶ τοῦ Ἄξονος ΑΚ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Γ΄. (ζ)

Καὶ ἄλλως δὲ τοῦ σκαληνοῦ Κώνου τεμνομένου, ἡ τομὴ κύκλος ἐστί. τετμήσθω γὰρ ὁ ΑΒΛ κῶνος (σχ. 2.) ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ Ἄξονος ΑΚ, ὀρθῷ πρὸς τὴν τοῦ Κώνου βάσιν ΒΕΛ. τετμήσθω δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὄντι τῷ ΑΒΛ οὕτως ὑπεναντίως ἠγμένῳ, ὥστε τὴν ΑΘΖ γωνίαν ἴσην εἶναι τῇ ΑΒΛ, καὶ ποιείτω τομὴν ἐν τῇ τοῦ Κώνου ἐπιφανείᾳ τὴν ΖΗΘ. λέγω, ὅτι κύκλος ἐστὶν ἡ ΖΗΘ. ἀπὸ γὰρ τῶν τυχόντων σημείων τῆς τε ΖΗΘ γραμμῆς καὶ τῆς ΒΕΛ περιφερείας ἤχθωσαν αἱ ΗΦ, ΕΙ πρὸς ὀρθὰς τῷ ἐπιπέδῳ ΑΒΛ. αἵτινες δὴ καὶ ταῖς

(α) Κατὰ τὸν ιε΄. ὁρισμ. (β) Κατὰ τὸ α΄. Πόρ. (γ) Κατὰ τὴν ις΄. τοῦ ια΄. καὶ τὴν δ΄. τοῦ ς΄. (δ) Κατὰ τὴν ε΄. τοῦ α΄. (ε) Κατὰ τὴν β΄. τοῦ ε΄. (ζ) Ἡ ε΄. πρότ. ἐστὶ τοῦ α΄. βιβλ. τοῦ Ἀπολλων.

ταῖς κοιναῖς τῶν ἐπιπέδων τομαῖς ΖΘ, ΒΛ πρὸς ὀρθὰς ἔσονται. (η) παράλληλος ἄρα ἡ ΗΦ τῇ ΕΙ. (θ) καὶ ἀπὸ τοῦ Φ, καθ᾽ ὃ τὸ τέμνον ἐπίπεδον τῷ ΑΚ Ἄξονι συμβάλλει, ἤχθω ἡ ΔΦΓ παράλληλος τῇ ΒΛ. τὸ ἄρα διὰ τῶν ΗΦ, ΔΓ ἐπίπεδον παράλληλόν ἐστι τῷ διὰ τῶν ΒΛ, ΕΙ. (ι) ἡ ἄρα ΔΗΓ γραμμὴ κύκλος ἐστί. (κ) τὸ ἄρα ΔΦ. ΦΓ $= \overline{\Phi H}^2$. (λ) ἔστι δὲ ὡς ΔΦ : ΘΦ :: ΖΦ : ΦΓ. (μ) ὅμοια γὰρ τὰ ΔΦΖ, ΓΦΘ τρίγωνα. τὸ ἄρα ΔΦ. ΦΓ = ΘΦ. ΦΖ. (ν) τὸ ἄρα $\overline{\Phi H}^2 =$ ΘΦ. ΦΖ. ἡ ἄρα ΖΗΘ γραμμὴ κύκλος ἐστὶ, διάμετρον ἔχων τὴν ΖΦΘ. (ξ)

ΙΖʹ. Ἐὰν Κῶνος ὁ ΑΒΔ (χ. 3.) ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τοῦ Ἄξονος, καὶ ποιήσῃ τομὴν τὸ ΒΑΔ τρίγωνον, τμηθῇ δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τέμνοντι τὴν τοῦ κώνου βάσιν ΒΜΔ κατ᾽ εὐθεῖαν τὴν ΖΜ πρὸς ὀρθὰς οὖσαν τῇ βάσει ΒΔ τοῦ διὰ τοῦ Ἄξονος τριγώνου ΒΑΔ, ἡ δὲ κοινὴ τομὴ ΝΚ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου, καὶ τοῦ διὰ τοῦ Ἄξονος τριγώνου, ἡ Διάμετρος τῆς τομῆς καλουμένη, παράλληλος ᾖ μιᾷ πλευρᾷ, τῇ ΑΒ, τοῦ διὰ τοῦ Ἄξονος τριγώνου, ἡ γενομένη τομὴ ΜΝΖ **Παραβολὴ** καλεῖται. (ο)

ΙΗʹ. Ἐὰν Κῶνος ὁ ΑΒΔ (χ. 4.) τμηθῇ διὰ τοῦ Ἄξονος, τμηθῇ δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ, τέμνοντι τὴν τοῦ κώνου βάσιν ΒΖΔ κατ᾽ εὐθεῖαν τὴν ΖΜ πρὸς ὀρθὰς οὖσαν τῇ βάσει ΔΒ τοῦ διὰ τοῦ Ἄξονος τριγώνου ΔΑΒ, καὶ

(η) Κατὰ τὸν δʹ ὁρισ. τοῦ ιαʹ. (θ) Κατὰ τὴν ϛʹ. τοῦ ιαʹ. (ι) Κατὰ τὴν ιεʹ. τοῦ ιαʹ. (κ) Κατὰ τὴν βʹ. σημ. (λ) Κατὰ τὴν βʹ. Συνέπ. τῆς ηʹ. τοῦ ϛʹ. (μ) Κατὰ τὴν δʹ. τοῦ ϛʹ. (ν) Κατὰ τὴν ιϛʹ. τοῦ ϛʹ. (ξ) Κατὰ τὴν δʹ. Συνέπ. τῆς ηʹ. τοῦ ϛʹ. (ο) Τόν δὲ τὸν ὁρισ. ἡ ιαʹ. πρότ. τοῦ αʹ. βιβλ. τοῦ Ἀπολλων. περιέχει.

ἡ τῆς τομῆς Διάμετρος ΝΦ ἐκβαλλομένη συμπίπτῃ μιᾷ πλευρᾷ, τῇ ΒΑ ἐκβληθείσῃ, τοῦ διὰ τοῦ Ἄξονος τριγώνου ἐκτὸς τῆς τοῦ Κώνου κορυφῆς, οἷον ἐπὶ τὸ Γ, ἡ γενομένη τομὴ ΜΝΖ Ὑπερβολὴ καλεῖται. (π)

ΙΘʹ. Ἐὰν Κῶνος ὁ ΒΑΔ (σχ. 5.) ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τοῦ Ἄξονος, τμηθῇ δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ συμπίπτοντι μὲν ἑκατέρᾳ πλευρᾷ τοῦ διὰ τοῦ Ἄξονος τριγώνου, μήτε δὲ παραλλήλῳ τῇ βάσει τοῦ Κώνου, μήτε ὑπεναντίως ἠγμένῳ, ἡ γενομένη τομὴ ΝΖΨΜ Ἔλλειψις λέγεται. (ρ)

ΠΟΡΙΣΜΑ Γʹ.

Ἐκ τούτων φανερὸν, ὅτι ἐὰν μὲν ἡ κοινὴ τομὴ ΗΖ (σχ. 1.) τοῦ διὰ τοῦ Ἄξονος τριγώνου καὶ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου παράλληλος ᾖ τῇ βάσει ΒΔ τοῦ τριγώνου, ἢ (σχ. 2). ὑπεναντίως ἠγμένη ἐν τῷ σκαληνῷ Κώνῳ, ἡ γενομένη τομὴ Κύκλος ἐστίν· ἐὰν δὲ τῇ ἑτέρᾳ τῶν τοῦ τριγώνου πλευρῶν, οἷον τῇ ΑΒ, (σχ. 3.) παράλληλος, ὡς ἡ ΝΚ, Παραβολή· Ἐὰν δὲ τῇ ἑτέρᾳ συμπίπτῃ, εἰ μὲν ἐκτὸς τῆς κορυφῆς τοῦ Κώνου, οἷον κατὰ τὸ Γ, (σχ. 4.) Ὑπερβολή· εἰ δὲ ἐντὸς, οἷον κατὰ τὸ Ψ, Ἔλλειψις. σχ. 5.

Κʹ. Ἐὰν οἱ κατὰ κορυφὴν Κῶνοι ΑΒΔ, ΑΤΨ (σχ. 4.) ἐπιπέδῳ τμηθῶσι μὴ διὰ τῆς κορυφῆς, ἔσται ἐν ἑκατέρῳ Κώνῳ τομὴ, ἡ καλουμένη Ὑπερβολή. καλείσθωσαν δὲ αἱ μὲν τοιαῦται τομαὶ, Ἀντικείμεναι, ἡ δὲ μεταξὺ τῶν κορυφῶν Ν, Γ, τῶν τομῶν ΖΝΜ, ΧΓΥ, εὐθεῖα, ἡ ΝΓ, πλαγία πλευρά. (σ)

ΣΗ-

(π) Τοῦτον δὲ ἡ ιβʹ. τοῦ αὐτ. (ρ) Τοῦτον δὲ ἡ ιγʹ. τοῦ αὐτ.
(σ) Ἡ ιδʹ. πρότ. ἐπὶ τοῦ προοιμ. βιβλ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Δ'.

Καὶ ἡ Διάμετρος δὲ τῆς Ἐλλείψεως ΨΝ, ἡ μεταξὺ τῶν κορυφῶν Ν, Ψ **πλαγία** αὐτῆς **πλευρὰ** λέγεται. χ. 5.

ΚΑ'. **Ὀρθία Πλευρὰ**, ἢ **Παράμετρος** λέγεται τῆς μὲν Παραβολῆς (χ. 3) ἡ τρίτη ἀνάλογος ἀποτετμημένης ὁποιασοῦν, καὶ τῆς ἀπολαμβανούσης αὐτὴν τεταγμένης, οἷον ἡ ΝΟ, ἡ τρίτη ἀνάλογος τῶν ΝΠ, ΖΠ· τῆς δὲ Ὑπερβολῆς, (χ. 4.) ἡ τετάρτη ἀνάλογος τοῦ ὀρθογωνίου τοῦ ἐκ τῆς Διαμέτρου καὶ τῆς ὁποιασοῦν ἀποτετμημένης, τοῦ τετραγώνου τῆς τεταγμένης τῆς αὐτὴν ἀπολαμβανούσης, καὶ τῆς πλαγίας πλευρᾶς, οἷον ἡ ΝΣ ἡ τετάρτη ἀνάλογος τῶν ΓΦ. ΦΝ, $\overline{Z\Phi^2}$, ΓΝ· τῆς δὲ Ἐλλείψεως, (χ. 5.) ἡ τετάρτη ἀνάλογος τοῦ ἐκ τῶν τμημάτων τῆς Διαμέτρου ὀρθογωνίου, τοῦ τετραγώνου τῆς τεταγμένης τῆς τὴν Διάμετρον τεμνούσης, καὶ τῆς πλαγίας πλευρᾶς, οἷον ἡ ΝΡ, ἡ τετάρτη ἀνάλογος τῶν ΨΦ. ΦΝ, $\overline{Z\Phi^2}$, καὶ ΨΝ.

ΚΒ'. Τῆς Ὑπερβολῆς καὶ τῆς Ἐλλείψεως ἑκατέρας ἡ διχοτομία Κ, ἢ Γ τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΝΓ, ἢ ΨΝ, **Κέντρον** τῆς τομῆς καλείσθω, ὁμοίως καὶ τῶν Ἀντικειμένων ἡ διχοτομια Κ. χ. 4, καὶ 5.

ΚΓ'. Ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ κέντρου πρὸς τὴν τομην προσπίπτουσα, **ἐκ τοῦ κέντρου τῆς τομῆς**, οἷον ἡ ΓΜ. (πίν. Θ. χ. 2.)

ΚΔ'. Ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου Γ ἠγμένη ΒΔ (πίν. Θ. χ. 1.) παράλληλος τῇ τεταγμένῃ ΜΘ μέσον τε λόγον ἔχου, σα τῶν τοῦ εἴδους πλευρῶν, εἴτουν τῆς πλαγίας ΨΔ καὶ τῆς ὀρθίας, ΑΥ, καὶ διχοτομουμένη, ὑπὸ τοῦ κέντρου **Δευτέρα Διάμετρος** καλείσθω.

ΚΕ΄. **Δευτεραία** δὲ **Διάμετρος** ἐν μὲν τῇ Παραβολῇ ΑΦ, (πίν. Δ. σχ. 3. καὶ 5.) ἡ ἀπὸ τοῦ σημείου τῆς ἁφῆς Μ τῇ πρώτῃ Διαμέτρῳ ΑΛ ἀγομένη παράλληλος ΜΖ, καὶ δίχα τέμνουσα τὰς τῇ ἐφαπτομένῃ ΜΤ παραλλήλους, ΕΦ, ΑΧ· ἐν δὲ τῇ ἐλλείψει ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου Γ ἐπὶ τὸ σημεῖον τῆς ἁφῆς Μ ἐπιζευγνυμένη τε καὶ ἐκβαλλομένη, ΜΓϚ. πίν. ΚΑ΄. σχ. 4.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Ε΄.

Ἐὰν ἡ Διάμετρος αὐτὴ ᾖ ἡ κοινὴ τομὴ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τοῦ διὰ τοῦ Ἄξονος τριγώνου, οἷον ἡ ΝΚ, ἢ ΝΦ, ἢ ἡ ΝΨ, **Διάμετρος ἐκ τῆς γεννήσεως**, ἢ **Διάμετρος ἀρχικὴ**, ἢ **Διάμετρος πρώτη** λέγεται. πίν. Β. σχ. 3, 4, 5.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Ϛ΄.

Ἡ μὲν Παραβολὴ, καὶ ἡ Ὑπερβολὴ, καὶ αἱ Διάμετροι αὐτῶν, αἱ πρῶται καὶ αἱ δευτεραῖαι, τῶν εἰς ἄπειρον εἰσὶν αὐξανομένων, ἡ δὲ Ἔλλειψις καὶ αἱ Διάμετροι αὐτῆς οὐκ ἔτι. πᾶσα γὰρ εἰς αὐτὴν συννεύει ὁμοίως τῷ Κύκλῳ. ἰστέον γὰρ ὅτι καὶ ἡ Ὑπερβολὴ δευτεραίαν ἔχει Διάμετρον, ἐξαγομένην κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον, καθ᾽ ὃν καὶ ἡ ἐν τῇ Παραβολῇ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Ζ΄.

Οἱ παλαιοὶ, φησὶν ὁ Γεμῖνος, (7) Κῶνον ὁριζόμενοι τὴν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου περιφορὰν, μενούσης μιᾶς τῶν

(7) Παρὰ Εὐτοκίῳ ἐν τοῖς Προοιμ. τοῦ α. βιβλ. τῶν Κωνικ. τοῦ Ἀπολλωνίου.

τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν πλευρᾶς, εἰκότως καὶ τὲς Κώνες πάντας ὀρθὲς ὑπελάμβανον γίνεσθαι, καὶ μίαν τομὴν ἐν ἑκάςῳ, ἐν μὲν τῷ ὀρθογωνίῳ τὴν νῦν καλεμένην Παραβολὴν, ἐν δὲ τῷ ἀμβλυγωνίῳ τὴν Ὑπερβολὴν, ἐν δὲ τῷ ὀξυγωνίῳ τὴν Ἔλλειψιν. καὶ ἔςι παρ' αὐτοῖς εὑρεῖν ὀνομαζομένας ὅτω τὰς τομάς. ὥσπερ ὂν τῶν Ἀρχαίων ἐπὶ ἑνὸς ἑκάςε εἴδες τριγώνε θεωρησάντων τὰς δύω ὀρθὰς, πρότερον ἐν τῷ ἰσοπλεύρῳ, καὶ πάλιν ἐν τῷ ἰσοσκελεῖ, καὶ ὕςερον ἐν τῷ σκαληνῷ· οἱ μεταγενέςεροι καθολικὸν θεώρημα ἀπέδειξαν τοιῦτον· παντὸς τριγώνε αἱ ἐντὸς τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· ὅτω καὶ ἐπὶ τῶν τῦ Κώνε τομῶν. τὴν μὲν γὰρ λεγομένην ὀρθογωνίε Κώνε τομὴν ἐν ὀρθογωνίῳ μόνον Κώνῳ ἐθεώρεν, τεμνομένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθῷ πρὸς μίαν πλευρὰν τῦ Κώνε· τὴν δὲ τῦ ἀμβλυγωνίε Κώνε τομὴν, ἐν ἀμβλυγωνίῳ γενομένην Κώνῳ ἀπεδείκνυσαν· τὴν δὲ τῦ ὀξυγωνίε, ἐν ὀξυγωνίῳ, ὁμοίως ἐπὶ πάντων τῶν Κώνων ἄγοντες τὰ ἐπίπεδα ὀρθὰ πρὸς μίαν πλευρὰν τῦ Κώνε. δηλοῖ δὲ καὶ αὐτὰ τὰ ἀρχαῖα ὀνόματα τῶν γραμμῶν. ὕςερον δὲ Ἀπολλώνιος ὁ Περγαῖος καθόλε τὶ ἐθεώρησεν· ὅτι ἐν παντὶ Κώνῳ καὶ ὀρθῷ καὶ σκαληνῷ, πᾶσαι αἱ τομαί εἰσι, κατὰ διάφορον τῦ ἐπιπέδε πρὸς τὸν Κῶνον προσβολήν· ὃν καὶ θαυμάσαντες οἱ κατ' αὐτὸν γενόμενοι, διὰ τὸ θαυμάσιον τῶν ὑπ' αὐτῦ δεδειγμένων κωνικῶν θεωρημάτων, μέγαν Γεωμέτρην ἐκάλεν. ταῦτα μὲν ὂν ὁ Γεμῖνος ἐν τῷ ἕκτῳ τῆς τῶν μαθημάτων θεωρίας, ὁ δὲ Εὐτόκιος ἀναπτύσσων φησίν.

Ὃ δὲ λέγει σαφὲς ποιήσομεν ἐπὶ τῶν ὑποκειμένων καταγραφῶν. ἔςω τὸ διὰ τῦ Ἄξονος Κώνε τρίγωνον τὸ ΑΒΓ. (πίν. Β'. χ. 6.) καὶ ἤχθω τῇ ΑΒ ἀπὸ τυχόντος σημεῖε τῦ Ε πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΕΖ, καὶ τὸ, τε διὰ τῆς ΔΖ ἐπίπεδον ἐμβληθὲν ὀρθὸν πρὸς τὴν ΑΒ, τεμνέτω τὸν Κῶνον. ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΕΔ, ΑΕΖ γωνιῶν. καὶ ὀρθογωνίου μένοντος τοῦ Κώνου, καὶ ὀρθῆς δηλονότι τῆς ὑπὸ ΒΑΓ γωνίας, ὡς ἐπὶ τῆς πρώτης καταγραφῆς, δύω ὀρθαὶ ἔσονται αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΕΖ γωνίαι. ὥστε παράλληλός ἐστιν ἡ ΔΕΖ τῇ ΑΓ. καὶ γίνεται ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ Κώνου τομὴ ἡ καλουμένη Παραβολή, οὕτω κληθεῖσα ἀπὸ τοῦ παράλληλον εἶναι τὴν ΔΕΖ, ἥτις ἐστὶ κοινὴ τομὴ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τοῦ διὰ τοῦ Ἄξονος τριγώνου, τῇ ΑΓ πλευρᾷ τοῦ τριγώνου. Ἐὰν δὲ ἀμβλυγώνιος ᾖ ὁ Κῶνος, ὡς ἐπὶ τῆς δευτέρας καταγραφῆς, (σχ. 7.) ἀμβλείας δηλονότι οὔσης τῆς ὑπὸ ΒΑΓ, ὀρθῆς δὲ τῆς ὑπὸ ΑΕΖ, δύω ὀρθῶν μείζους ἔσονται αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΕΖ γωνίαι. ὥστε οὐ συμπεσεῖται ἡ ΔΕΖ τῇ ΑΓ πλευρᾷ ἐπὶ τὰ πρὸς τοῖς Ζ, Γ μέρη, ἀλλὰ ἐπὶ τὰ πρὸς τοῖς Α, Ε, προσεκβαλλομένης δηλονότι τῆς ΓΑ ἐπὶ τὰ Δ. ποιήσει οὖν τὸ τέμνον ἐπίπεδον ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ Κώνου τομὴν ἐπικαλουμένην Ὑπερβολήν, οὕτω κληθεῖσαν ἀπὸ τοῦ ὑπερβάλλειν τὰς εἰρημένας, τουτέστι τὰς ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΕΖ δύω ὀρθάς, ἢ διὰ τὸ ὑπερβάλλειν τὴν ΔΕΖ τὴν κορυφὴν τοῦ Κώνου, καὶ συμπίπτειν τῇ ΓΑ ἐκτός. Ἐὰν δὲ ὀξυγώνιος ᾖ ὁ Κῶνος, ὀξείας δηλονότι οὔσης τῆς ὑπὸ ΕΑΓ, (πίν. Γ'. σχ. 1.) αἱ ΒΑΓ, ΑΕΖ ἔσονται δύω ὀρθῶν ἐλάσσονες, καὶ αἱ ΕΖ, ΑΓ ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται ὁπουδήποτε· προσαυξῆσαι γὰρ δύναμαι τὸν Κῶνον· ἔσται οὖν ἐν τῇ Ἐπιφανείᾳ τομή, ἥτις καλεῖται Ἔλλειψις, οὕτω κληθεῖσα ἢ διὰ τὸ ἐλλείπειν δύω ὀρθαῖς τὰς προειρημένας γωνίας, ἢ διὰ τὸ τὴν Ἔλλειψιν κύκλον εἶναι ἐλλειπῆ. οὕτω μὲν οὖν οἱ παλαιοὶ ὑποθέμενοι τὸ τέμνον ἐπίπεδον τὸ διὰ τῆς ΔΕΖ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΑΒ πλευρᾷ τοῦ διὰ τοῦ Ἄξονος τοῦ Κώνου τριγώνου, καὶ ἔτι διαφό-

ρους

ρους τοὺς Κώνους ἐθεώρησαν, καὶ ἐπὶ ἑκάστου ἰδίαν τομήν. ὁ δὲ Ἀπολλώνιος ὑποθέμενος Κῶνον καὶ ὀρθὸν καὶ σκαληνὸν, τῇ διαφόρῳ τοῦ ἐπιπέδου κλίσει διαφόρους ἐποίησε τὰς τομάς. (υ)

ΤΜΗΜΑ ΠΡΩΤΟΝ

Περὶ τῶν τῆς Παραβολῆς συμπτωμάτων.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α΄.

Ἐὰν ἐν Παραβολῇ ἀπὸ τῆς τομῆς καταχθῶσι δύω εὐθεῖαι ἐπὶ τὴν Διάμετρον τεταγμένως, ἔσται ὡς τὰ ἀπ᾽ αὐτῶν τετράγωνα πρὸς ἄλληλα, οὕτως αἱ ἀποτεμνόμεναι ὑπ᾽ αὐτῶν ἀπὸ τῆς Διαμέτρου πρὸς τῇ κορυφῇ τῆς τομῆς.

Ἔστω Παραβολὴ, ἧς Διάμετρος ἡ ΝΚ. καὶ εἰλήφθω τινὰ σημεῖα ἐπ᾽ αὐτῆς, τὰ Φ, Μ, καὶ ἀπ᾽ αὐτῶν τεταγμένως κατήχθησαν ἐπὶ τὴν Διάμετρον ΚΝ αἱ ΦΙ, ΜΚ. λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς $\overline{\Phi\mathrm{I}}^2 : \overline{\mathrm{MK}}^2 :: \mathrm{NI} : \mathrm{NK}$. πίν. Γ. σχ. 2.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

Ἤχθω διὰ τοῦ Ι ἐν τῷ διὰ τοῦ Ἄξονος τριγώνῳ ΔΑΒ ἡ ΓΙΕ παράλληλος τῇ τῆς βάσεως τοῦ Κώνου ΑΔΒ Διαμέτρῳ ΔΒ. καὶ ἤχθω διὰ τῶν ΦΙ, ΓΕ ἐπίπεδον τὸ ΓΦΕ.

(υ) Ὅρα τὸ γ΄. Πόρισμ.